

振れ速度成分の乱流統計則

松本 剛¹

京大 理学研究科 物理学第一教室 流体物理学研究室

1 はじめに

流体が示す乱れた流れ-乱流-の乱れ度合いは際限なく大きくなるように思われる。例えば、台風上陸の直後に河川の橋桁の後流の乱れ度が普段とは桁違いに大きくなっているように見える。降雨量が多ければ、河川にながれこむ水量が増加し、橋桁にあたる流速が増加した結果、後流の乱れ度が増したことになる。このように乱れ度が大きければ大きい程、乱流で顕著になる性質があることが知られている。

こうした性質を示す量の代表例が、乱流の 2 地点間の速度の差を同時刻で観測したもの

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

である。二つの地点 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ を固定し、この 2 点に速度測定機を設置して時刻 $t_1, t_2, \dots, t_n$ と測定を繰り返して、この測定データについて平均を取るものとする。この速度差の $\mathbf{r}$ 方向成分の 2 次モーメント

$$\left\langle \left\{ [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right\}^2 \right\rangle \quad (2)$$

が先にのべた顕著な性質を示す ($\langle \cdot \rangle$ が平均を表す)。乱れが非常に強く、時間的に乱れ度が大きく変化しない場合、2 次モーメントは

$$\left\langle \left\{ [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right\}^2 \right\rangle \propto r^{\zeta_2} \quad (3)$$

と冪的になって、指数 ζ_2 は $2/3$ に近い値になることが知られている。この性質は、1941 年に Kolmogorov が発見的な議論を通じて予測したものであり、特に指数が $\zeta_2 = 2/3$ であると定量的な予測もした。この後に実験によってこの性質が確かめられたが、指数 ζ_2 の値については $2/3$ から 1、2 割程度のずれがあつてよいと現在では考えられている (例えば [1, 2, 3] を参照)。

Kolmogorov はこの 2 次モーメントのような乱流揺らぎの統計量について、空間的に一様かつ等方であり、時間的に定常であると仮定した。一様であるとは統計量が $\mathbf{x}$ に依存しないことで、等方であるとは統計量が地点差ベクトル $\mathbf{r}$ の大きさ $|\mathbf{r}| = r$ だけに依存することであり、定常であるとは統計量が時刻 t に依存しないことである。現在ではこの仮定はほぼ妥当なものと考えられている。

実験や非圧縮 Navier-Stokes 方程式の数値計算を通じて、速度差の p 次モーメントについても冪的な振舞いがあることが示されており、指数 ζ_p の値が測定されている。この指数 ζ_p は低次の指数 (ζ_2 など) で簡単に表現されるものではなく、速度差の確率分布関数が Gauss 分布のような単純なものではないことの証拠となっている。

ここまでは、速度差 $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$ の $\mathbf{r}$ 方向成分を対象としてきたが、空間 3 次元ではこの他に $\mathbf{r}$ を法線とする平面内の速度差成分がある。本研究では、後者の成分の統計について非圧縮 Navier-Stokes 方程式の数値計算を通じて検討する。ここで言う成分分解は任意のものというよりは、非粘性保存量 (Euler 方程式がもつ積分保存量) と関連する成分分解になっていることを後に示す。特に本研究で対象とする「振れ速度成分」は 3 次元 Euler 方程式がもつ保存量であるヘリシティと関係した成分になっている。

¹takeshi@kyoryu.scphys.kyoto-u.ac.jp

2 振れ速度成分とその数値計算による統計

2.1 振れ速度成分

(以下では統計量の定常性を仮定し、速度の時刻依存性は陽に書かないことにする。) 最初に、2 地点の乱流速度ベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ と $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ を $\mathbf{r}$ と $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を基準として次のように成分分解する。一方の速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ は

$$u_L = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad (4)$$

$$u_T = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{x})) \times \mathbf{r}}{|(\mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{x}))||\mathbf{r}|} \quad (5)$$

と分解する。他方の速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ は

$$u_{L'} = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{r}}, \quad (6)$$

$$u_{T'} = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{x})) \times \mathbf{r}}{|(\mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{x}))||\mathbf{r}|}, \quad (7)$$

$$u_{N'} = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{x})|} \quad (8)$$

とする。ここで、 L, T, L', T' 成分はベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ が張る平面内にあるが N' 成分はこの平面に垂直な成分になっている。この $u_{N'}$ が本研究で対象とする「振れ速度成分」である。

次に統計量として 2 地点の乱流速度の i 成分と j 成分の相関テンソル U_{ij} を導入する

$$U_{ij}(r) = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (r = |\mathbf{r}|). \quad (9)$$

ここで i, j はデカルト座標系の x, y, z 成分に対応する添字であり、 $\langle \cdot \rangle$ は集団平均をあらわすものとする。この相関テンソル U_{ij} が一様、等方、定常であるとするとき、等方 2 階テンソルの一般形と、流れ場の非圧縮性 ($\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$) から

$$U_{ij}(r) = U_{TT'}(r) \delta_{ij} + [U_{LL'}(r) - U_{TT'}(r)] \frac{r_i r_j}{r^2} + U_{TN'}(r) \epsilon_{ijk} \frac{r_k}{r}. \quad (10)$$

と表されることが知られている (δ_{ij} は Kronecker のデルタで、 ϵ_{ijk} は Levi-Civita の記号)。ここで

$$U_{LL'}(r) = \langle u_L u_{L'} \rangle, \quad U_{TT'}(r) = \langle u_T u_{T'} \rangle, \quad U_{TN'}(r) = \langle u_T u_{N'} \rangle \quad (11)$$

である (式 (10) については、例えば、文献 [3] の 4.5 節に詳細な議論がある)。この表式 (10) をみると $u_{N'}$ は、 $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ とする鏡像変換で統計量が反対称になる成分に関係していることがわかる。

さて、非圧縮 Euler 方程式がもつ、鏡像変換に関係する保存量としてヘリシティ

$$H = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \, d\mathbf{x} \quad (12)$$

がある ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ は渦度) [4, 1, 3]。実際、渦度場、速度場を Fourier 変換した結果得られるヘリシティスペクトル $H(k)$ と $U_{TN'}$ について

$$H(k) = \int \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}^*(\mathbf{k}) k^2 d\Omega_{\mathbf{k}} = \frac{4k}{\pi} \int_0^\infty r^2 U_{TN'}(r) (\sin kr - kr \cos kr) dr \quad (13)$$

という関係があることが知られている。ここで $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}), \hat{\boldsymbol{\omega}}$ は速度および渦度の Fourier 変換、 $d\Omega_{\mathbf{k}}$ は波数空間での立体角要素である。もう一つの重要な非粘性保存量、運動エネルギーに関連したものについてはエネルギースペクトル $E(k)$ と $U_{LL'}$ の間の関係

$$E(k) = \int \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}) k^2 d\Omega_{\mathbf{k}} = \frac{k^2}{\pi} \int_0^\infty r^2 U_{LL'}(r) \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) dr \quad (14)$$

が知られている。つまり、 $L, T, \dots, N'$ の成分分解は非粘性保存量と対応した構造を持っていることがわかる (L 成分は縦成分 (longitudinal component)、 T 成分は横成分 (transverse component) と呼ばれる)。

粘性が存在する Navier-Stokes 方程式の場合でも、粘性 (動粘性率) ν が十分に小さい、あるいは特徴的な速度スケール U 、空間スケール L で方程式を無次元化した結果にあらわれる Reynolds 数が十分に大きい場合には、非粘性保存量が重要な役割を果たす。ここで、ヘリシティは鏡像反対称に関連する量で、統計量が鏡像対称であればヘリシティはゼロであり揺れ速度成分 $u_{N'}$ は統計的にはゼロということになる。しかしながら、乱流を鏡にうつして、乱れの鏡像と実像があきらかに違うと判明するようなことは普通はないと思われる。例えば、大きな竜巻が乱流を駆動しているような特別な場合には、明確な螺旋構造が流れ場にあつてヘリシティはゼロでない値をとる (ヘリシティの符号が正なら右回りの螺旋、負なら左回りの螺旋になる)。従って、非圧縮 Navier-Stokes 方程式の数値計算で揺れ速度成分 $u_{N'}$ の統計を対象とする際には、有意なヘリシティを生成する特別な乱流の駆動方法 (外力) が必要になる。

2.2 ヘリシティをもつ統計的定常乱流の数値計算

統計的に定常な乱流を数値的に生成するには、非圧縮 Navier-Stokes 方程式に適当な外力 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ を印加する

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (15)$$

本研究では一辺の長さ 2π の立方体内の流れを考え、境界条件は周期境界条件とする。外力の具体形は Fourier 級数展開 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ した際の Fourier 係数を、大スケールに固定して

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t) = c(t) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \quad (0 < |\mathbf{k}| \leq 2.5 \text{ のみで値をもつ}), \quad (16)$$

$$c(t) = \frac{\nu \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)|^2}{\sum_{\mathbf{k}} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)|^2} \quad (17)$$

として与えた。係数 $c(t)$ を上記のように決めると運動エネルギー $K = \sum_{\mathbf{k}} |\hat{\mathbf{u}}|^2 / 2$ を一定値に固定することが可能である (thermostat)。このため、この種の外力は乱流の数値計算でよく使用されるものの一つである。しかし、この外力ではヘリシティを制御することができない。ヘリシティの制御は、この外力とは別に、波数範囲 $0 < |\mathbf{k}| \leq 2.5$ で、速度 Fourier 係数 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ の実部ベクトル (各 x, y, z 成分の実部をぬきだしてつくったベクトル) と虚部ベクトルの成す角度を 90 度に保つことで行った。この数値的方法は人為的ではあるが、低波数におけるヘリシティ注入の制御として働くことが知られている [5]。

以上の外力のもとで格子点数を 512^3 、動粘性率を $\nu = 7.6 \times 10^{-4}$ に固定してスペクトル法、時間発展は 4 次 Runge-Kutta 法を用いて非圧縮 Navier-Stokes 方程式を数値計算した。特に 10 大規模回転時間程度の計算を行い、統計的な定常状態を得た ($Re_\lambda = 150$)。この後半のデータを使って揺れ速度成分の統計を見て行くことにする。

2.3 揺れ速度成分の統計

図 1(a) に各速度 (差) 成分

$$\Delta_r u_L = u_{L'} - u_L, \quad \Delta_r u_T = u_{T'} - u_T, \quad u_{N'} \quad (18)$$

の 2 次モーメントを示す。ここで $u_{N'}$ については定義から $u_N = 0$ であるので差はとらなくてよいことになる。図 1(a) では、非常に小さい (格子間隔幅 $2\pi/512 \simeq 0.012$ 程度) での r でみるとモーメントは r^2 に比例しているが、 $r \simeq 0.5$ あたりの中間スケールではモーメントは冪的な振舞い ($\propto r^q$) をしていることがわかる。さらに立方体のサイズの半分 ($r \simeq \pi$) 程度の大スケールでは中間スケールでの冪的な振舞いとは異なる挙動

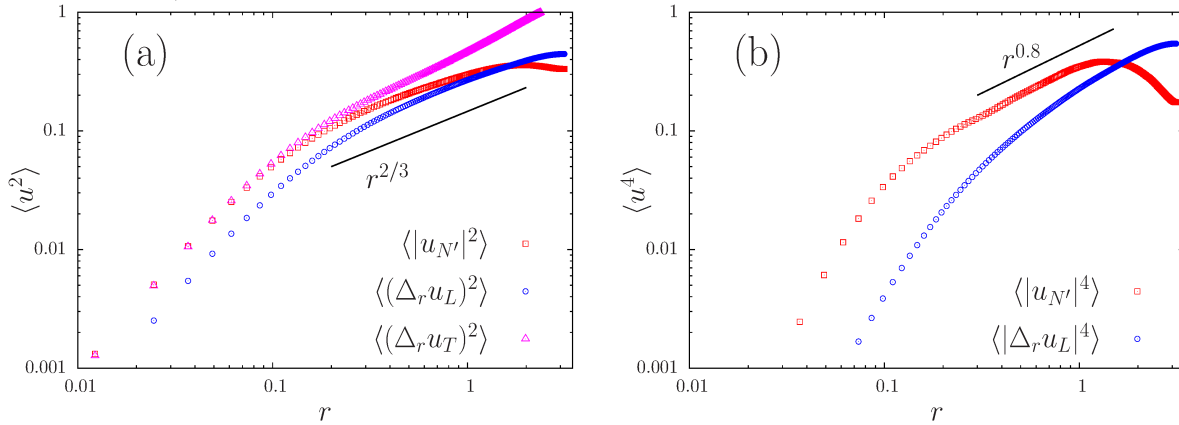


図 1: (a) 各速度差の 2 次モーメントを $r = |r|$ の関数として両対数表示したもの。冪則 $r^{2/3}$ は Kolmogorov scaling を表す。定量的にはわずかであるが、 N' 成分 (振れ成分) の傾き (スケーリング指数) が L, T 成分の差のそれと異っている。(b) L 成分の速度差と N' 成分の 4 次モーメントを $r = |r|$ の関数として両対数表示したもの。冪則 $r^{0.80}$ は N' 成分のスケーリング指数の目安として引いたもの。 N' 成分のスケーリング指数と L 成分差のそれは大きく異っている。

がみられる。この中間スケールの領域は「慣性領域」とよばれ、外力や粘性の影響を受けておらず、非線型効果が純粋にあらわれている領域であると考えられている。ここで、 L, T 成分の速度差のスケーリング指数にはあまり違いがないが、 N' 成分については違いが大きい。図 1(a) の両対数グラフから傾きを読み取ると $\langle u_{N'}^2 \rangle \propto r^{1/2}$ 程度であることがわかる。

次に、 L 成分の速度差と振れ成分 N' の 4 次モーメントを図 1(b) に示す (L, T の相違は小さいので、ここでは L と N' のみを示す)。この 4 次モーメントでは、慣性領域において、 L 成分差と N' 成分のスケーリング指数の相違が大きくあらわれている。これは、 L 成分差の確率分布関数と N' 成分の分布関数を比較したときに、 N' 成分の分布関数の裾があがっていることを示唆する。図 2 で、実際に分布関数を見るとそのように相違があらわれている。また、裾だけでなく分布関数の中心部では、 L, T の分布は一致しているのに大して、 N' の分布が異っていることがわかる。また、分布関数の裾では、 L, T の分布間にもずれがあることがわかる。

3 議論とまとめ

Kolmogorov 以来、乱流の速度差のモーメントの慣性領域におけるスケーリング則は、主に L 成分が研究されてきた。最近では T 成分のスケーリング則も詳細に研究されてきており、 T 成分のスケーリング指数は L 成分の指数と異なるとの結論が得られている (例えば文献 [6])。これらの結果はヘリシティがほぼゼロに近い状態の乱流、あるいはヘリシティが制御されていない乱流についてのものであった。本研究ではヘリシティを制御して、その結果生じる速度成分 (振れ速度成分、あるいは N' 成分) のに注目して、その統計を数値的に調べた。振れ速度成分の 2, 4 次モーメントは慣性領域において L, T 成分差とは異なるスケーリング指数をもつことが数値データから示唆され、分布関数においても有意な相違が認められた。特に $u_{N'} \propto r^{h_n}$ とみたときの Hölder 指数は $u_{L'} - u_L \propto r^h$ のものと比べて $h_n < h \simeq 1/3$ であると示唆される。しかし、定量的に違いを示すためには ν をより小さくして、慣性領域を大きくとった数値計算を行う必要がある。もちろん、このような成分による相違を、乱流の理解のために、いかに活用すべきかという重要な問題が残っている。

謝辞 本研究は科研費基盤 (B) 23340030 の補助のもとに行われました。

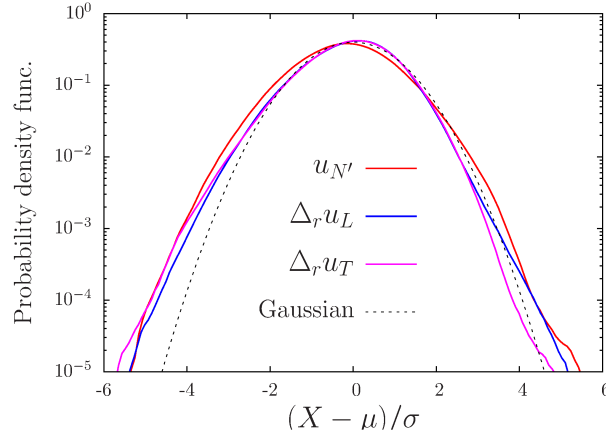


図 2: L, T 成分の速度差と N' 成分の確率分布関数 (参考のために Gauss 分布も示す)。この図では 2 地点差が $r = 0.70$ であり、慣性領域内のスケールである。また、分布関数は平均がゼロ、分散が 1 になるように規格化されている。

参考文献

- [1] U. Frisch, *Turbulence: the legacy of A.N. Kolmogorov*, (Cambridge university press 1996).
- [2] 後藤俊幸, 乱流理論の基礎 (朝倉書店 1998).
- [3] 木田重雄, 柳瀬眞一郎, 乱流力学 (朝倉書店 1999).
- [4] H.K. Moffatt and A. Tsinober, “Helicity in laminar and turbulent flow”, *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, **24**, 281–312 (1992).
- [5] Q. Chen, S. Chen, and G.L. Eyink, “The joint cascade of energy and helicity in three-dimensional turbulence”, *Physics of Fluids*, **15**, 361 (2003).
- [6] R. Grauer, H. Homann, and J.-F. Pinton, “Longitudinal and transverse structure functions in high-Reynolds-number turbulence”, *New Journal of Physics*, **14**, 063016 (2012).