

Sharp 予想の特別な場合

愛媛大・理 青山 陽一 (Yoichi Aoyama)

日大・文理 後藤 四郎 (Shiro Goto)

Dualizing Complex の存在についての Sharp 予想に関して考察することにする。

まず *dualizing complex* に関して簡単に復習しておこう。 *dualizing complex* の概念は [13] によるのであるが，ここでは Sharp 氏の論文に従って述べていくことにする。なお環と言えは断わらない限り可換ネーター環 $\ni 1 \neq 0$ であるものとする。

Definition ([16, (2.4)]. cf. [13, V. §2]). R を環とする。 R -加群の複体 $I^\bullet = \cdots \rightarrow I^{i-1} \rightarrow I^i \rightarrow I^{i+1} \rightarrow \cdots$ は次の条件を満たすとき R の *dualizing complex* であると言う：

- (D1) $I^\bullet$ bounded
- (D2) $H^i(I^\bullet)$ 有限生成 for $\forall i$
- (D3) I^i injective R -module for $\forall i$

(D4) 任意の R -加群の bounded complex X^* a. t. $H^i(X^*)$ 有限生成 for $\forall i$, に対し, 自然な写像 $\theta(X^*; I^*)^*: X^* \rightarrow \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(X^*, I^*), I^*)$ ([16, (2.3)]) が quasi-isomorphism (quism と略す) である。

(D1), (D2), (D3) の下で, (D4) は次の (D4') と同値である:

(D4') 自然な写像 $\alpha(I^*)^*: R \rightarrow \text{Hom}_R(I^*, I^*)$ ([16, (2.3)]) が quism である ([16, (3.6)])

dualizing complex が存在すれば, 次の意味で一意的である。

([13, V. §3], [16, (4.6)]). $\text{Spec}(R)$ が連結, I^*, J^* を R の dualizing complex とすると, 整数 t , 可逆 R -加群 P と quism: $I^* \rightarrow J^* \otimes_R P$ ($\otimes$ は shift functor) が存在する。

R を有限次元の Gorenstein 環, I^* を R の minimal injective resolution とすれば, I^* は R の dualizing complex である ([16, (3.11)]) が, これは $\bigoplus_i I^i \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)} E(R/\mathfrak{p})$ ($E(R/\mathfrak{p})$ は $R/\mathfrak{p}$ の injective envelope) という特別な形をしている。この様なものを fundamental という。即ち,

Definition ([18, (1.1)]). I^* が (D1), (D2) と次の (D5) を満たすと

き, *fundamental dualizing complex*であると言う:

$$(D5) \quad \bigoplus_i I^i \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)} E(R/\mathfrak{p})$$

(*fundamental dualizing complex* は *dualizing complex* である。)

([11, 3.6]). *dualizing complex* が存在すれば, その *reduction* である *fundamental dualizing complex* が存在する。

dualizing complex が存在するための十分条件として, 次はよく知られている。

([13, V. §10], [16, (3.7) and (3.9)], [17, (3.5)], [12, (3.4)]). 有限次元の Gorenstein 環は *dualizing complex* を持つ。(min. inj. resol. がそう)

$R \rightarrow S$ を環準同型で S を有限生成 R -加群とするものとする。このとき R が *dualizing complex* $I^\bullet$ を持てば, $\operatorname{Hom}_R(S, I^\bullet)$ は S の *dualizing complex* である。

R が *dualizing complex* $I^\bullet$ を持てば, $R[X]$ (resp. $R[[X]]$) 上 *dualizing complex* $J^\bullet$ と $\operatorname{quom}: R[X] \otimes_R I^\bullet$ (resp. $R[[X]] \otimes_R I^\bullet$) $\rightarrow J^\bullet$ が存在する。

また必要条件として,

([13, V. §10], [17]). R が *dualizing complex* を持てば,

$\dim R < \infty$. R は catenary. formal fibre はすべて Gorenstein.
 $\text{Gor}(R) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid R_{\mathfrak{p}} \text{ Gorenstein}\}$ は open. 有限生成 R -algebra
 は dualizing complex を持つ. 従って R は acceptable.

Faltings と Ogoma によって dualizing complex が存在するための
 必要十分条件が与えられているが, ここでは省略するので
 [4] 及び [15] を見て下さい. 平坦射による挙動は [12] で研究
 されている.

さて実際に dualizing complex を持つ環を与えようとすれば,
 「有限次元で Gorenstein 環の準同型像になっている環は dualizing
 complex を持つ」によるしか現在のところ方法がない様である.
 ([4], [15] の結果があるが) そして Cohen-Macaulay 環の場
 合にはこの様なものに限られる訳である ([18, (4.3)]). そこで
 Sharp 氏はこの逆を予想した. 即ち,

(SC) Sharp 予想 ([18, (4.4)]). 環 R が dualizing complex を持て
 ば, R は Gorenstein 環の準同型像である.

すでに述べたように, Cohen-Macaulay 環に対しては (SC) が正
 しいことはよく知られている. ([18, (4.3)]) Cohen-Macaulay で
 ない場合は今まで殆んど知られていなかった. 本稿では局所

環に対し(SC)を考察することにする。局所環と限らない場合次元が2以下なら(SC)が正しいことを小駒氏が証明した。これについては、次の小駒氏の稿を見て下さい。

以後、 $(A, \mathfrak{m})$ を d 次元局所環とする。完備化を $\hat{}$ で示す。 A が dualizing complex D_A を持てば、canonical module K_A を持つ。実際 $K_A = H^d(D_A)$, $d = \min\{i \mid H^i(D_A) \neq 0\}$, で与えられる。(canonical module については [14], [2] を参照) また $H_{\mathfrak{m}}^i(A) \cong \operatorname{Hom}_A(H^{d+k-i}(D_A), E(A/\mathfrak{m}))$ である。ここで示そうとする結果は次の通りである。

(1.1) $\ell(H_{\mathfrak{m}}^i(A)) < \infty$ for $i \neq d$ のとき、次は同値である：

- (a) A は Gorenstein 環の準同型像である。
- (b) A の dualizing complex が存在する。
- (c) A の canonical module が存在する。

(1.5) $d = 1$ のとき、次は同値である：

- (a) A は Gorenstein 環の準同型像である。
- (b) A の dualizing complex が存在する。
- (c) A の canonical module が存在する。
- (d) $A \rightarrow \hat{A}$ は Gorenstein 射である。

(1.7) $d = 2$ のとき, 次は同値である:

- (a) A は Gorenstein 環の準同型像である.
- (b) A の dualizing complex が存在する.
- (c) A の canonical module が存在し, $A \rightarrow \hat{A}$ が Gorenstein 射である.
- (d) 任意の ideal $\mathcal{A} (\neq A)$ に対し, $A/\mathcal{A}$ の canonical module が存在する.

(2.1) (S_2) を局所環に対し (SC) が正しければ, 一般の局所環に対し (SC) は正しい.

(2.3) $d \leq 4$ のとき, A の dualizing complex が存在すれば, A は Gorenstein 環の準同型像である.

(3.10) $d \geq 5$ のとき, A が (S_{d-2}) で, $\text{depth } A \geq d-1$ かつ $\text{depth } K_A \geq 3$ ならば, A の dualizing complex が存在すれば, A は Gorenstein 環の準同型像である.

R を環, M を有限生成 R -加群, N をその部分加群, $\dim M < \infty$ とする. $\text{Assh}(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M) \mid \dim R/\mathfrak{p} = \dim M\}$ とおく. $M \supseteq N = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ を最短準素部分加群分解で, $\dim M/Q_i = \dim M/N$

$\Leftrightarrow 1 \leq i \leq \lambda$ ($1 \leq \lambda \leq t$) なるものとするとき, $U(N) = U_M(N) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_\lambda$ とおく (一意的に決まる)。

§1. この節では, A が $\ell(H_{\mathfrak{m}}^i(A)) < \infty$ for $i \neq d$ を満たすとき (finite local cohomology であると言う。FLC と略する。), 及びそれより簡単に判る $d \leq 2$ のときを考察する。 $U = U_A(0)$ とおく。 A が FLC ならば $U = H_{\mathfrak{m}}^0(A)$ である。

(1.1) Theorem. A が FLC であるとき, 次は同値である:

- (a) A は Gorenstein 環の準同型像である。
- (b) A の dualizing complex が存在する。
- (c) A の canonical module が存在する。

(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) は一般の局所環に対しよく知られている。

(c) $\Rightarrow$ (b) は一般には成立しない。([15, §6. Example 2], (1.9))

Proof of (c) $\Rightarrow$ (b). I^* を canonical module K_A の min. inj. resol. とし, $K^* = H_{\mathfrak{m}}^0(I^*)$, $J^* = I^*/K^*$ とおく。極大でない素 ideal $\mathfrak{p}$ に対し, $(K_A)_{\mathfrak{p}} \cong K_{A_{\mathfrak{p}}}$ ([2, 4.3]) で $A_{\mathfrak{p}}$ は Cohen-Macaulay であるから $J^i \cong \bigoplus_{k \leq i} E(A/\mathfrak{p})$ for $i < d$, $J^i = 0$ for $i \geq d$ となる。([14, Satz 6.1])

$d \geq 2$ のとき。 $\text{depth } K_A \geq 2$ だから $K^0 = 0, K^1 = 0$ である。 complex の完全列 $0 \rightarrow K^* \rightarrow I^* \rightarrow J^* \rightarrow 0$ より長完全列 $\cdots \rightarrow H^{i-1}(I^*) \rightarrow H^{i-1}(J^*) \rightarrow H^i(K^*) \rightarrow H^i(I^*) \rightarrow H^i(J^*) \rightarrow H^{i+1}(K^*) \rightarrow \cdots$ を得る。 $H^0(I^*) = K_A, H^i(I^*) = 0$ for $i \neq 0, H^i(K^*) \cong H_{\text{m}}^i(K_A)$ for $\forall i, H^0(K^*) = 0, H^1(K^*) = 0$ であるから $H^0(J^*) \cong K_A, H^i(J^*) \cong H_{\text{m}}^{i+1}(K_A)$ for $i > 0$ である。 [19, (1.5)] より $H_{\text{m}}^i(K_A)$ 有限生成 for $i \neq d$ であるから, $H^i(J^*)$ 有限生成 for $i < d-1$ である。 完全列 $0 \rightarrow U \rightarrow A \xrightarrow{h_{\text{nat}}} \text{Hom}_A(K_A, K_A) \rightarrow \text{Coker}(h) \rightarrow 0$ に $\text{Hom}_A(, E(A/\mathfrak{m}))$ を作用させて完全列 $0 \rightarrow X \rightarrow H_{\text{m}}^d(K_A) \rightarrow E(A/\mathfrak{m}) \rightarrow Y \rightarrow 0$ を得る ($X = \text{Hom}_A(\text{Coker}(h), E(A/\mathfrak{m})), Y = \text{Hom}_A(U, E(A/\mathfrak{m}))$)。 U と $\text{Coker}(h)$ は長さ有限であるから, X と Y もそうである。 $J^{d-1} \twoheadrightarrow H^{d-1}(J^*) \xrightarrow{\sim} H_{\text{m}}^d(K_A) \rightarrow E(A/\mathfrak{m})$ により写像 $J^{d-1} \rightarrow E(A/\mathfrak{m})$ を決める。 そこで $D^* = \cdots 0 \rightarrow D^0 = J^0 \rightarrow \cdots \rightarrow D^{d-1} = J^{d-1} \rightarrow D^d = E(A/\mathfrak{m}) \rightarrow 0 \cdots$ とする。 $H^i(D^*) \cong H^i(J^*)$ for $i < d-1, H^{d-1}(D^*) \cong X, H^d(D^*) \cong Y$ である。 よって D^* は (D1), (D2), (D5) を満たし, A の fundamental dualizing complex である。

$d = 1$ のとき。 $\text{depth } K_A = 1$ だから $K^0 = 0$ である。 完全列 $0 \rightarrow U \rightarrow A \rightarrow \text{Hom}_A(K_A, K_A) \rightarrow 0$ より完全列 $0 \rightarrow H_{\text{m}}^1(K_A) \rightarrow E(A/\mathfrak{m}) \rightarrow Y \rightarrow 0$ ($Y = \text{Hom}_A(U, E(A/\mathfrak{m}))$) を得る。 $\ell(U) < \infty$ だから $\ell(Y) < \infty$ である。 また完全列 $0 \rightarrow K_A \rightarrow J^0 = H^0(J^*) \rightarrow H_{\text{m}}^1(K_A) \rightarrow H^1(I^*) = 0$ がある。 従って $J^0 \rightarrow E(A/\mathfrak{m})$ を得る。 そこで $D^* = \cdots 0 \rightarrow D^0 = J^0 \rightarrow D^1 = E(A/\mathfrak{m}) \rightarrow 0 \cdots$ とする。 $H^0(D^*) \cong K_A, H^1(D^*) \cong Y$ であり, D^* は A の funda-

mental dualizing complex である。 Q.E.D. for (c) $\Rightarrow$ (b)

(b) $\Rightarrow$ (a) の証明には次の Lemma が必要である。それは前稿の *unconditioned strong d-sequence* (u.s. d-列と言おう) の理論の一つの応用である。

(1.2) Lemma ([9, (10.7)]). A が FLC で $\text{depth } A > 0$ とすると, $\mathfrak{m}$ -準素 ideal $\mathfrak{q}$ で Rees 環 $\mathcal{R}(A, \mathfrak{q}) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{q}^i$ が Cohen-Macaulay となるものが存在する。逆も成立する。

Proof of (b) $\Rightarrow$ (a). $\text{depth } A > 0$ の場合。上の Lemma で言う様な ideal $\mathfrak{q}$ をとる。 $\mathcal{R}(A, \mathfrak{q})$ は A 上有限生成環だから dualizing complex を持ち, Cohen-Macaulay だから Gorenstein 環の準同型像となる。従って, A も Gorenstein 環の準同型像である。

$\text{depth } A = 0$ の場合。 $A \supset (0) = U \cap I$ (準素分解より, I $\mathfrak{m}$ -準素) とする。 A/U は dualizing complex を持ち, $H_{\mathfrak{m}}^0(A/U) = 0$, $H_{\mathfrak{m}}^i(A/U) \cong H_{\mathfrak{m}}^i(A)$ for $i > 0$ であるから, すでに示したことより Gorenstein 局所環 R の準同型像である。 A/I は artinian だから Gorenstein 局所環 S の準同型像である。ここで $\dim R = \dim S = n \geq \max\{2, d\}$ としよ。 $\varphi: R \oplus S \rightarrow A/U \oplus A/I$ とし $B = \varphi^{-1}(A)$ とする。 B は環 (ネーター的は後で判る) であり, 次の可換図形を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & B & \longrightarrow & R \oplus S & \longrightarrow & R \oplus S/B \longrightarrow 0 \quad (\text{完全}) \\
& & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\
0 & \rightarrow & A & \longrightarrow & A/U \oplus A/I & \longrightarrow & A/U+I \longrightarrow 0 \quad (\text{完全})
\end{array}$$

$\ell(A/U+I) < \infty$ であるから $R \oplus S$ は B 上有限生成加群となり, B はネーター的である。従って B は $\mathcal{K} = \varphi^{-1}(\mathcal{K})$ を極大 ideal とする n 次元局所環である。上の完全列より $H_n^i(B) = 0$ for $i \neq 1, n$, $H_n^1(B) \cong R \oplus S/B$ (長さ有限) を得る。[3, 1.7] より B は $R \oplus S$ を *canonical module* として持つ。従って (c) $\Rightarrow$ (b) 及び $\text{depth} > 0$ の場合より, B は Gorenstein 環の準同型像であり, A もそうである。

Q.E.D. for (b) $\Rightarrow$ (a)

(1.3) Corollary. $d=3$ のとき, A が *canonical module* を持ち (S₂) であれば, A は Gorenstein 環の準同型像である。

(1.4) Corollary. $d=2$ のとき, 次は同値である:

- (a) A の *canonical module* が存在する。
- (b) A/U は Gorenstein 環の準同型像である。 (cf. [2, (1.12)])

1次元 Cohen-Macaulay 局所環に対しては, *canonical module* の存在等と *formal fibre* の Gorenstein 性とが同値であることが知られている ([6, (5.3)]) が, Cohen-Macaulay でない場合も同様の結

果が成立する。即ち,

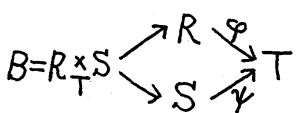
(1.5) Proposition. $d=1$ のとき, 次は同値である:

- (a) A は Gorenstein 環の準同型像である。
- (b) A の dualizing complex が存在する。
- (c) A の canonical module が存在する。
- (d) $A \rightarrow \hat{A}$ は Gorenstein 射である。

Proof. 1次元局所環は FLC であるから, (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) は (1.1) の特別な場合である。(a) $\Rightarrow$ (d) はよく知られている。(d) $\Rightarrow$ (b) を示そう。仮定より, A の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対し $E(A/\mathfrak{p}) \otimes_A \hat{A} \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in A/\mathfrak{p}} E(\hat{A}/\mathfrak{p})$ である。 $\hat{A}$ の fundamental dualizing complex $D^\bullet = 0 \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}} E(\hat{A}/\mathfrak{p}) \rightarrow E(\hat{A}/\mathfrak{m}) \rightarrow 0$ をとる。 $\bigoplus_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}} E(\hat{A}/\mathfrak{p}) \cong (\bigoplus_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}} E(A/\mathfrak{p})) \otimes_A \hat{A}$, $E(\hat{A}/\mathfrak{m}) \cong E(A/\mathfrak{m}) \otimes_A \hat{A} \cong E(A/\mathfrak{m})$ であるから, A 上の complex $I^\bullet = 0 \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}} E(A/\mathfrak{p}) \rightarrow E(A/\mathfrak{m}) \rightarrow 0$ と $I^\bullet \otimes_A \hat{A} \cong D^\bullet$ as complexes を得る。このとき $I^\bullet$ は A の fundamental dualizing complex である。 Q.E.D.

2次元だと canonical module の存在だけでは駄目で, formal fibre の Gorenstein 性の条件を加える必要がある。ただし, equidimensional のときは不要である。それらを示す前に, dualizing complex の存在に関して有効な Faltings-Opama の結果を述べてお

こう。

(1.6) Lemma ([4, Lemma 3 and 5], [15, 3.7]). $B = R \underset{T}{\times} S$  T を環の pull-back diagram で, φ が onto, ψ が finite なるものとする。 R (resp. S) の fundamental dualizing complex I^* (resp. J^*) が存在して $\text{Hom}_R(T, I^*) \cong \text{Hom}_S(T, J^*)$ as complexes を満たしているとする。このとき, B の fundamental dualizing complex D^* で $\text{Hom}_B(R, D^*) \cong I^*$, $\text{Hom}_B(S, D^*) \cong J^*$ as complexes を満たすものが存在する。特に T が局所環のときは, R と S が共に dualizing complex を持てば, B も dualizing complex を持つ。

(1.7) Proposition. $d=2$ のとき, 次は同値である:

- (a) A は Gorenstein 環の準同型像である。
- (b) A の dualizing complex が存在する。
- (c) A の canonical module が存在して, $A \rightarrow \hat{A}$ が Gorenstein 射である。
- (d) 任意の ideal α ($\neq A$) に対し, A/α の canonical module が存在する。

Proof. (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c), (d) が任意の次元で成立することはよく知られている。

(c) $\Rightarrow$ (d): $\dim A/\alpha = 2$ のとき, $\text{Hom}_A(A/\alpha, K_A)$ が A/α の canonical module である。 $\dim A/\alpha = 1$ なら, $A/\alpha \rightarrow \widehat{A/\alpha}$ が Gorenstein 射だから (1.5) により, よい。 $\dim A/\alpha = 0$ なら, 明らか。

(d) $\Rightarrow$ (a): $A \supset (0) = U \cap I$ (準素分解より) とする。 (1.4) より A/U は Gorenstein 局所環 R の準同型像である。 従って $U=0$ ならよい。 $U \neq 0$ とする。 $\dim A/I \leq 1$ で, A/I は canonical module を持つから Gorenstein 局所環 S の準同型像である。(cf. (1.5)) ここで $\dim R = \dim S = 2$ としてよい。 $\varphi: R \oplus S \rightarrow A/U \oplus A/I$ とし, $B = \varphi^{-1}(A)$ とする。 B は環 (ネーター的は後で判る) であり, 次の可換図形を得る。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & R \oplus S & \rightarrow & R \oplus S/B \rightarrow 0 \quad (\text{完全}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow S \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & A/U \oplus A/I & \rightarrow & A/U+I \rightarrow 0 \quad (\text{完全}) \end{array}$$

$R \oplus S/B \cong A/U+I$ は有限生成 B -加群であるから $R \oplus S$ もそうであり, 従って B はネーター的である。 よって B は $\mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ を極大 ideal とする 2次元局所環である。 $A/U+I$ は局所環で, $R \rightarrow A/U+I$ と $S \rightarrow A/U+I$ は共に onto であるから, (1.6) により B の dualizing complex が存在する。 上の完全列より $H_n^0(B) = 0$, $H_n^1(B) \cong H_n^0(R \oplus S/B)$ 有限生成であるから, (1.1) より B は Gorenstein 環の準同型像であり, 従って A もそうである。 Q.E.D.

(1.8) Corollary. $d=2$ のとき, A の canonical module が存

在し, A が *equidimensional* (i.e. $\forall \mathfrak{p} \in \text{Min}(A), \dim A_{\mathfrak{p}} = \dim A$) であるならば, A は Gorenstein 環の準同型像である。

Proof. 任意の ideal $\alpha (\neq A)$ をとる。 $\dim A/\alpha = 0$ なら, A/α の canonical module が存在することは明らか。 $\dim A/\alpha = 2$ なら, $\text{Hom}_A(A/\alpha, K_A)$ が A/α の canonical module である。 $\dim A/\alpha = 1$ とする。 P を $\hat{A}$ の素 ideal $\neq \hat{\mathfrak{m}}$ で $\alpha \hat{A}$ を含むものとする。 $\mathfrak{p} = P \cap A$ とおく。 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}, \supseteq \alpha$ である。 A が *equidimensional* だから $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) = \text{Supp}(K_A)$ で $(K_A)_{\mathfrak{p}} \cong K_{A_{\mathfrak{p}}}$, 即ち $A_{\mathfrak{p}}$ の canonical module が存在する。 ([2, (1.7) and 4.3]) $K_{A_{\mathfrak{p}}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \hat{A}_{\mathfrak{p}} \cong K_{\hat{A}_{\mathfrak{p}}}$ で $\hat{A}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ は artinian だから, [2, 4.1] により $\hat{A}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ は Gorenstein である。 従って $A/\alpha \rightarrow \hat{A}/\alpha\hat{A}$ は Gorenstein 射であり, (1.5) により A/α の canonical module が存在する。 よって (1.7)(d) が成立し, 主張を得る。 Q.E.D.

(1.9) Remark. 任意の整数 $n \geq 2$ に対し, n 次元局所環で, canonical module は存在するが, dualizing complex は存在しない, ものがある。 (cf. [5])

(1.10) Remark. 任意の ideal $\alpha (\neq A)$ に対し A/α の canonical module が存在すること, と formal fibre がすべて Gorenstein であること, の両方を仮定すると A の dualizing complex が存在

することが知られている。([15, 5.5])

§2. この節では、局所環に対し (SC) が正しいことを示すには、Serre の条件 (S_2) を仮定してよいこと、及び、次元 4 以下の局所環に対し (SC) が正しいこと、を証明しよう。

(2.1) Lemma. $\dim < n$ なる局所環に対し, (SC) は正しい。

$\dim = n$, (S_2) なる局所環に対し, (SC) は正しい。

$\Rightarrow \dim = n$ なる局所環に対し, (SC) は正しい。

Proof. B を dualizing complex を持つ n 次元局所環とする。主張を得るためには $\text{Ass}(B) = \text{Assh}(B)$ としてよいことをまず示そう。 $B \supset (0) = I \cap J$ ($I = U_B(0)$, 準素分解より) とする。今, B/I が Gorenstein 局所環 R の準同型像であるとしよう。 $\dim B/I < n$ だから仮定より Gorenstein 局所環 S の準同型像である。ここで, $\dim R = \dim S = n$ としてよい。 $\varphi: R \oplus S \rightarrow B/I \oplus B/I$ とし, $C = \varphi^{-1}(B)$ とおく。(1.7) の Proof 中の議論と同様にして, C は dualizing complex を持つ n 次元局所環であることが判る。また $\text{Ass}(C) = \text{Assh}(C)$ である。従って, C が Gorenstein 環の準同型像ならば B もそうである。故に, $\text{Ass}(B) = \text{Assh}(B)$ としてよい。

今、主張が成立しないとする。すでに示したことにより, *dualizing complex* を持ち Gorenstein 環の準同型像でない n 次元局所環 B で $\text{Ass}(B) = \text{Assh}(B)$ となるものが存在する。仮定より B は (S_2) でない。従って $\text{depth } B_{\mathfrak{p}} = 1$, $\dim B_{\mathfrak{p}} > 1$ となる素 *ideal* $\mathfrak{p}$ がある。 $\Delta(B) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B) \mid \text{depth } B_{\mathfrak{p}} = 1, \dim B_{\mathfrak{p}} > 1\}$ とおく。 $Z = \text{Coker}(B \xrightarrow{\text{nat}} \text{Hom}_B(K_B, K_B))$ とおく。 $(\text{Ass}(B) = \text{Assh}(B)$ だから Ker は (0) 。([2, (1.8)]) $\mathfrak{p} \in \Delta(B)$ ならば $\text{depth } B_{\mathfrak{p}} = 1$, $\text{depth } \text{Hom}_B(K_B, K_B)_{\mathfrak{p}} \geq 2$ だから $\text{depth } Z_{\mathfrak{p}} = 0$, 即ち $\Delta(B) \subseteq \text{Ass}(Z)$ である。 $\sigma(B) = \max\{\dim B_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \Delta(B)\}$ とおく。 $\sigma(B) > 1$ である。また, $\bar{\Delta}(B) = \{\mathfrak{p} \in \Delta(B) \mid \dim B_{\mathfrak{p}} = \sigma(B)\}$, $\Delta'(B) = \Delta(B) \setminus \bar{\Delta}(B)$ とおく。上に述べた反例の中で $\sigma(B)$ を最小にする B をとり, その $\sigma(B)$ を λ とおく。 $\lambda > 1$ である。*dualizing complex* を持つ次元 2 以上の局所環 $(R, \mathfrak{p})$ は, $\text{Ass}(R) = \text{Assh}(R)$ を満たせば, $\ell(H_{\mathfrak{p}}^i(R)) < \infty$ である。従って, 非零因子 $x \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \bar{\Delta}(B)} \mathfrak{p} \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Delta'(B)} \mathfrak{p}$ で $x \cdot H_{\mathfrak{p}}^i(B_{\mathfrak{p}}) = 0$ for $\forall \mathfrak{p} \in \bar{\Delta}(B)$ となるものが存在する。仮定より, $B/U_B(xB)$ は Gorenstein 局所環 G の準同型像である。 $\dim G = n$ としてよい。 $B \rightarrow B/U_B(xB)$, $G \rightarrow B/U_B(xB)$ による fibre product を C とする:

$$C = B \times_{B/U_B(xB)} G \begin{array}{l} \nearrow B \\ \searrow G \end{array} \begin{array}{l} \nearrow B \\ \searrow B/U_B(xB) \end{array} \rightarrow B/U_B(xB), \quad 0 \rightarrow C \rightarrow B \oplus G \rightarrow B/U_B(xB) \rightarrow 0 \text{ 完全。}$$

(1.7) の Proof 中の議論と同様にして, C は *dualizing complex* を持つ n 次元局所環であることが判る。また $\text{Ass}(C) = \text{Assh}(C)$ である。 B は C の準同型像だから, C は Gorenstein 環の準同型像

でない。仮定より C は (S) でない。従って $\Delta(C) \neq \emptyset$ 。 $P \in \bar{\Delta}(C)$ をとり、 $t = \dim C_P = \sigma(C)$ とおく。 B のとり方より $t \geq 1$ である。今、 $(B/U_B(xB))_P = 0$ とすると、 $C_P \cong B_P$ 或 G_P であるが G_P は Gorenstein だから $C_P \cong B_P$ である。従って $PB \in \bar{\Delta}(B)$ で $PB \ni x$ となる。故に $U_B(xB)_P \neq B_P$ で矛盾。よって $(B/U_B(xB))_P \neq 0$ 。 $\dim(B/U_B(xB))_P = r$ とおく。 $\dim B_P = \dim G_P = \dim C_P = r+1$ となり、 $\dim C_P = t$ より $r+1 = t \geq 1 > 1$ となる。完全列 $0 \rightarrow C_P \rightarrow B_P \oplus G_P \rightarrow (B/U_B(xB))_P \rightarrow 0$ において、 $\text{depth } C_P = 1$ 、 $\text{depth } G_P = r+1 \geq 2$ 、 $\text{depth}(B/U_B(xB))_P > 0$ であるから $\text{depth } B_P = 1$ となり、 $PB \in \bar{\Delta}(B)$ となる。従って $xH_P^1(B_P) = 0$ だから、 $H_P^1(B_P) \rightarrow H_P^1(B_P/xB_P)$ は単射である。次に $U_B(xB)_P/xB_P$ が長さ有限であることを示そう。 $P \neq Q \in \text{Spec}(C)$ で $U_B(xB)_Q/xB_Q \neq 0$ となるものが存在したとする。当然 $QB \ni x$ である。 $U_B(xB)$ の定義より、 $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_{B_Q}(B_Q/xB_Q) \setminus \text{Assh}_{B_Q}(B_Q/xB_Q)$ が存在する。このとき $\text{depth } B_{\mathfrak{q}} = 1$ で $\dim B_{\mathfrak{q}} \leq \dim B_Q < \dim B_P = 1$ であり $\mathfrak{q} \ni x$ だから $\mathfrak{q} \notin \bar{\Delta}(B)$ となる。従って、 $\dim B_{\mathfrak{q}} = 1$ で $\mathfrak{q} \in \text{Assh}_{B_Q}(B_Q/xB_Q)$ となつて、矛盾。故に、 $\ell(U_B(xB)_P/xB_P) < \infty$ である。従って、 $H_P^1(U_B(xB)_P/xB_P) = 0$ となり、 $H_P^1(B_P/xB_P) \rightarrow H_P^1(B_P/U_B(xB)_P)$ は単射である。先の単射と合わせて、 $H_P^1(B_P) \rightarrow H_P^1((B/U_B(xB))_P)$ が単射であることが判る。故に、完全列 $0 = H_P^0((B/U_B(xB))_P) \rightarrow H_P^1(C_P) \rightarrow H_P^1(B_P \oplus G_P) \cong H_P^1(B_P) \rightarrow H_P^1((B/U_B(xB))_P)$ ($H_P^1(G_P) = 0$ である) より、 $H_P^1(C_P) = 0$ を得る。これは $\text{depth } C_P = 1$ に矛盾する。従って、反

例は存在しない。 Q.E.D.

次元4以下で(SC)が正しいことを示すのであるが、そのためには(1.2)を半局所環の場合に拡張しておく必要があるので、まずそれを述べることにする。

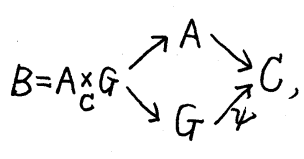
(2.2) Remark. (1.2)で言う $\mathfrak{q}$ はどの様にとればよかったかを見てみよう。FLCの場合には、十分大きな u をとれば、 $\mathfrak{q}$ に含まれるパラメーター系はu.s.d.列をなす([9, (7.7)]). その様なパラメーター系 $a_1, \dots, a_d$ をとり, $\text{ideal}(a_1, \dots, a_d)$ による Rees 環を R , graded 極大 ideal を N とすると, $H_N^0(R) = 0$ ([9, (5.2)]) で, $1 \leq p \leq d$ に対し $[H_N^p(R)]_i = 0$ for $i < 2-p, i \geq 0$ ([9, (5.7)]) である。従って, R の $d-1$ 次以上の Veronese 部分環 R' をとれば $H_{N'}^p(R') = 0$ for $p \neq d+1$ (N' は R' の graded 極大 ideal) となる ([9, (10.6)]). よって, $u \geq d-1$ として $\mathfrak{q} = (a_1, \dots, a_d)^u$ とおけばよいことが判る。即ち, 勝手にパラメーター系 $x_1, \dots, x_d$ をとり, 十分大きな u をとり $\mathfrak{q} = (x_1^u, \dots, x_d^u)^u$ とすればよいと言う要領である。(詳しくは, 山岸氏の稿, [9] を見て下さい。)

$(B, \pi_1, \dots, \pi_s)$ を半局所環で $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_s = \pi$ ($= \pi$ とおく) なるものとする。 $\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_s$ とおく。今, $\text{depth } B_{\pi_i} > 0$ for $i=1, \dots, s$, $\ell(H_{\pi}^i(B)) < \infty$ for $i \neq n$ と仮定する。 ($H_{\pi}^i(B) \cong H_{\pi_i}^i(B_{\pi_i}) \oplus \dots$

$\oplus H_{\pi_i}^i(B_{\pi_i})$ である) $x_1, \dots, x_n \in \pi$ を, 各 i に対し B_{π_i} のパラメーター系になる様にとる。 u を, $\varphi = (x_1^u, \dots, x_n^u)^u$ としたとき, 各 i に対し $\mathcal{R}(B_{\pi_i}, \varphi B_{\pi_i})$ が Cohen-Macaulay になる様に十分大きくとる。そのとき, $\mathcal{R}(B, \varphi)$ は Cohen-Macaulay である。まとめて, $(B, \pi_1, \dots, \pi_s)$ を $\text{ht } \pi_1 = \dots = \text{ht } \pi_s$ なる半局所環とする。 $\text{depth } B_{\pi_i} > 0$ for $i=1, \dots, s$, $\ell(H_{\pi}^i(B)) < \infty$ for $i \neq \dim B$ ($\pi = \pi_1 \cdots \pi_s$) となっていれば, ideal φ で $\sqrt{\varphi} = \pi$, $\mathcal{R}(B, \varphi)$ が Cohen-Macaulay となるものが存在する。

(2.3) Theorem. $\dim A \leq 4$ のとき, A の dualizing complex が存在すれば, A は Gorenstein 環の準同型像である。

Proof. $d = \dim A \leq 2$ ならば, §1 ですでに示されている。
 $d=3$ のときは, (1.3) と (2.1) により判る。 $d=4$ とする。(2.1) により, A は (S_2) である, としてよい。さらに (1.1) により, A が FLC でない場合のみやればよい。 $\text{CM}(A) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid A_{\mathfrak{p}} \text{ Cohen-Macaulay}\}$ は open だから, ideal α が存在して $\text{Spec}(A) \setminus \text{CM}(A) = V(\alpha)$ となる。 A が (S_2) で non-FLC だから $\text{ht } \alpha = 3$ である。故に $V(\alpha)$ は有限集合である。 $\mathfrak{p} \in V(\alpha) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ について, $\dim A_{\mathfrak{p}} = 3$, $A_{\mathfrak{p}}$ は (S_2) で dualizing complex を持つから $\ell(H_{A_{\mathfrak{p}}}^2(A_{\mathfrak{p}})) < \infty$ である。従って, 非零因子 $a \in \alpha$ で, $a \cdot H_{A_{\mathfrak{p}}}^2(A_{\mathfrak{p}}) = 0$ for $\forall \mathfrak{p} \in V(\alpha) \setminus \{\mathfrak{m}\}$

となるものが存在する。Aは (S_2) であるから $\text{Ass}(A/aA) = \text{Assh}(A/aA)$ で $A/aA \hookrightarrow C = \text{Hom}_{A/aA}(K_{A/aA}, K_{A/aA})$ となる。 $([2, (1.8)])$ $\dim G_{\pi} = 3$ for $\forall \pi \in \text{Max}(C)$ で、Cは (S_2) $([2, 3.2])$ かつ *dualizing complex* を持つから、(2.2)と(1.1)のProof of (b) $\Rightarrow$ (a)より、CはGorenstein環Gの準同型像である。ここで $\text{Max}(G) = \{\psi^{-1}(\pi) \mid \pi \in \text{Max}(C)\}$ (ψ は $G \twoheadrightarrow C$), $\dim G_N = 4$ for $\forall N \in \text{Max}(G)$ としてよい。A $\rightarrow$ Cと $G \twoheadrightarrow C$ によるfibre productをBとおく。 $B = A \times_C G$  $0 \rightarrow B \rightarrow A \oplus G \rightarrow C \rightarrow 0$ 完全。

今までの議論と同様にして、Bは4次元局所環であることが判る。まず、Bが*dualizing complex*を持つことを示そう。Aのfundamental dualizing complexを $I^* = 0 \rightarrow I^0 \rightarrow \cdots \rightarrow I^4 \rightarrow 0$, Gのを $J^* = 0 \rightarrow J^0 \rightarrow \cdots \rightarrow J^4 \rightarrow 0$ とすると、 $\text{Hom}_A(C, I^*)$ と $\text{Hom}_G(C, J^*)$ は共にCのfundamental dualizing complexであり、 $\text{Hom}_A(C, I^0) = 0$, $\text{Hom}_G(C, J^0) = 0$ であるから、Cを連結なものの直和に分解して各々の上では同型である(cf. $[16, (4.6)]$, $[11, 4.2]$, Cは半局所環)ことより、 $\text{Hom}_A(C, I^*) \cong \text{Hom}_G(C, J^*)$ as complexes であることが判る。従って(1.6)により、Bは*dualizing complex*を持つ。次に、Bの極大でない素ideal Pに対し、 B_P がCohen-Macaulayであることを示そう。 $C_P = 0$ なら、 $B_P \cong A_P \cong G_P$ 。 $B_P \cong G_P$ ならよい。 $B_P \cong A_P$ とする。 $C_P = 0$ だから $(A/aA)_P = 0$ となり $PA \neq a$ となって、aのとり方より A_P はCohen-Macaulayである。 $C_P \neq 0$ とし、 $\dim$

$C_P = r$ とおく。このとき $\dim B_P = \dim A_P = \dim G_P = r+1$ である。
 $0 \leq r \leq 2$ である。 $r=0,1$ のとき, A と C は共に (S_2) で G は Gorenstein
 だから, 完全列 $0 \rightarrow B_P \rightarrow A_P \oplus G_P \rightarrow C_P \rightarrow 0$ より B_P が Cohen-
 Macaulay であることが判る。 $r=2$ のとき, 同様に上の完全列
 より $\text{depth } B_P \geq 2$ が判る。 $\alpha \cdot H_{PB_P}^2(A_P) = 0$ だから $H_{PB_P}^2(A_P) \rightarrow H_{PB_P}^2(A_P/\alpha A_P)$
 は単射である。 $A_P/\alpha A_P$ は 2 次元で $\text{Ass}(A_P/\alpha A_P) = \text{Assh}(A_P/\alpha A_P)$ である
 から, $\ell(\text{Coker}(A_P/\alpha A_P \rightarrow C_P)) < \infty$ となり $H_{PB_P}'(\text{Coker}(A_P/\alpha A_P \rightarrow C_P)) = 0$
 である。故に $H_{PB_P}^2(A_P/\alpha A_P) \rightarrow H_{PB_P}^2(C_P)$ は単射である。先の単射と
 合わせて, $H_{PB_P}^2(A_P) \rightarrow H_{PB_P}^2(C_P)$ が単射であることが判る。従って,
 完全列 $0 = H_{PB_P}'(C_P) \rightarrow H_{PB_P}^2(B_P) \rightarrow H_{PB_P}^2(A_P \oplus G_P) \cong H_{PB_P}^2(A_P) \rightarrow H_{PB_P}^2(C_P)$
 より $H_{PB_P}^2(B_P) = 0$ を得, B_P が Cohen-Macaulay であることが判る。
 よって, $\text{Ass}(B) = \text{Assh}(B)$ だから, B は FLC である。(1.1) より
 B は Gorenstein 環の準同型像である。 A は B の準同型像である
 から, 主張を得る。 Q.E.D.

§3. FLC 及び次元 4 以下の局所環の場合には, (SC) の
 正しいことが判ったのだが, それら以外の場合には現在まで
 のところ殆んど判っていない。但し, A に色々と条件を付け
 ると判ることがあるので, この節ではそれについて記してお
 きたい。ここでの議論に, u. s. d-列の理論が有用である。

以後 (3.9) まで, 次の四つを仮定して議論を進める。

- (ア) A は fundamental dualizing complex $D = 0 \rightarrow D^0 \rightarrow \cdots \rightarrow D^d \rightarrow 0$ を持つ。
- (カ) $d \geq 5$ 。
- (キ) A は (S_{d-2}) である。
- (ク) A は FLC でない。

(3.1) Lemma. $H^i(D) = 0$ for $i > 2$. $\ell(H^2(D)) < \infty$. $\dim H^1(D) = 1$.

Proof. まず, $\text{Hom}_A(H^i(D), E(A/\mathfrak{m})) \cong H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(A)$ であることを再記しておく。 $\text{depth } A \geq d-2$ だから $H^i(D) = 0$ for $i \geq 2$ ($\cong \dim A - \text{depth } A$) である。 (S_{d-2}) だから, 極大でない素 ideal $\mathfrak{p}$ について $\dim A_{\mathfrak{p}} - \text{depth } A_{\mathfrak{p}} \leq 1$ となり, $H^2(D_{\mathfrak{p}}) = 0$ である。 ($D_{\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の fundamental dualizing complex) 従って $\ell(H^2(D)) < \infty$ である。 $\dim A_{\mathfrak{p}} \geq 2$ なる素 ideal $\mathfrak{p}$ について, $A_{\mathfrak{p}}$ は Cohen-Macaulay だから, $H^1(D_{\mathfrak{p}}) = 0$ となり, $\dim H^1(D) \leq 1$ である。 A は FLC でないから, $\dim H^1(D) = 1$ を得る。 Q.E.D.

(3.2) Lemma. $H_{\mathfrak{m}}^i(K_A) = 0$ for $i \neq 2, 3, d$. $H_{\mathfrak{m}}^2(K_A) \cong H_{\mathfrak{m}}^0(H^1(D))$. $H_{\mathfrak{m}}^3(K_A) \neq 0$. 従って, $\text{depth } K_A = 2$ or 3 であって, $\text{depth } K_A = 3 \iff \text{depth } H^1(D) > 0 \iff H^1(D) \text{ Cohen-Macaulay}$.

Proof. $K_A \cong H^0(D')$ である。 $B^i = \text{Im}(D^{i-1} \rightarrow D^i)$, $Z^i = \text{Ker}(D^i \rightarrow D^{i+1})$, $H^i = H^i(D') = Z^i/B^i$ とおく。 次の4つの短完全列がある:

$$\begin{aligned} (1) \quad 0 \rightarrow K_A \rightarrow D^0 \rightarrow B^1 \rightarrow 0 & \quad (2) \quad 0 \rightarrow B^1 \rightarrow Z^1 \rightarrow H^1 \rightarrow 0 \\ (3) \quad 0 \rightarrow Z^1 \rightarrow D^1 \rightarrow B^2 \rightarrow 0 & \quad (4) \quad 0 \rightarrow B^2 \rightarrow Z^2 \rightarrow H^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

更に $H^i(D') = 0$ for $i > 2$ だから, 完全列 (5) $0 \rightarrow Z^2 \rightarrow D^2 \rightarrow \cdots \rightarrow D^d \rightarrow 0$ がある。 $D^0 \cong \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} E(A/\mathfrak{p})$ だから $H_m^i(D^0) = 0$ for $\forall i$ 。従って, 完全列 (1) より $H_m^i(K_A) \cong H_m^{i-1}(B^1)$ for $\forall i$ 。 $D^i \cong \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} E(A/\mathfrak{p})$ だから完全列 (5) より $H_m^i(Z^2) = 0$ for $i \neq d-2$, $H_m^{d-2}(Z^2) \cong E(A/\mathfrak{m})$ 。従って, $\ell(H^2) < \infty$ であるから, 完全列 (4) より $H_m^i(B^2) = 0$ for $i \neq 1, d-2$, $H_m^1(B^2) \cong H^2$, $H_m^{d-2}(B^2) \cong E(A/\mathfrak{m})$ 。 $H_m^i(D^1) = 0$ for $\forall i$ だから, 完全列 (3) より $H_m^i(Z^1) = 0$ for $i \neq 2, d-1$, $H_m^2(Z^1) \cong H^2$, $H_m^{d-1}(Z^1) \cong E(A/\mathfrak{m})$ 。 $\dim H^1 = 1$ だから, 完全列 (2) より $H_m^i(B^1) = 0$ for $i \neq 1, 2, d-1$, $H_m^1(B^1) \cong H_m^0(H^1)$, $H_m^2(B^1) \hookrightarrow H_m^1(H^1) \neq 0$, $H_m^{d-1}(B^1) \cong E(A/\mathfrak{m})$ 。これらより主張を得る。 Q.E.D.

$\text{Spec}(A) \setminus \text{CM}(A) = \bigcup_{i \geq 0} \text{Supp}(H^i(D')) = \text{Supp}(H^1(D'))$ である。そこで ideal α を $V(\alpha) = \text{Spec}(A) \setminus \text{CM}(A)$, $\alpha \cdot H^i(D') = 0$ for $i \neq 0$ (故に $\alpha \cdot H_m^i(A) = 0$ for $i \neq d$) となるようにとる。 $\dim A/\alpha = 1$ で, $V(\alpha)$ は有限集合である。

(3.3) Proposition. α の元 $a_1, \dots, a_{d-1}$ で, 次の (1) (ii) を満たすものが存在する。

- (イ) $a_1, \dots, a_{d-1}$ は A のパラメーター系の一部をなす。
 (ロ) $a_1, \dots, a_{d-1}$ の中, どの $d-2$ 個も A -正則列をなす。
 (ハ) $a_1, \dots, a_{d-1}$ は $u. s. d$ -列 $on A$ である。

Proof. $ht \alpha = d-1$ であるから, α の元 $x_1, \dots, x_{d-1}$ で $ht(x_1, \dots, x_{d-1}) = d-1$ となるものがある。これは明らかに(イ)を満たす。 A が (S_{d-2}) であるから, $x_1, \dots, x_{d-1}$ は(ロ)も満たす。このとき, 任意の $t_1, \dots, t_{d-1} > 0$ に対して, $x_1^{t_1}, \dots, x_{d-1}^{t_{d-1}}$ も(イ),(ロ)を満たす。 $\mathfrak{p} \in V(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ に対し, $A_{\mathfrak{p}}$ は (S_{d-2}) で $\dim A_{\mathfrak{p}} = d-1$ であるから, $A_{\mathfrak{p}}$ は FLC である。従って [9, (7.7)] により, 整数 $n > 0$ が存在して $\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}}$ に含まれるパラメーター系は $u. s. d$ -列 $on A_{\mathfrak{p}}$ for $\forall \mathfrak{p} \in V(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ である。 $y_i = x_i^n$ ($i=1, \dots, d-1$), $y = (y_1, \dots, y_{d-1})$ とおく。極大でない素 ideal $\mathfrak{p}$ をとる。 $\mathfrak{p} \neq \alpha$ ならば $H_1(y_1^{t_1}, \dots, y_{d-1}^{t_{d-1}}; A) = 0$ for $\forall t_1, \dots, t_{d-1} > 0$ である。 $\mathfrak{p} \supseteq \alpha$ ならば $y_1, \dots, y_{d-1}$ は $u. s. d$ -列 $on A_{\mathfrak{p}}$ であるから [9, (3.4)] により $y A_{\mathfrak{p}} \cdot H_1(y_1^{t_1}, \dots, y_{d-1}^{t_{d-1}}; A_{\mathfrak{p}}) = 0$ for $\forall t_1, \dots, t_{d-1} > 0$ である。従って $\ell(y \cdot H_1(y_1^{t_1}, \dots, y_{d-1}^{t_{d-1}}; A)) < \infty$ for $\forall t_1, \dots, t_{d-1} > 0$ 。 $a_i = y_i^2$ ($i=1, \dots, d-1$) とおく。任意の整数 $t_1, \dots, t_{d-1} > 0$ をとり, $L = H_1(a_1^{t_1}, \dots, a_{d-1}^{t_{d-1}}; A)$ とおく。 $L \cong (a_1^{t_1}, \dots, a_{d-2}^{t_{d-2}}): a_{d-1}^{t_{d-1}} / (a_1^{t_1}, \dots, a_{d-2}^{t_{d-2}})$ で $\ell(yL) < \infty$ であるから, $yL \subseteq H_{\mathfrak{m}}^0(A/(a_1^{t_1}, \dots, a_{d-2}^{t_{d-2}})) \cong H_{\mathfrak{m}}^{d-2}(A)$ (cf. (ロ), $\alpha \cdot H_{\mathfrak{m}}^{d-2}(A) = 0$)。 $\alpha \cdot H_{\mathfrak{m}}^{d-2}(A) = 0$ だから $(a_1, \dots, a_{d-1})L \subseteq y^2 L \subseteq \alpha yL = 0$ 。 [9, (3.4)] により $a_1, \dots, a_{d-1}$ は $u. s. d$ -列 $on A$ である。(注:

(i) を満たせば [9, (3.8)] により (i) を満たし (但し, $\text{ht}(a_1, \dots, a_{d-1}) > 0$ とする), (i) を満たせば (S_{d-2}) だから (ii) を満たす。 ((S_2) だから, $\text{Ass}(A) = \text{Assh}(A)$ である。 ([15, 4.1], [3, 1.1]) また, A は catenary である。これは今までも断らず使っている。) Q.E.D.

$\mathcal{C}$ の元 $a_1, \dots, a_{d-1}$ を (i), (ii), (iii) を満たすようにとり, $\mathcal{C} = (a_1, \dots, a_{d-1})$ とおく。

(3.4) Lemma. (1) $U_A(a_2, \dots, a_{d-1}) = (a_2, \dots, a_{d-1}) : a_1$.

(2) $\text{Supp}(H_1(a_1, \dots, a_{d-1}; A)) = V(\mathcal{C})$.

Proof. (1) $(a_2, \dots, a_{d-1}) = \mathcal{Q}_1 \cap \dots \cap \mathcal{Q}_t$ を最短準素 ideal 分解で $\dim A/\mathcal{Q}_i = 2 \iff i \leq \lambda$ ($1 \leq \lambda \leq t$) なるものとする。 $\sqrt{\mathcal{Q}_i} = \mathcal{P}_i$ とおく。 $\mathcal{P}_i \not\supset a_1$ for $i \leq \lambda$ である。 $\lambda < i \leq t$ とする。 $\dim A_{\mathcal{P}_i} > d-2$ で, $a_2, \dots, a_{d-1}$ は $A_{\mathcal{P}_i}$ の極大正則列であるから, $A_{\mathcal{P}_i}$ は Cohen-Macaulay でない。従って $\mathcal{P}_i \supset \mathcal{C} \ni a_1$ 。 $a_1^n \in \mathcal{Q}_i$ for $\lambda < i \leq t$ となる整数 $n > 0$ をとる。 $a_1, \dots, a_{d-1}$ は u. s. d -列だから $(a_2, \dots, a_{d-1}) : a_1 = (a_2, \dots, a_{d-1}) : a_1^n = \bigcap_{i=1}^t (\mathcal{Q}_i : a_1^n) = \bigcap_{i=1}^t \mathcal{Q}_i = U_A(a_2, \dots, a_{d-1})$.

(2) $\mathcal{P} \in \text{Supp}(H_1(a_1, \dots, a_{d-1}; A))$ をとると, $\mathcal{P} \ni a_1, \dots, a_{d-1}$ で, $a_1, \dots, a_{d-1}$ は $A_{\mathcal{P}}$ のパラメーター系の一部であって $A_{\mathcal{P}}$ -正則列でない。従って $A_{\mathcal{P}}$ は Cohen-Macaulay でない。故に $\mathcal{P} \supset \mathcal{C}$ 。 $\mathcal{P}$ を $\mathcal{C}$ の極小

素idealとする。 $\dim A_{\mathfrak{P}} = d-1$ で、 $a_1, \dots, a_{d-1}$ は $A_{\mathfrak{P}}$ のパラメータ系である。 $A_{\mathfrak{P}}$ は Cohen-Macaulay でないから $a_1, \dots, a_{d-1}$ は $A_{\mathfrak{P}}$ -正則列でない。故に、 $H_1(a_1, \dots, a_{d-1}; A_{\mathfrak{P}}) \neq 0$ で、 $V(\alpha) \subseteq \text{Supp}(H_1(a_1, \dots, a_{d-1}; A))$ となる。 Q.E.D.

(3.5) Lemma. $\text{depth } A = d-1$ のとき,
 $\text{depth } K_A = 3 \iff A/U_A(a_2, \dots, a_{d-1}) \text{ Cohen-Macaulay}.$

Proof. $L = U_A(a_2, \dots, a_{d-1})/(a_2, \dots, a_{d-1})$, $B = A/(a_2, \dots, a_{d-1})$, $C = A/U_A(a_2, \dots, a_{d-1})$ とおく。完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ を得る。 $L = (a_2, \dots, a_{d-1}) : a_1 / (a_2, \dots, a_{d-1}) \cong H_1(a_1, \dots, a_{d-1}; A)$ だから $\dim L = 1$ 。 $\text{depth } B = 1$ だから $\text{depth } L = 1$ 。 C は 2次元で $U_C(0) = 0$ だから、 C は FLC である。完全列 $0 \rightarrow H_m^1(L) \rightarrow H_m^1(B) \rightarrow H_m^1(C) \rightarrow 0$ を得る。各々の $E(A/m)$ -dual を L', B', C' として、完全列 $0 \rightarrow C' \rightarrow B' \rightarrow L' \rightarrow 0$ を得る。 L は 1次元 Cohen-Macaulay であるから、 L' もそうである。 $H_m^1(B) \cong H_m^{d-1}(A)$ である (□), $\alpha \cdot H_m^{d-1}(A)$ から、 $B' \cong H^1(D') \otimes_A \hat{A}$ 。 $\ell(C') < \infty$ であるから、 $\text{depth } K_A = 3 \iff \text{depth } H^1(D') > 0 \iff C' = 0 \iff C \text{ Cohen-Macaulay}$ (cf. (3.2)) となる。 Q.E.D.

(3.6) Corollary. $\text{depth } A = d-1$ かつ $\text{depth } K_A = 3$
 $\iff A/(a_1, \dots, a_{d-1}) \text{ Cohen-Macaulay}.$

Proof. L, B, C は (3.5) の Proof と同じとする。可換図形

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \text{ (完全)} \\ & & \downarrow a_1 & & \downarrow a_1 & & \downarrow a_1 \\ 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \text{ (完全)} \end{array}$$

より, Coker の完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow B/a_1 B \rightarrow C/a_1 C \rightarrow 0$ を得る。
 $B/a_1 B \cong A/(a_1, \dots, a_{d-1})$, $C/a_1 C \cong A/(a_1) + U_A(a_2, \dots, a_{d-1})$ である。
 $\Rightarrow$: (3.5) より C は 2次元 Cohen-Macaulay で $C/a_1 C$ は 1次元 Cohen-Macaulay である。 $L \hookrightarrow B$ で $\text{depth } B = 1$ だから, $\text{depth } L > 0$ 。
 故に $\text{depth } B/a_1 B > 0$ 。
 $\Leftarrow$: $L \hookrightarrow B/a_1 B$ で $\text{depth } B/a_1 B > 0$ だから $\text{depth } L > 0$ 。 $\text{depth } C > 0$ だから $\text{depth } B > 0$ となり $\text{depth } A = d-1$ を得る。 $H_m^1(L) \rightarrow H_m^1(B)$ は単射である。 $H_m^1(B) \cong H_m^{d-1}(A)$ で $a_1 \cdot H_m^{d-1}(A) = 0$ だから $H_m^1(B) \rightarrow H_m^1(B/a_1 B)$ は単射である。故に $H_m^1(L) \rightarrow H_m^1(B/a_1 B)$ は単射である。完全列 $0 = H_m^0(B/a_1 B) \rightarrow H_m^0(C/a_1 C) \rightarrow H_m^1(L) \rightarrow H_m^1(B/a_1 B)$ より, $H_m^0(C/a_1 C) = 0$ を得る。従って $C/a_1 C$ は 1次元 Cohen-Macaulay で, C は 2次元 Cohen-Macaulay である。
 故に, (3.5) より $\text{depth } K_A = 3$ 。 Q.E.D.

(3.7) Lemma. $\text{depth } A = d-1$ とすると, 任意の $c_2, \dots, c_{d-1} \in A$ に対し $a_1, a_2 - c_2 a_1, \dots, a_{d-1} - c_{d-1} a_1$ は (イ), (ロ), (ハ) を満たす。

Proof. $b_1 = a_1$, $b_i = a_i - c_i a_1$ ($i=2, \dots, d-1$) とおく。 $(b_1, \dots, b_{d-1}) = \mathfrak{q}$ であり $\text{ht}(b_1, \dots, b_{d-1}) = d-1$ となる。従って, (イ) は明らかで, (S_{d-2}) だから (ロ) もよい。極大でない素 ideal $\mathfrak{p}$ をとる。 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$ な

らば $A_{\mathcal{F}}$ は Cohen-Macaulay だから $H_i(b_1^{t_1}, \dots, b_{d-1}^{t_{d-1}}; A_{\mathcal{F}}) = 0$ for $\forall t_1, \dots, t_{d-1} > 0$ である。 $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{R}$ ならば $(b_1, \dots, b_{d-1})A_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}A_{\mathcal{F}}$ であるから [9, (7.6) (1) $\Leftrightarrow$ (2)] により $b_1, \dots, b_{d-1}$ は u. s. d -列 on $A_{\mathcal{F}}$ である。従って $\mathcal{F}A_{\mathcal{F}} \cdot H_i(b_1^{t_1}, \dots, b_{d-1}^{t_{d-1}}; A_{\mathcal{F}}) = 0$ for $\forall t_1, \dots, t_{d-1} > 0$ ([9, (3.4)]). 故に $\ell(\mathcal{F} \cdot H_i(b_1^{t_1}, \dots, b_{d-1}^{t_{d-1}}; A)) < \infty$ for $\forall t_1, \dots, t_{d-1} > 0$. $H_i(b_1^{t_1}, \dots, b_{d-1}^{t_{d-1}}; A) \cong (b_1^{t_1}, \dots, b_{d-2}^{t_{d-2}}) : b_{d-1}^{t_{d-1}} / (b_1^{t_1}, \dots, b_{d-2}^{t_{d-2}}) \subset A / (b_1^{t_1}, \dots, b_{d-2}^{t_{d-2}})$ で $\text{depth } A = d-1$ であるから, $\mathcal{F} \cdot H_i(b_1^{t_1}, \dots, b_{d-1}^{t_{d-1}}; A) \subseteq H_m^0(A / (b_1^{t_1}, \dots, b_{d-2}^{t_{d-2}})) = 0$ for $\forall t_1, \dots, t_{d-1} > 0$ となる。従って [9, (3.4)] により, $b_1, \dots, b_{d-1}$ は u. s. d -列 on A である。 Q.E.D.

$$R = \mathcal{R}(A, \mathcal{F}^{d-2}) = \bigoplus_{i \geq 0} (\mathcal{F}^{d-2})^i, \quad N = \mathcal{M}R + R_+ \text{ とおく。}$$

(3.8) Theorem. $\text{depth } A = d-1$ かつ $\text{depth } K_A = 3$ ならば, $i \neq d+1$ に対し $H_N^i(R)$ は有限生成である。

Proof. $A_{\mathcal{M}}$ の代数的閉包を $\bar{k}$ とする。[10, 0(10.3.1)] により A 上平坦な局所環 $\bar{A}$ で $\bar{A}/\mathcal{M}\bar{A} \cong \bar{k}$ となるものが存在する。[12, (3.3)] により $\bar{A}$ は dualizing complex を持ち $A \rightarrow \bar{A}$ は Gorenstein 射である。従って, $\bar{A}$ も (ア), (カ), (サ), (シ) を満たし, $\text{depth } \bar{A} = d-1$, $\text{depth } K_{\bar{A}} = 3$ である。($K_{\bar{A}} \cong K_A \otimes_A \bar{A}$. cf. [2, 4.1]) また, $\bar{A}$ における $\mathcal{R}$ として $\mathcal{R}\bar{A}$ がとれる。 $a_1, \dots, a_{d-1}$ は $\bar{A}$ において (イ), (ロ), (ハ) を満たす。 $\bar{R} = \mathcal{R}(\bar{A}, (\mathcal{F}\bar{A})^{d-2}) \cong R \otimes_A \bar{A}$ は R 上忠実平坦であるから, $\bar{R}$ に対し主張

を示せばよい。従って, $A/\mathfrak{m}$ は代数閉体としてよい。 R は dualizing complex を持ち $\dim R/\mathfrak{p} = d+1$ for $\forall \mathfrak{p} \in \text{Min}(R)$ であるから, 任意の斉次素 ideal $P \neq N$ に対し R_P が Cohen-Macaulay であることを示せばよい。 $P \cap A = \mathfrak{p}$ とおく。 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ のとき。 $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$ ならば $R_{\mathfrak{p}} \cong R(A_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{q}^{d-2}A_{\mathfrak{p}})$ で, これは $a_1, \dots, a_{d-1}$ のとり方より Cohen-Macaulay である。(cf. (2.2)) $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{q}$ ならば $R_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}[T]$ で $A_{\mathfrak{p}}$ が Cohen-Macaulay だから, よい。 $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ とする。 $P \neq R_+$ である。 $(\mathfrak{q}^{d-2})^{d-2} = (a_1^{d-2}, \dots, a_{d-1}^{d-2})(\mathfrak{q}^{d-2})^{d-3}$ だから $\sqrt{R_+} = \sqrt{(a_1^{d-2}T, \dots, a_{d-1}^{d-2}T)}$ であり, $P \not\supseteq a_i^{d-2}T$ for some i となる。 $P \not\supseteq a_1^{d-2}T$ としてよい。 $t = a_1^{d-2}T$, $\tilde{R} = R[1/t]$, $B = \tilde{R}_0$, $\tilde{P} = P\tilde{R}$, $Q = \tilde{P} \cap B$ とおく。 $Q \supseteq \mathfrak{m}B$ である。 $\tilde{R} = B[t, 1/t]$ で, t は B 上代数的独立である。 よって, B_Q Cohen-Macaulay $\Leftrightarrow \tilde{R}_{\tilde{P}}$ Cohen-Macaulay, であるから, B の極大 ideal $M \supseteq \mathfrak{m}B$ に対し B_M が Cohen-Macaulay であることを言えばよい。 $B = \tilde{R}_0 = A[x/a_1^{d-2} \mid x \in \mathfrak{q}^{d-2}] = A[x/a_1 \mid x \in \mathfrak{q}] = A[a_2/a_1, \dots, a_{d-1}/a_1] \subseteq A[1/a_1]$ 。 $A/\mathfrak{m}$ が代数閉体であるから $M = \mathfrak{m}B + (a_2/a_1 - c_2, \dots, a_{d-1}/a_1 - c_{d-1})B$ for some $c_2, \dots, c_{d-1} \in A$ となる。 $b_1 = a_1$, $b_i = a_i - c_i a_1$ ($i=2, \dots, d-1$) とおけば, (3.7) より $b_1, \dots, b_{d-1}$ は (I), (II), (IV) を満たす。 $f \in B$, $b_{i+1}/b_i \cdot f = b_i f_1 + b_2/b_i f_2 + \dots + b_i/b_i f_i$ ($f_1, \dots, f_i \in B$) とする。 $f = x/b_1^n$, $f_i = x_i/b_i^n$ ($x, x_i \in \mathfrak{q}^n$, n は十分大) と書ける。 b_1 は regular だから $b_{i+1}x = b_1^2 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_i x_i$ in A 。 故に $x_1 \in ((b_2, \dots, b_{i+1}) : b_1^2) \cap \mathfrak{q}^n = (b_2, \dots, b_{i+1})\mathfrak{q}^{n-1}$ ([9, (1.2) and (1.3)]) となり, $x_1 = b_2 y_2 + \dots + b_{i+1} y_{i+1}$, $y_i \in \mathfrak{q}^{n-1}$ と書ける。 故に $b_{i+1}(x - b_1^2 y_{i+1}) = b_2(x_2 +$

$b_1^2 y_2 + \dots + b_i (x_i + b_1^2 y_i)$ で $x - b_1^2 y_{i+1} \in (b_2, \dots, b_i; b_{i+1}) \cap \mathcal{O}^n = (b_2, \dots, b_i) \mathcal{O}^{n-1}$ ([9, (1.3)]) となり, $x = b_1^2 y_{i+1} + b_2 z_2 + \dots + b_i z_i$, $z_j \in \mathcal{O}^{n-1}$ と書ける。従って $f = x/b_1^n = b_1 \cdot y_{i+1}/b_1^{n-1} + b_2/b_1 \cdot z_2/b_1^{n-1} + \dots + b_i/b_1 \cdot z_i/b_1^{n-1}$ となり, $b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1$ は B -正則列である。次に $B/(b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B \cong A/(b_1) + U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ を示そう。 $A \rightarrow B/(b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B$ が全射であることは明らかだから, $(b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B \cap A = (b_1) + U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ を示せばよい。 $x \in U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ をとる。(3.4)(1)より $b_1 x = b_2 x_2 + \dots + b_{d-1} x_{d-1}$ と書ける。よって $x = b_2/b_1 \cdot x_2 + \dots + b_{d-1}/b_1 \cdot x_{d-1}$ で $(b_1) + U_A(b_2, \dots, b_{d-1}) \subseteq (b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B$ が判る。 $f \in (b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B \cap A$ をとる。 $f = b_1 f_1 + b_2/b_1 f_2 + \dots + b_{d-1}/b_1 f_{d-1}$, $f_i = x_i/b_1^n$ ($x_i \in \mathcal{O}^n$, n は十分大) と書ける。 b_1 は regular だから $b_1^{n+1} f = b_1^2 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_{d-1} x_{d-1}$ in A 。 $\mathcal{O}^n = (b_1^n) + (b_2, \dots, b_{d-1}) \mathcal{O}^{n-1}$ だから $x_1 = b_1^n y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_{d-1} y_{d-1}$ ($y_2, \dots, y_{d-1} \in \mathcal{O}^{n-1}$) と書ける。故に $b_1^{n+1} f = b_1^{n+2} y_1 + b_2 (x_2 + b_1^2 y_2) + \dots + b_{d-1} (x_{d-1} + b_1^2 y_{d-1})$ で $f - b_1 y_1 \in (b_2, \dots, b_{d-1}) : b_1^{n+1} = (b_2, \dots, b_{d-1}) : b_1 = U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ ([9, (1.2)], (3.4)(1)) となり, $(b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B \cap A \subseteq (b_1) + U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ が判る。(3.5)より $A/U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ は Cohen-Macaulay であり, $A/(b_1) + U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ もそうである。従って $B/(b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B$ が Cohen-Macaulay であり, B_M もそうである。 Q.E.D.

(3.9) Remark. 上の Proof 中の議論は, [8]にあるものと全く同様である。

(3.10) Theorem. A の dualizing complex が存在するとする。

A が (S_{d-2}) で, $\text{depth } A \geq d-1$, $\text{depth } K_A \geq 3$ ならば, A は Gorenstein 環の準同型像である。

Proof. $d \geq 5$, $\text{depth } A = d-1$ としてよい。このとき, $\text{depth } K_A \geq 3$ だから A は FLC でない (cf. [1, Lemma 1]). 従って, A は (7), (8), (9), (10) を満たす。(3.3) の直後でとった $a_1, \dots, a_{d-1}$, 及び (3.8) の直前での R, N を考える。(3.8) により R_N は dualizing complex を持つ FLC な局所環である。従って (1.1) により, R_N は Gorenstein 環の準同型像である。 A は R_N の準同型像であるから, 主張を得る。 Q.E.D.

(3.11) Remark. (1) $d \geq 6$ で, A が (S_{d-2}) で, A の dualizing complex が存在するとする。このとき, A が quasi-Gorenstein (i.e. $K_A \cong A$) ならば, A は Gorenstein である。

(2) $d=5$ で, A が (S_3) で, A の dualizing complex が存在するとする。このとき, A が quasi-Gorenstein ならば, A は FLC で, 従って Gorenstein 環の準同型像である。なお, A 自身が Gorenstein であるとは限らない。

Proof. (1) $\hat{A}$ が Cohen-Macaulay であることを言えばよい。(従

って, dualizing complex の存在の代わりに formal fibre が (S_{d-2}) を仮定すればよい。) $A = \hat{A}$, A non-Cohen-Macaulay とする。(3.1) の Proof より $\dim \operatorname{Hom}_A(H_{\mathfrak{m}}^{d-1}(A), E(A/\mathfrak{m})) \leq 1$ だから, $\operatorname{depth} K_A \leq 3$. (cf. [1, Lemma]). 一方, $K_A \cong A$ だから $\operatorname{depth} K_A \geq d-2 \geq 4$. 矛盾。

(2) FLC でないとする。今の場合, $\text{FLC} \Leftrightarrow A_{\mathfrak{p}}$ Cohen-Macaulay for $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ で, A が (S_3) だから, $\dim A_{\mathfrak{p}} = 4$, $\operatorname{depth} A_{\mathfrak{p}} = 3$ となる素 ideal $\mathfrak{p}$ が存在する。 $A_{\mathfrak{p}}$ は (S_3) だから FLC で $\operatorname{depth} K_A = 2$ となる ([1, Lemma 1]). ところが $K_{A_{\mathfrak{p}}} \cong A_{\mathfrak{p}}$ だから, 矛盾。故に FLC である。(ここまでは, (1) の Proof の括弧内と同様でよい。) 従って (1.1) により A は Gorenstein 環の準同型像である。[7, 1.1] より 5次元 Buchsbaum 完備局所環 $(B, \mathfrak{m})$ で $H_{\mathfrak{m}}^3(B) \neq 0$, $H_{\mathfrak{m}}^i(B) = 0$ for $i \neq 3, 5$ となるものがある。 $A = B \times K_B$ (idealization) とすれば, A は仮定を満たす (cf. [2, 11]) が, Gorenstein でない。 Q.E.D.

(3.12) Remark. $n \geq 5$, $n-2 \leq \lambda < n$, $2 \leq t \leq 3$ なる任意の整数 n, λ, t に対し, 次を満たす局所環 B が存在する: $\dim B = n$, $\operatorname{depth} B = \lambda$, (S_{n-2}) , non-FLC, dualizing complex が存在, $\operatorname{depth} K_B = t$.

なお, $(\lambda, t) \neq (n-1, 3)$ のときには, (3.8) の結果は成立しないようである。

文 献

- [1] Y. Aoyama : *On the depth and the projective dimension of the canonical module*, Japan. J. Math., 6 (1980), 61 ~ 66.
- [2] Y. Aoyama : *Some basic results on canonical modules*, J. Math. Kyoto Univ., 23 (1983), 85 ~ 94.
- [3] Y. Aoyama and S. Goto : *On the endomorphism ring of the canonical module*, Preprint.
- [4] G. Faltings : *Zur Existenz dualisierender Komplexe*, Math. Z., 162 (1978), 75 ~ 86.
- [5] D. Ferrand and M. Raynaud : *Fibres formelles d'un anneau local noethérien*, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. (4), 3 (1970), 295 ~ 311.
- [6] R. Fossum, H.-B. Foxby, P. Griffith and I. Reiten : *Minimal injective resolutions with applications to dualizing modules and Gorenstein modules*, Publ. Math. I. H. E. S., 45 (1975), 193 ~ 213.
- [7] S. Goto : *On Buchsbaum rings*, J. Algebra, 67 (1980), 272 ~ 279.
- [8] S. Goto : *Blowing-up of Buchsbaum rings*, Commutative Algebra: Durham 1981, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 72, Camb. Univ. Press, 140 ~ 162.
- [9] S. Goto and K. Yamagishi : *The theory of unconditioned strong d -sequences with applications to modules having finite local cohomology*, Preprint.
- [10] A. Grothendieck : *Éléments de géométrie algébrique, III (première partie)*, Publ. Math. I. H. E. S., 11 (1961).

- [11] J.E. Hall : *Fundamental dualizing complexes for commutative noetherian rings*, Quart. J. Math. Oxford (2), 30 (1979), 21 ~ 32.
- [12] J.E. Hall and R.Y. Sharp : *Dualizing complexes and flat homomorphisms of commutative noetherian rings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 84 (1978), 37 ~ 45.
- [13] R. Hartshorne : *Residues and duality*, Lect. Notes Math. 20, Springer Verlag, 1966.
- [14] J. Herzog, E. Kunz et al. : *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings*, Lect. Notes Math. 238, Springer Verlag, 1971.
- [15] T. Ogoma : *Existence of dualizing complexes*, J. Math. Kyoto Univ., 24 (1984), 27 ~ 48.
- [16] R.Y. Sharp : *Dualizing complexes for commutative noetherian rings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 78 (1975), 369 ~ 386.
- [17] R.Y. Sharp : *A commutative noetherian ring which possesses a dualizing complex is acceptable*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 82 (1977), 197 ~ 213.
- [18] R.Y. Sharp : *Necessary conditions for the existence of dualizing complexes in commutative algebra*, Sémin. Algèbre P. Dubreil 1977/8, Lect. Notes Math. 740, 213 ~ 229, Springer Verlag, 1979.
- [19] N. Suzuki : *Canonical duality for Buchsbaum modules*, Bull. Dept. Gen. Educ. Shizuoka Coll. Pharmacy, 13 (1984), 47 ~ 60.

'84.9 下旬

'84.10 下旬, 修正

追補. その後, $d=3$ のときに *canonical module* の存在について判明したことがあるので, それを記しておきたい。

(A.1) Lemma. A の *canonical module* が存在するとする。 α が高さ $d-1$ ($d \geq 1$) の *ideal* であれば, A/α は Gorenstein 環の準同型像である。

Proof. $\mathfrak{P}$ を $\hat{A}$ の素 *ideal* $\neq \mathfrak{m}_{\hat{A}}$ で $\alpha \hat{A}$ を含むものとし, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P} \cap A$ とおく。 $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{m}$, $\alpha \in \mathfrak{P}$ で $\text{ht } \mathfrak{P} = d-1$ であるから $\mathfrak{P} \in \text{Supp}(K_A)$ である。(cf. [2, (1.9)]) よって (1.8) の Proof 中の $\dim A/\alpha = 1$ の場合の議論と同様にして主張を得る。 Q.E.D.

Faltings による定理が必要なので, それを述べておく。但し, ここで必要なのは, I が巾零の場合だけである。

(A.2) Lemma ([4, Satz 2]). R を環, I をその *ideal* とし, R が I -進位相で完備だとする。このとき, R/I の *dualizing complex* が存在すれば, R の *dualizing complex* も存在する。

(A.3) Proposition. $d=3$ のとき, A の *canonical module* が存在し, A が *equidimensional* であるならば, A は Gorenstein 環の準同

型像である。

Proof. (2.3)より A の dualizing complex が存在することを言えばよい。そのためには (A.2) により $A/\sqrt{(0)}$ の dualizing complex が存在することを示せばよい。仮定により $\sqrt{(0)} = \sqrt{U}$ であるから、 A/U の dualizing complex が存在することを言えばよい。 $\dim A/U = d$ だから A/U の canonical module が存在する。 $(K_{A/U} \cong K_A)$ である。cf. [2, (1.8)] 従って $U=0$ としてよい。 A が (S_2) なら (1.3) によりよい。 (S_2) でないとしよう。 $H = \text{End}_A(K_A)$ とおく。[2, 3.2] により、 H は A を含む有限生成 A -加群なる 3次元半局所環で、すべての極大素 ideal 鎖は長さ 3 で、 K_A は (H -加群とみて) H の canonical module (i.e. $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec}(H)$, $(K_A)_{\mathfrak{p}}$ は $H_{\mathfrak{p}}$ の canonical module) で、 H は (S_2) である。従って (1.1) の Proof of (c) $\Rightarrow$ (b) と同様の方法で、 H の dualizing complex $I^{\bullet}$ で $I^i = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(H)} E_H(H/\mathfrak{p})$ なるものが存在することが判る。 $Z = \{a \in A \mid aH \subseteq A\}$ とおく。 A は (S_2) でないから [2, Proof of 4.2] により $\text{ht } Z = 2$ である。(A.1)より A/Z は fundamental dualizing complex $J^{\bullet}$ ($J^i = 0$ for $i \neq 2, 3$) を持つ。 $\text{Hom}_H(H/Z, I^{\bullet})$ と $\text{Hom}_{A/Z}(H/Z, J^{\bullet})$ は共に H/Z の fundamental dualizing complex である。(2.3) の Proof 中の議論と同様にして、 $\text{Hom}_H(H/Z, I^{\bullet}) \cong \text{Hom}_{A/Z}(H/Z, J^{\bullet})$ as complexes が判る。 $A \cong H \otimes_{H/Z} A/Z$ である (cf. [15, 3.2]) から、(1.6) により A の dualizing complex が存在する。

Q.E.D.

(A.4) Corollary. $d=3$ のとき, 次は同値である:

- (a) A の canonical module が存在する。
- (b) A/U は Gorenstein 環の準同型像である。 (cf. [2, (1.12)])

(A.5) Proposition. $d=3$ のとき, 次は同値である:

- (a) A は Gorenstein 環の準同型像である。
- (b) A の dualizing complex が存在する。
- (c) 任意の ideal $\alpha (\neq A)$ に対し, A/α の canonical module が存在する。

Proof. (c) $\Rightarrow$ (b) を示せばよい。(cf. (2.3)) $A \supset (0) = U \cap I$ (素分解より) とする。(A.4) により A/U の dualizing complex が存在する。 $\dim A/I \leq 2$ で, A/I の任意の剰余類環は canonical module を持つから, A/I の dualizing complex が存在する。(cf. (1.7)(d) $\Rightarrow$ (b), (1.5)) $A \cong A/U \times_{A/U+I} A/I$ だから (1.6) により主張を得る。 Q.E.D.

(A.6) Remark. (1) [15, Example 2] により, 4次元 (S_2) 局所整域で, 任意の剰余類環は canonical module を持つが, dualizing complex は存在しない, ものがある。

(2) 2次元局所整域で, formal fibre はすべて Gorenstein であるが, canonical module は存在しない, ものがある。(cf. M. Nagata

Local Rings Example 2) 従ってまた, 3次元局所環で, *canonical module* が存在し, *formal fibre* も Gorensteinであるが, *dualizing complex* は存在しない, ものがある。

'84.11.12. 追補

English Summary

A ring will mean a commutative noetherian ring with unit. We consider a conjecture of Sharp on the existence of dualizing complexes. For the definition of dualizing complexes, we refer the reader to [16, (2.4)] and [18]. A ring of finite dimension which is a homomorphic image of a Gorenstein ring has a dualizing complex and a Cohen-Macaulay ring with dualizing complex is a homomorphic image of a Gorenstein ring. (cf. [18])

Sharp conjectured the following

(SC) ([18, (4.4)]). A ring with dualizing complex is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

In this note we treat the local ring case. In the remainder A denotes a d -dimensional local ring with maximal ideal m and $\hat{A}$ denotes the completion. For the notion of the canonical module, we refer the reader to [14] and [2]. We have the implications:
 A is a homomorphic image of a Gorenstein ring $\Rightarrow A$ has a

dualizing complex $\Rightarrow$ A has the canonical module .

Our main results are the following.

THEOREM. Assume that $H_m^i(A)$ is of finite length for $i \neq d$.

Then the following are equivalent:

- (a) A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.
- (b) A has a dualizing complex.
- (c) A has the canonical module.

PROPOSITION. Let $d = 1$. Then the following are equivalent:

- (a) A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.
- (b) A has a dualizing complex.
- (c) A has the canonical module.
- (d) The natural map $A \rightarrow \hat{A}$ is a Gorenstein homomorphism.

PROPOSITION. Let $d = 2$. Then the following are equivalent:

- (a) A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.
- (b) A has a dualizing complex.
- (c) A has the canonical module and the natural map $A \rightarrow \hat{A}$ is a Gorenstein homomorphism.
- (d) Every factor ring of A has the canonical module.

THEOREM. If $d \leq 4$ and A has a dualizing complex, then A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

THEOREM. If A has a dualizing complex, A is (S_{d-2}) , $\text{depth } A \geq d - 1$ and $\text{depth } K \geq 3$ (K is the canonical module of A), then A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

PROPOSITION. If $d \leq 3$, A has the canonical module and A is equidimensional, then A is a homomorphic image of a Gorenstein ring

COROLLARY. Let $d \leq 3$. Then A has the canonical module if and only if $A/U_A(0)$ is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

PROPOSITION. Let $d = 3$. Then the following are equivalent:

- (a) A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.
- (b) A has a dualizing complex.
- (c) Every factor ring of A has the canonical module.

REMARKS. (1) There exists a one-dimensional local domain which does not have the canonical module. ([5])

(2) There exists a two-dimensional local ring which has the canonical module but does not have a dualizing complex. (cf.(1))

(3) There exists a two-dimensional local domain B such that every formal fibre of B is Gorenstein but B does not have the canonical module. (Nagata, Local Rings, Example 2)

(4) There exists a three-dimensional local ring B such that B has the canonical module and every formal fibre of B is Gorenstein but B does not have a dualizing complex. (cf.(3))

(5) There exists a four-dimensional local domain B such that every factor ring of B has the canonical module but B does not have a dualizing complex. ([15, Example 2])