

有限の大きさの中心渦と周囲渦の平衡解とその安定性

京都大学大学院情報学研究科(Graduate School of Informatics, Kyoto University)

野本 貴志(Takashi Nomoto)・船越 満明(Mitsuaki Funakoshi)

1 はじめに

本研究では、2次元非圧縮非粘性流体中の渦を考える。渦力学の研究においては、一定の角速度あるいは速度で回転又は並進する点渦の様々な平衡配置が知られている。これらの平衡配置の1つが半径 r の円周上に等間隔に配置された N 個の循環 Γ の点渦とその中心に置かれた循環 Γ_0 の点渦から成る系である。この系は中心渦の周りを角速度 $\Omega = \frac{2\Gamma_0 + (N-1)\Gamma}{4\pi r^2}$ で回転する。図1はこの平衡配置の例を表している。

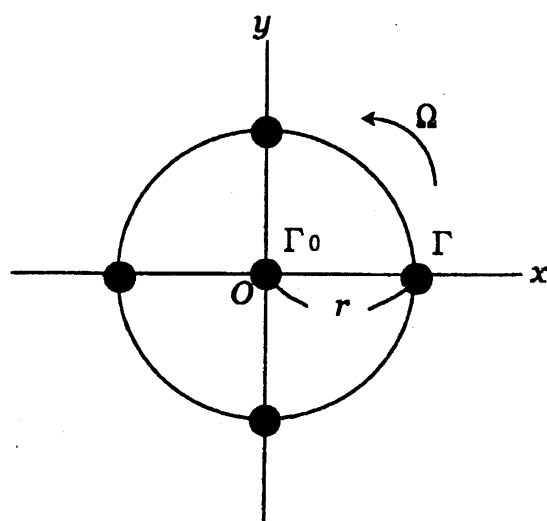


図 1: 点渦の平衡配置 ($N = 4$)

Thomson[1] は中心渦がない場合において、 $2 \leq N \leq 6$ に対してこの系が安定であることを示した。Morikawa & Swenson[2] は中心渦が存在する場合において、 $\frac{\Gamma_0}{\Gamma}$ のある範囲においてのみ、この系が安定であることを数値計算により示した。そして、この $\frac{\Gamma_0}{\Gamma}$ の範囲の下限値 $f(N)$ と上限値 $g(N)$ を $2 \leq N \leq 15$ に対して数値的に求めた。Mertz[3] は

$f(N)$ を解析的に求め、それが次の形で表せることを示した。

$$f(N) = \begin{cases} -\infty, & (N = 2, 3), \\ \frac{1}{16}(N^2 - 8N + 8), & (4 \leq N; N: \text{偶数}), \\ \frac{1}{16}(N-1)(N-7), & (5 \leq N; N: \text{奇数}) \end{cases}$$

Campbell[4] は $g(N)$ が次の形になることを解析的に示した。

$$g(N) = \begin{cases} -1.25, & (N = 2), \\ \frac{1}{4}(N-1)^2, & (3 \leq N) \end{cases}$$

定常に回転又は並進する点渦から成る上述の系は、有限の大きさを持つ渦から成る系に拡張される。一様渦度を持つ渦の回転又は並進座標系での平衡形（形が不変）は約 20 年間調べられてきた。反対符号の並進する 2 つの対称渦の平衡形が Pierrehumbert[5] によって調べられた。彼はまた、平衡形の計算に対する効率的な数値計算法を見つけた。さらに、Dritschel[6] は $2 \leq N \leq 8$ に対して、角度 $\frac{2\pi}{N}$ の回転に関して対称な一様渦度を持つ N 個の渦（中心渦がなく、周囲渦のみ）の平衡形とその安定性を数値的に求めた。

本研究では、中心渦と N 個の周囲渦からなる系の平衡形とその安定性について調べる。具体的には、 $N = 5$ で中心渦と周囲渦の面積が等しい場合について調べる。

2 平衡形を決定する方程式の導出

2.1 流れ関数と渦度

以下では無限領域を考え、 (x, y) をデカルト座標とする。流体の速度を $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ とすると、連続の式

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

から、流れ関数 Ψ を用いて、 (u_x, u_y) は次のように書ける。

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.2)$$

渦度を $\omega = (0, 0, \omega)$ とすると

$$\nabla^2 \Psi(x, y) = -\omega(x, y) \quad (2.3)$$

が得られる。ここで ∇^2 はラプラス演算子である。これを解くと

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int \int_D \omega(x', y') \log r^2 dx' dy', \quad (r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2) \quad (2.4)$$

が得られる。但し、 D は渦度の 0 でない領域を表す。

2.2 平衡形を決定する方程式

図2で示されるような中心渦と N 個の周囲渦の平衡形を考える。中心渦の番号を 0 とし、周囲渦の番号を x 軸の正の方向上のものから反時計回りに $1, 2, \dots, N$ とする。中心渦と周囲渦からなる系全体が、原点に関する角度 $\frac{2\pi}{N}$ の回転に対して対称であると仮定する。そして、中心渦と周囲渦の渦度をそれぞれ ω_0, ω_1 とし、それらは一様であると仮定する。渦の形を特徴付ける幾何学的パラメータとして、 a_0, a_1, a_2 を導入する。ここで、 a_0 は中心渦の境界が x 軸の正の部分と交わる点と原点との距離である。また、 a_1, a_2 はそれぞれ、周囲渦と原点との最も近い距離、最も遠い距離である。さらに、 $g_0(\alpha)$ は、原点周りの角度 α での中心渦境界までの動径方向の距離である。また、 $h_0(\beta)$ は 1 番目の周囲渦に対する点 $(\frac{1}{2}(a_1 + a_2), 0)$ 周りの角度 β での渦境界までの動径方向の距離である。以下では、 $g_0(\alpha), h_0(\beta)$ が共に一価関数であり、 $h_0(\beta) = h_0(-\beta)$ が満たされる場合を考える。

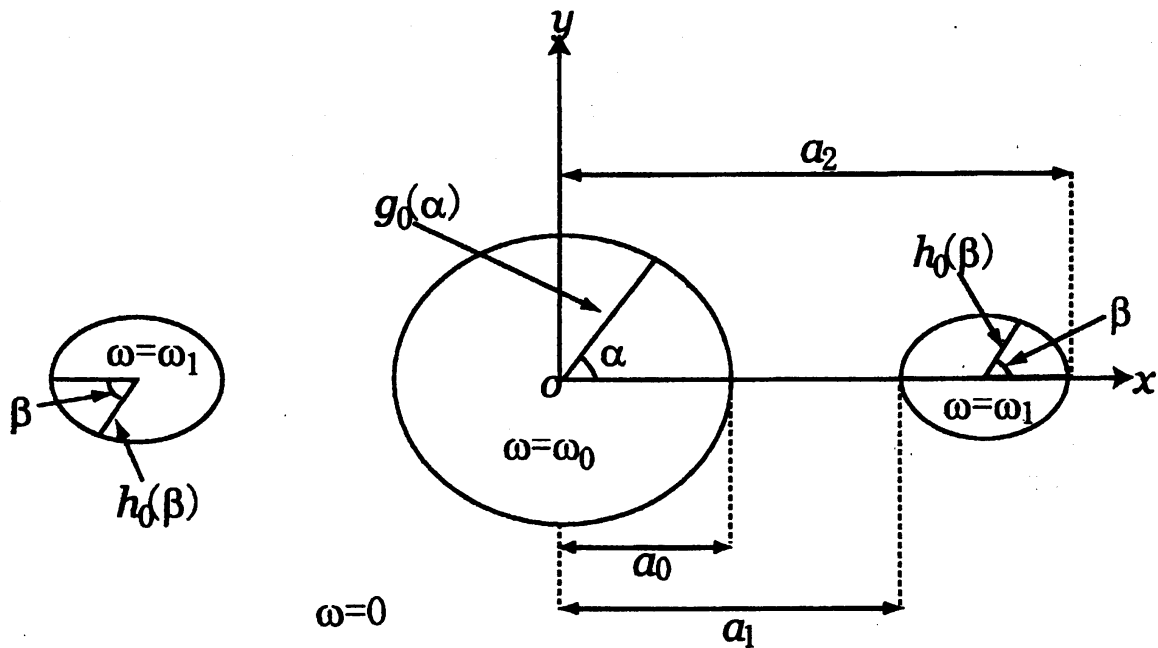


図 2: 中心渦と周囲渦に関するパラメータ ($N = 2$)

$\Psi_0(g_0(\alpha), \alpha), \Psi_1(h_0(\beta), \beta)$ をそれぞれ、角度 α, β の位置での中心渦、周囲渦の境界上の流れ関数の値とすると、それらは境界の形、渦度を含む積分を用いて表される。そして、平衡形となる条件は、角速度 Ω で回転する回転座標系での渦の境界上での流れ関数の値が一定、即ち

$$D_0 = \Psi_0(g_0(\alpha), \alpha) + \frac{1}{2}\Omega g_0^2(\alpha), \quad (2.5)$$

$$D_1 = \Psi_1(h_0(\beta), \beta) + \frac{1}{2}\Omega(r_0^2 + h_0^2(\beta) + 2r_0h_0(\beta)\cos\beta) \quad (2.6)$$

$$D_0, D_1 = \text{const.} \quad (2.7)$$

が成り立つことである。但し、 $r_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ である。式(2.7)は $g_0(\alpha), h_0(\beta)$ に関する非線形連立積分方程式となる。これを解くことができれば、角速度 Ω は

$$\Omega = 2 \frac{\Psi_1\left(\frac{1}{2}(a_2 - a_1), \pi\right) - \Psi_1\left(\frac{1}{2}(a_2 - a_1), 0\right)}{a_2^2 - a_1^2} \quad (2.8)$$

から求まる。

次に、この系の無次元化を考える。 a_2, ω_1 を使って、各変数を無次元化すると、系を特徴付けるパラメータは次の4つとなる。

$$a_0^* = \frac{a_0}{a_2}, \quad a_1^* = \frac{a_1}{a_2}, \quad \omega_0^* = \frac{\omega_0}{\omega_1}, \quad N$$

2.3 数値計算法

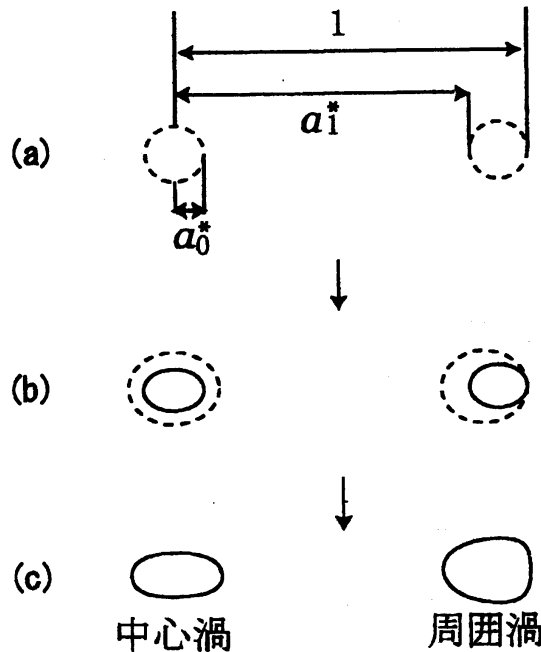


図 3: 各 a_0^*, a_1^* に対する初期形状の決定法 (点線: 初期形状、実線: 平衡形)

平衡形の計算においては反復法を用いた。図3において、点線は反復の初期形状、実線は得られた平衡形を表す。 a_0^* が十分に小さく、 a_1^* が十分1に近いときは、平衡形はほ

ほぼ円形に近いと考えられるので、図 3(a) に表されるように、初期形状として円形を与える。そして、反復計算によって、例えば図 3(b) の実線で表される平衡形を得る。さらに、図 3(b) の破線で示されるような、実線の平衡形の単純な拡大によって得られる形を、 a_0^* が少し大きく、 a_1^* が少し小さい場合の初期形状とする。その結果、反復計算によって、例えば図 3(c) の平衡形を得る。この手順を繰り返し、少しずつ渦を大きくしていくことによって、かなり大きな渦の平衡形も得ることができる。

3 安定性解析の定式化

以下では無次元化変数を用いて記述する。摂動を加えた後の中心渦と $k(k = 1, \dots, N)$ 番目の周囲渦の境界の形を次の関数形で与えられるとする。

$$g(\alpha, t) = g_0(\alpha) + g'(\alpha, t), \quad (3.1)$$

$$h_k(\beta, t) = h_0(\beta) + h'_k(\beta, t), \quad (k = 1, \dots, N) \quad (3.2)$$

但し、 t は時間を表す。中心渦と周囲渦の境界の動きを決める方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial g(\alpha, t)}{\partial t} + \frac{\tilde{u}_\theta(\alpha, t)}{g(\alpha, t)} \frac{\partial g(\alpha, t)}{\partial \alpha} = \tilde{u}_r(\alpha, t), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial h_k(\beta, t)}{\partial t} + \frac{\tilde{v}_\theta^k(\beta, t)}{h_k(\beta, t)} \frac{\partial h_k(\beta, t)}{\partial \beta} = \tilde{v}_r^k(\beta, t), \quad (k = 1, \dots, N) \quad (3.4)$$

ここで、 $\tilde{u}_\theta, \tilde{u}_r$ は、角速度 Ω で回転する回転座標系における、中心渦の境界上でのそれぞれ周方向、動径方向の速度を表し、また $\tilde{v}_\theta^k, \tilde{v}_r^k$ は、回転座標系での k 番目の周囲渦の境界上での点 $(r_0 \cos \frac{2\pi}{N}(k-1), r_0 \sin \frac{2\pi}{N}(k-1))$ に関するそれぞれ周方向、動径方向の速度を表す。そして、式 (3.1), (3.2) の摂動 $g'(\alpha, t), h'_k(\beta, t)$ を、次の形に仮定する。

$$g'(\alpha, t) = \hat{g}(\alpha) \exp(\sigma t), \quad (3.5)$$

$$h'_k(\beta, t) = \hat{h}_k(\beta) \exp(\sigma t), \quad (k = 1, \dots, N; \sigma: \text{複素数}) \quad (3.6)$$

さらに、関数 $\hat{g}(\alpha)$ と $\hat{h}_k(\beta)$ を次の形に展開する。

$$\hat{g}(\alpha) = g_0(\alpha) \sum_{m=1}^M D_m^0 \phi_m(\alpha), \quad (3.7)$$

$$\hat{h}_k(\beta) = h_0(\beta) \sum_{m=1}^M D_m^k \phi_m(\beta), \quad (k = 1, \dots, N) \quad (3.8)$$

ここで、 $\phi_m(m = 1, \dots, M)$ は、次式で定義される正規直交関数系である。

$$(\phi_1, \dots, \phi_M) = \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \theta, \cos 2\theta, \dots, \cos P\theta, \sin \theta, \sin 2\theta, \dots, \sin P\theta \right)$$

但し、 $M = 2P + 1$ は打ち切りの次数であり、 $D_m^k (k = 0, \dots, N; m = 1, \dots, M)$ は展開における係数である。次に、回転座標系における中心渦、 k 番目の周囲渦の境界上での速度ベクトルを表す $\tilde{u}(\alpha), \tilde{v}^k(\beta)$ は、次の形に書き表すことができる。

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\alpha) &= \tilde{u}_0 + \hat{u} \exp(\sigma t), \\ \tilde{v}^k(\beta) &= \tilde{v}_0^k + \hat{v}^k \exp(\sigma t)\end{aligned}$$

ここで $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0^k$ は、回転座標系における平衡形のそれぞれ中心渦、 k 番目の周囲渦の境界上での速度ベクトルを表す。そして

$$\gamma_0(\alpha) = \frac{\hat{g}(\alpha)}{g_0(\alpha)}, \quad (3.10)$$

$$\gamma_k(\beta) = \frac{\hat{h}_k(\beta)}{h_0(\beta)}, \quad (k = 1, \dots, N) \quad (3.11)$$

とおくと、式 (3.3), (3.4) は以下のようになる。また

$$\sigma \gamma_0(\alpha) = -\frac{\tilde{u}_{\theta 0}(\alpha) d\gamma_0(\alpha)}{g_0(\alpha) d\alpha} - \frac{\tilde{u}_{x0}\hat{u}_y - \tilde{u}_{y0}\hat{u}_x}{g_0(\alpha)\tilde{u}_{\theta 0}}, \quad (3.12)$$

$$\sigma \gamma_k(\beta) = -\frac{\tilde{v}_{\theta 0}(\beta) d\gamma_k(\beta)}{h_0(\beta) d\beta} - \frac{\tilde{v}_{x0}^k\hat{v}_y^k - \tilde{v}_{y0}^k\hat{v}_x^k}{h_0(\beta)\tilde{v}_{\theta 0}}, \quad (k = 1, \dots, N) \quad (3.13)$$

ここで、 $\tilde{u}_{\theta 0}$ は回転座標系における平衡形での中心渦の境界上での原点に関する周方向の速度を表し、 $\tilde{v}_{\theta 0}$ は回転座標系における平衡形での周囲渦の境界上での点 $(r_0 \cos \frac{2\pi}{N}(k-1), r_0 \sin \frac{2\pi}{N}(k-1))$ に関する周方向の速度を表す。また $\tilde{u}_0 = (\tilde{u}_{x0}, \tilde{u}_{y0})$, $\hat{u} = (\hat{u}_x, \hat{u}_y)$, $\tilde{v}_0^k = (\tilde{v}_{x0}^k, \tilde{v}_{y0}^k)$, $\hat{v}^k = (\hat{v}_x^k, \hat{v}_y^k)$ は、各ベクトルの (x, y) 成分を表す。

ここで、式 (3.7), (3.8) の展開の有限項での打ち切りによる式 (3.12), (3.13) の残差 ϵ_0, ϵ_k を、以下のように定義する。

$$\epsilon_0(\alpha) = \sigma \gamma_0(\alpha) + \frac{\tilde{u}_{\theta 0}(\alpha) d\gamma_0(\alpha)}{g_0(\alpha) d\alpha} + \frac{\tilde{u}_{x0}\hat{u}_y - \tilde{u}_{y0}\hat{u}_x}{g_0(\alpha)\tilde{u}_{\theta 0}}, \quad (3.14)$$

$$\epsilon_k(\beta) = \sigma \gamma_k(\beta) + \frac{\tilde{v}_{\theta 0}(\beta) d\gamma_k(\beta)}{h_0(\beta) d\beta} + \frac{\tilde{v}_{x0}^k\hat{v}_y^k - \tilde{v}_{y0}^k\hat{v}_x^k}{h_0(\beta)\tilde{v}_{\theta 0}}, \quad (k = 1, \dots, N) \quad (3.15)$$

そして、Galerkin 法を適用して

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \epsilon_0(\alpha) \phi_n(\alpha) d\alpha &= 0, \quad \int_0^{2\pi} \epsilon_k(\beta) \phi_n(\beta) d\beta = 0, \\ (n &= 1, \dots, M, k = 1, \dots, N)\end{aligned} \quad (3.16)$$

が満たされる必要があるとする。以上より、正規直交関数系 $\phi_m (m = 1, \dots, M)$ の係数 $D_1^0, \dots, D_M^N$ に関する、次の方程式系が得られ、平衡形の線形安定性問題は次の固有値

問題に帰着される。

$$\sigma \begin{pmatrix} D_1^0 \\ D_2^0 \\ \vdots \\ D_M^0 \\ D_1^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ D_M^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}^{00} & K_{21}^{00} & \cdots & K_{M1}^{00} & K_{11}^{10} & \cdots & \cdots & K_{M1}^{N0} \\ K_{12}^{00} & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & & \\ K_{1M}^{00} & \cdots & \cdots & K_{MM}^{00} & & & & \\ K_{11}^{01} & \cdots & & & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ K_{1M}^{0N} & \cdots & & & & & & K_{MM}^{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^0 \\ D_2^0 \\ \vdots \\ D_M^0 \\ D_1^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ D_M^N \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

ここで、右辺の行列の各成分 $K_{11}^{00}, \dots, K_{MM}^{NN}$ は平衡形を表す関数 $g_0(\alpha), h_0(\beta)$ と ω_0^* を用いて表される。

4 結果

S_1, S_2 をそれぞれ、中心渦、周囲渦1つの面積とする。本研究では、周囲渦の数 N を5に固定し、 $\frac{S_2}{S_1}$ を1に固定する。 $S_1 = S_2$ なので、周囲渦の循環に対する中心渦の循環の比 Γ_0^* は ω_0^* となる。§1で紹介された研究から、中心の点渦と5つの周囲の点渦からなる系は $-0.5 \leq \Gamma_0^* \leq 4$ であるときのみ安定であることが分かっている。それゆえに、有限の大きさの中心渦と5つの周囲渦からなる系は $-0.5 \leq \omega_0^* \leq 4$ であるときのみ安定となり得る。というのも、点渦系が不安定ならば、有限の大きさを持つ渦領域からなる同様の系は、周方向の波数1の摂動に対して必ず不安定になるからである。そこで $-0.5 \leq \omega_0^* \leq 4$ に対して、渦の平衡形とその安定性を調べる。以下では、 S_1 を S と書くことにする。

4.1 平衡形

図4は $\omega_0^* = -0.5, 0.01, 1$ に対して、異なる面積を持ついくつかの渦の平衡形を重ねて示したものである。 S が十分に小さいとき、 ω_0^* の値に関わらず、全ての渦はほぼ円形である。そして、図4(a)に例示したように、 ω_0^* が負かつ $|\omega_0^*|$ が大きいときには、十分に大きい S に対して、中心渦はほぼ円形であるが、周囲渦は隣接した周囲渦に最も近い2点で最大曲率を持つ形となる。しかし、図4(c)に例示したように、 ω_0^* が正かつ $|\omega_0^*|$ が大きいときには、十分に大きい S に対して、中心渦はほぼ円形のままであるが、周囲渦は中心渦に最も近い点で最大曲率を持つ形となる。なお、図4(b)に示したように、 $|\omega_0^*|$ が小さいときには、十分に大きい S に対して、中心渦は周囲渦に最も近い点で最小曲率を持つ形へとかなり変形し、周囲渦は隣接した周囲渦に最も近い2点で最大曲率を持つ形となる。

4.2 安定性

点渦系の安定性に関する結果から、有限の大きさを持つ中心渦と5つの周囲渦からなる系は、 S が十分に小さければ、 $-0.5 < \omega_0^* < 4$ に対して安定であることが予想される。式(3.17)の全ての固有値 σ の最大実部を R とすると、いくつかの ω_0^* に対する a_0^* と R の関係は図5のようになる。図5(a),(c)から分かるように、 $\omega_0^* = -0.5, 4$ に対しては、 a_0^* が0に近いとき、 R も0に近く、全ての正の a_0^* に対して R は正である。一方、図5(b)で示されているように、 ω_0^* の値が -0.5 と 4 の間にあるときは、 a_0^* を0から増やしていくと、ある正の a_0^* の値で R が0から正に変わって、系が不安定化する。図5(b)の $\omega_0^* = 1$ の場合は、 $a_0^* = 0.201$ で不安定化する。そこで、系が不安定化する時の各渦領域の面積を S_u とすると、 ω_0^* と S_u の関係は図6のようになる。この図から、 ω_0^* が0に近いとき、 S_u の値が最も大きいことが分かる。

5 結論

半径 r の円周上に等間隔に配置された N 個の循環 Γ の点渦とその中心に置かれた循環 Γ_0 の点渦からなる系は中心渦の周りを一定角速度で回転することが広く知られている。本研究では、 $N = 5$ に対して、有限の大きさで、一様渦度の渦領域からなる同様な系の平衡形を計算し、その安定性を調べた。但し、中心渦と周囲渦1つの面積は等しいと仮定し、循環比 $\Gamma_0^* = \frac{\Gamma_0}{\Gamma}$ の値は、対応する点渦系が安定である $-0.5 \leq \Gamma_0^* \leq 4$ の範囲に選んだ。その結果、次のことが分かった。各渦の面積 S が十分に小さいときには、 Γ_0^* の値に関わらず、全ての渦の平衡形はほぼ円形である。しかし、 S が十分に大きいときには、平衡形は円形から大きく変形する。即ち、 Γ_0^* が負、又は Γ_0^* が正で小さいときには、周囲渦は隣接した周囲渦に最も近い2点で最大曲率を持つ形となる。しかし、 Γ_0^* が正で大きいときには、周囲渦は中心渦に最も近い点で最大曲率を持つ形となる。なお、一般に中心渦は S が大きくても円形からのずれは小さいが、 $|\Gamma_0^*|$ が小さいときだけは、周囲渦に最も近い点で最小曲率を持つ形へとかなり変形する。また、平衡形の渦からなる系の安定性解析から、 $-0.5 \leq \Gamma_0^* \leq 4$ に対しては、 S がある値 S_u を超えると、この系は不安定となり、 Γ_0^* が0に近いとき、 S_u の値が最も大きいということが分かる。

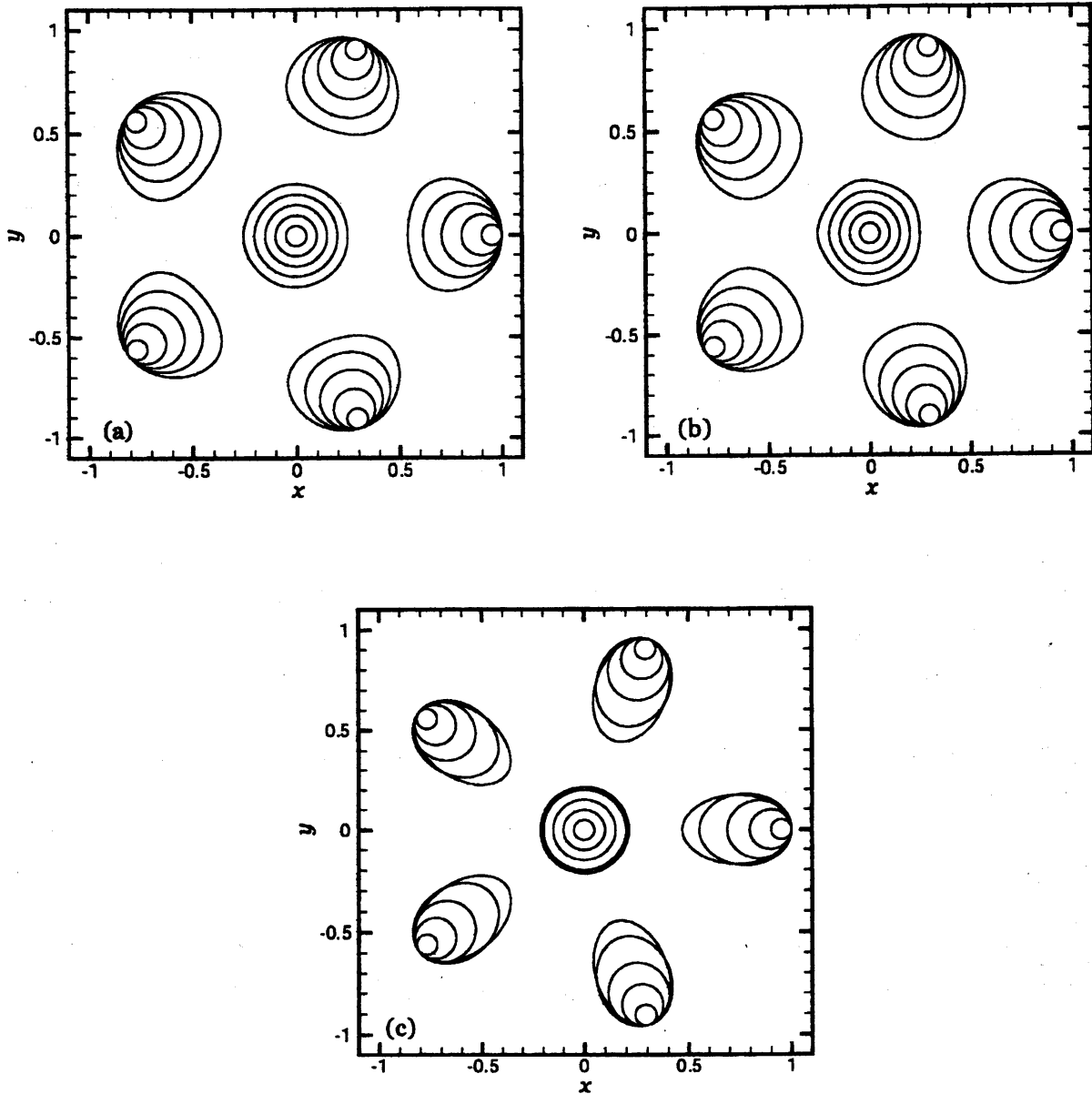


図 4: 渦の平衡形 (a) $\omega_0^* = -0.5$, a_0^* と a_1^* の値は、内側から順に 0.05 と 0.9001, 0.1 と 0.8012, 0.15 と 0.7051, 0.2 と 0.6154, 0.25 と 0.5407, (b) $\omega_0^* = 0.01$, a_0^* と a_1^* の値は、内側から順に 0.05 と 0.9000, 0.1 と 0.7997, 0.15 と 0.6990, 0.2 と 0.5967, 0.25 と 0.4914, (c) $\omega_0^* = 1$, a_0^* と a_1^* の値は、内側から順に 0.05 と 0.8997, 0.1 と 0.7973, 0.15 と 0.6882, 0.2 と 0.5518, 0.25 と 0.4700

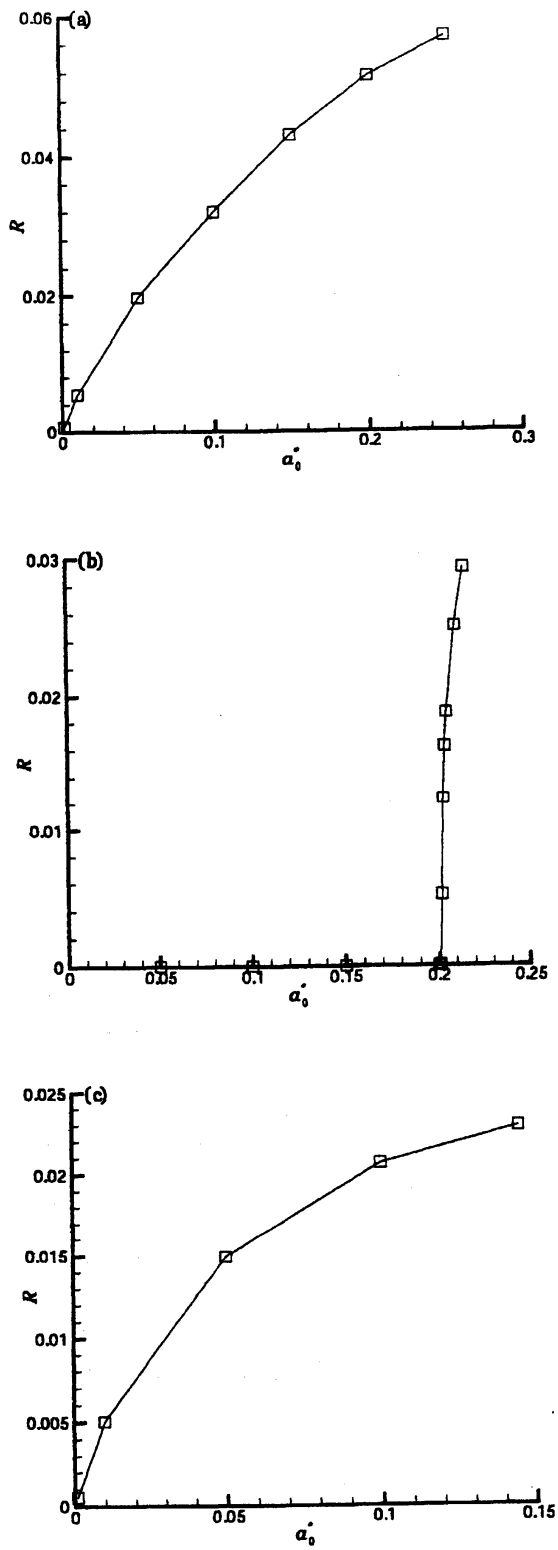


図 5: a_0^* と R の関係 (a) $\omega_0^* = -0.5$, (b) $\omega_0^* = 1$, (c) $\omega_0^* = 4$

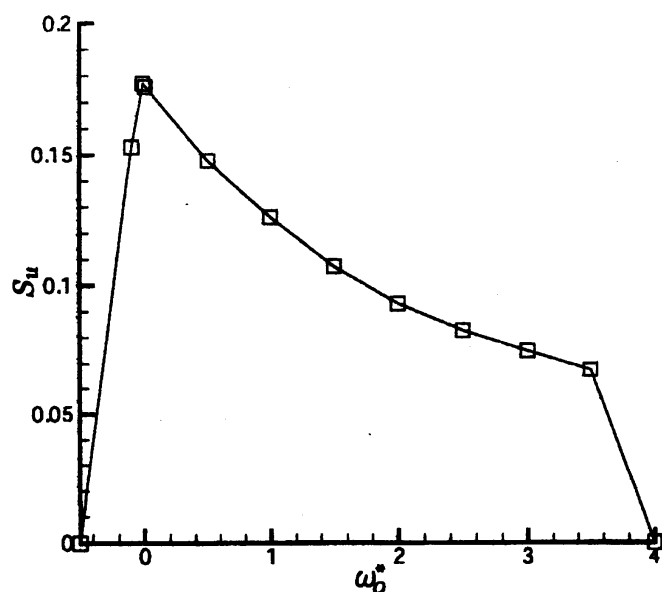


図 6: ω_0^* と S_u の関係

参考文献

- [1] J. J. Thomson: A treatise on the motion of vortex rings, 94-108, Macmillan, (1883).
- [2] K. Morikawa and E. V. Swenson: Interacting motion of rectilinear geostrophic vortices, *Phys. Fluids* **14**, 1058-1073, (1971).
- [3] G. J. Mertz: Stability of body-centered polygonal configurations of ideal vortices, *Phys. Fluids* **21**, 1092-1095, (1978).
- [4] L. J. Campbell: Transverse normal modes of finite vortex arrays, *Phys. Rev. A* **24**, 514-534, (1981).
- [5] R. T. Pierrehumbert: A family of steady, translating vortex pairs with distributed vorticity, *J. Fluid Mech.* **99**, 129-144, (1980).
- [6] D. G. Dritschel: The stability and energetics of corotating uniform vortices, *J. Fluid Mech.* **157**, 95-134, (1985).