

ミラー対称性とトーリック del Pezzo 曲面

植田 一石

正則関数の孤立臨界点に対し、その Milnor ファイバーの中間次元のホモロジー群と交叉形式の組を Milnor 格子と呼ぶ。例えば単純特異点の Milnor 格子は、対応する Lie 環のルート格子になる。[46] 及びその参考文献を見よ。

深谷圏は Milnor 格子の圏論化 (categorification) であり、消滅サイクルを単にホモロジー類としてではなく、Lagrange 部分多様体と見ることによって、より深い情報を引き出す。ここで言う圏論化とは、この圏の Grothendieck 群に Euler pairing を入れたものが Milnor 格子を与えることを指す。

特別な正則関数 W に対しては、 W の有向深谷圏の導来圏が W から決まるある複素射影多様体 X の接続層の導来圏と同値になるという不思議な現象が我々の主定理 (定理 4.4) である。その応用として、この X の Gromov-Witten 不変量から決まるモノドロミー保存変形の Stokes 行列と X の接続層の導来圏の特別な生成元の間の Ext の Euler 数との関係 (定理 4.3) を得る。

1 有理曲線の数え上げ

整数 n と d に対し、射影平面 $\mathbb{P}^2$ の一般の位置にある n 点を通る次数が d の有理曲線が何本あるかというのは数え上げ幾何学の興味深い問題である。例えば次数 d が 1 だと、本数が数えられるためには n は 2 でなければならず、この時異なる 2 点を通る 1 次曲線は 1 本しかない。次数が 2 でも、一般の 5 点を通る 2 次曲線はちょうど 1 本である。面白くなるのは次数が 3 以上の場合で、例えば次数が 3 の曲線は滑らかだと種数が 1 になって有理曲線ではなくなるので、有理曲線になるためには特異点が必要である。ここで、特異点としては通常二重点だけを考えることにする。すると、3 次曲線が有理的になるには通常二重点が 1 つ必要なことが分かり、それに伴って 3 次曲線のパラメーターの個数が一般の場合の 9 から 1 つ減って 8 になる。従って、本数を数えるには 8 個の点を指定すればいいことになり、問題は次のようになる：

問題 1.1. $\mathbb{P}^2$ の一般の 8 点を通る nodal cubic の本数を求めよ。

これは次のようにして 12 本であることが分かる： $\mathbb{P}^2$ の斉次座標を $[x_0 : x_1 : x_2]$ とする。8 点が一一般の位置にあるので、適当な 3 次式 $f(x_0, x_1, x_2)$, $g(x_0, x_1, x_2)$ が存在して、上の 8 点を通る任意の 3 次式 $F(x_0, x_1, x_2)$ は $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を用いて

$$F(x_0, x_1, x_2) = \lambda f(x_0, x_1, x_2) + \mu g(x_0, x_1, x_2)$$

と表される。この F で定義される曲線が通常二重点を持つための条件は

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, x_1, x_2) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad 0 \leq i \leq 2$$

を満たす $[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2$ が存在することである。そのような λ, μ が存在するための必要十分条件は、3行2列の行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0} & \frac{\partial g}{\partial x_0} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

の階数が2未満になる様な $[x_0 : x_1 : x_2]$ が存在することであるが、これは

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0} & \frac{\partial g}{\partial x_0} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0} & \frac{\partial g}{\partial x_0} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial g}{\partial x_0} \right) \neq (0, 0) \quad (1)$$

と同値である。ただし、最初の8点が一般の点にあって、上の行列の階数が落ちる点と、 $(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial g}{\partial x_0}) = (0, 0)$ となる点が一致しないと仮定した。(1)の左の条件を満たす $[x_0 : x_1 : x_2]$ は2つの4次式の交点なので16個あり、そのうちで(1)の右の条件を満たさないものは2つの2次式の交点なので4つある。従って、 $\mathbb{P}^2$ の一般の8点を通る nodal cubic は $16 - 4 = 12$ 本である。より一般に、

$$\begin{aligned} (d \text{ 次曲線のパラメーターの数}) &= \frac{(d+2)(d+1)}{2} - 1, \\ (\text{滑らかな } d \text{ 次曲線の種数}) &= \frac{(d-1)(d-2)}{2} \end{aligned}$$

であり、さらに曲線の通常二重点の個数が1つ増えるごとにパラメーターの数と種数が1つずつ下がるので、次数 d の曲線の種数が零になるためには通常二重点が $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ 個必要で、この時パラメーターの数は $3d - 1$ 個になる。従って、本数を数えるには $3d - 1$ 個の点を指定してパラメーターの数を零にする必要がある。これを踏まえて、

$$N_d = (\text{一般の位置にある } 3d - 1 \text{ 点を通る } d \text{ 次の有理曲線の本数})$$

とおく。例えば

$$\begin{aligned} N_4 &= \left(\begin{array}{l} \text{一般の位置にある 11 点を通り,} \\ \text{通常二重点を 3 持つ 4 次曲線の本数} \end{array} \right) \\ &= 620 \end{aligned}$$

となることが、やや長い計算の結果分かる (例えば [10] を見よ)。さらに、

$$N_5 = 87304$$

となることなども初等的に (つまり、安定写像のモジュライや Gromov-Witten 不変量の理論を使わずに) 計算されているが、その計算は次数 d が上がるにつれて急速に難しくなる。

Gromov-Witten 不変量の理論はこれらの数を効率的に計算するアルゴリズムを与えるのみならず、これらの数が全体としてどういう構造を持っているかを明らかにする。その過程でモノドロミー保存変形や超幾何級数、可積分系などとのつながりも見い出された。それを理解する鍵になるのが Frobenius 多様体の理論である。

2 Frobenius 多様体とモノドロミー保存変形

Frobenius 多様体は Dubrovin によって 1990 年代初頭に定義された対象で、大雑把には接空間に複素双線形かつ平坦な内積と結合的な積が定義された複素多様体である。Dubrovin は理論物理学者によって研究されていた 2 次元の位相的場の理論を公理化することによって Frobenius 多様体の概念に到達したのだが、同様の構造はすでに 1980 年代から斎藤恭司によって原始形式の研究において孤立超平面特異点の普遍開析のパラメーター空間の上に見い出されていた [40]。Frobenius 多様体の参考文献としては [11], [13], [35], [25], [26] 等がある。

定義 2.1. 以下の性質を持つ組 $(M, \circ, e, E, g)$ を Frobenius 多様体と呼ぶ：

1. M は N 次元の複素多様体.
2. $g : \mathcal{T}_M \otimes \mathcal{T}_M \rightarrow \mathcal{O}_M$ は $\mathcal{O}_M$ 双線形形式.
3. $\circ : \mathcal{T}_M \otimes \mathcal{T}_M \rightarrow \mathcal{O}_M$ は $\mathcal{T}_M$ に可換で結合的な積を定義する.
4. $g(X \circ Y, Z) = g(X, Y \circ Z)$.
5. g は平坦, すなわち, g に対する Levi-Civita 接続 ∇ は平坦.
6. $(3, 1)$ 階のテンソル $\nabla \circ$ は完全対称 (ポテンシャル条件 (potentiality)).
7. $e \in \Gamma(\mathcal{T}_M)$ は積 $\circ$ の単位元.
8. e は平坦, すなわち, $\nabla e = 0$.
9. ある $D \in \mathbb{C}$ が存在して, $E \in \Gamma(\mathcal{T}_M)$ は

$$\begin{aligned}\nabla \nabla E &= 0, \\ \text{Lie}_E(\circ) &= \circ, \\ \text{Lie}_E(g) &= Dg\end{aligned}$$

を満たす.

ここで, $\mathcal{O}_M$ は M の構造層 (structure sheaf), $\mathcal{T}_M$ は接層 (tangent sheaf), Lie は Lie 微分である. g を計量 (metric), E を Euler ベクトル場, D を荷電 (charge) と呼ぶ.

上の定義において, 全ての構造は M に正則に依存することに注意. 例えば, 計量 g は正則かつ複素双線形であり, sesquilinear な Kähler 計量とは異なる. g の平坦性より, 平坦座標と呼ばれる M の座標 $\{t_a\}_{a=1}^N$ がアファイン変換を除いて一意的に存在して

$$g(\partial_a, \partial_b) = \eta_{ab}$$

を満たす. ここで, η_{ab} は M 上の定数関数であり,

$$\partial_a = \frac{\partial}{\partial t_a}$$

である。積 $\circ$ の平坦座標系における構造定数を c_{ab}^c とおく。ポテンシャル条件は平坦座標系で書くと、

$$\sum_{k=1}^N \partial_a (\eta_{bk} c_{cd}^k)$$

が a, b, c, d に関して完全対称であるという条件である。このことから、ある $\Phi \in \mathcal{O}_M$ が存在して

$$\sum_{k=1}^N \eta_{ak} c_{bc}^k = \partial_a \partial_b \partial_c \Phi \quad (2)$$

が成り立つことが従う。この Φ を Frobenius 多様体のポテンシャルと言う。

$\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \Gamma(\mathcal{E}nd(TM))$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(X) &:= E \circ X, \\ \mathcal{V}(X) &:= \nabla_X E - \frac{D}{2} X \\ &= \nabla_E X - [E, X] - \frac{D}{2} X \end{aligned}$$

で定義する。 $\pi: \mathbb{C}^\times \times M \rightarrow M$ を第2成分への射影とする。 M の接束 TM の $\mathbb{C}^\times \times M$ への引き戻し π^*TM の接続

$$\hat{\nabla}: \pi^*TM \rightarrow \pi^*TM \otimes T^*(\mathbb{C}^\times \times M)$$

を

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - z X \circ Y, \quad (3)$$

$$\hat{\nabla}_{\partial_z} Y = \partial_z Y - \frac{1}{z} \mathcal{V}(Y) - \mathcal{U}(Y) \quad (4)$$

で定義し、Frobenius 多様体の第一構造接続 (first structure connection) と呼ぶ。ここで、 X, Y は TM の切断の引き戻しで、 z は $\mathbb{C}^\times$ のアファイン座標である。次の定理 2.2 は Frobenius 多様体の理論の要石である。

定理 2.2. $\hat{\nabla}$ は平坦。

証明は略すが、それを見ると $\hat{\nabla}$ の平坦性が Frobenius 多様体の公理の多くを言い換えていることが分かる。この節の最初に挙げた参考文献などを見よ。

(4) は M をパラメーター空間とする $\mathbb{P}^1$ 上の有理型接続の族と考えることができ、 $\hat{\nabla}$ の平坦性 (すなわち (3) との整合性 (compatibility)) はそのモノドロミーが保存されていることを表している。(4) を見ると、この有理型接続は原点に確定特異点、無限遠に Poincaré rank 1 の不確定特異点を持つことが分かる。

$p \in M$ が半単純であるとは、その点における接空間の $\circ$ で決まる環構造が半単純である (巾零元がない) ことを指す。半単純な点の周りでは、局所座標 $u_1, \dots, u_i$ が存在して

$$\partial_i \circ \partial_j = \delta_{ij} \partial_i, \quad (5)$$

$$E = \sum_{i=1}^N u_i \partial_i \quad (6)$$

が成り立つ (Dubrovin [11] (3.47), (3.57) 参照). ただし, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$ とおいた. $i \neq j$ に対し,

$$\begin{aligned} g(\partial_i, \partial_i) &= g(\partial_i, \partial_j \circ \partial_j) \\ &= g(\partial_i \circ \partial_j, \partial_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

より, ∂_i と ∂_j は直交している. この座標 $u_1, \dots, u_i$ を正準座標 (canonical coordinate) という. 正準座標の取り方は u_i たちの入れ替えを除いて一意的である. (5), (6) より, u_i たちは $\mathcal{U}$ の固有値として特徴づけられる. $0 \leq \phi < \pi$ なる ϕ に対し, 原点を通る直線

$$l = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \phi, \phi - \pi\}$$

は, 任意の i と j に対し, u_i と u_j を通る直線が l と直交していないとき, 許容できる (admissible) と言われる. 許容できる直線 l に対し, 十分小さな実数 $\epsilon > 0$ を取って, 原点を通り, l とのなす角が $-\epsilon$ から $+\epsilon$ の間にある全ての直線が許容できるようにできる.

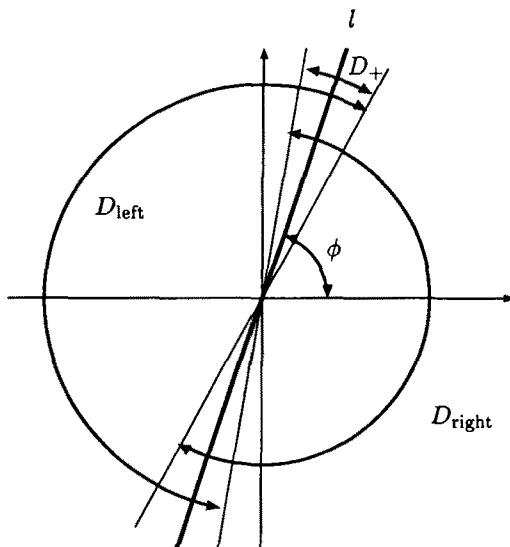


図 1: 角領域

ここで,

$$\begin{aligned} D_{\text{right}} &= \{z \in \mathbb{C} \mid \phi - \pi - \epsilon < \arg(z) < \phi + \epsilon\}, \\ D_{\text{left}} &= \{z \in \mathbb{C} \mid \phi - \epsilon < \arg(z) < \phi + \pi + \epsilon\}, \\ D_+ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \phi - \epsilon < \arg(z) < \phi + \epsilon\}, \end{aligned} \tag{7}$$

と定義し (図 1), $\hat{\nabla}$ に対する平坦切断の方程式 $\hat{\nabla}Y = 0$ を考える:

$$\nabla_X Y - zX \circ Y = 0 \tag{8}$$

$$\partial_z Y - \frac{1}{z} \mathcal{V}(Y) - \mathcal{U}(Y) = 0 \tag{9}$$

Frobenius 多様体 M の半単純な点 $p \in M$ を一つ固定し、その点において、方程式 (9) を $\mathbb{P}^1$ 上の微分方程式として考える。 p における平坦座標を $\{t_a\}_{a=1}^N$ 、正準座標を $\{u_i\}_{i=1}^N$ とすると、これらは接空間の基底 $\{\frac{\partial}{\partial t_a}\}_{a=1}^N$ と $\{\frac{\partial}{\partial u_i}\}_{i=1}^N$ を定める。ここで、行列 Ψ を、前者の基底と後者を正規化した基底の間の変換行列とする：

$$\frac{1}{\sqrt{g(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_i})}} \frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{a=1}^N \Psi_{ai} \frac{\partial}{\partial t_a}.$$

Ψ は p の関数で、 z には依らない。

補題 2.3 (Dubrovin [13] Lemma 4.3). 微分方程式 (9) の形式基本解 $Y_{\text{formal}}(z)$ で、

$$\begin{aligned} Y_{\text{formal}}(z) &= \Psi R e^{Uz}, \\ R(z) &= (1 + \frac{R_1}{z} + \frac{R_2}{z^2} + \cdots), \\ R^T(-z)R(z) &= 1 \end{aligned}$$

を満たすものがただ一つ存在する。ここで、 U は正準座標 u_i たちを成分に持つ対角行列 $U = \text{diag}(u_1, \dots, u_N)$ で、 $\bullet^T$ は行列の転置を表す。

微分方程式 (9) が無限遠で不確定特異点を持つので、この形式解 $Y_{\text{formal}}(z)$ は収束しない。にもかかわらず、角領域 D_{right} と D_{left} でそれぞれ定義された真の解 $Y_{\text{right}}(z)$ と $Y_{\text{left}}(z)$ で、各々の定義域において形式解 $Y_{\text{formal}}(z)$ に漸近するものがただ一つ存在する：

$$Y_{\text{right/left}} \sim Y_{\text{formal}} \text{ as } z \rightarrow \infty \text{ in } D_{\text{right/left}}.$$

これら二つの真の解は共通の定義域 D_+ において同一の線形微分方程式を満たすので、線形変換で互いに移り合う：

$$Y_{\text{left}}(z) = Y_{\text{right}}(z)S, \quad z \in D_+.$$

この行列 S を Stokes 行列という [13]。モノドロミー保存変形は Painlevé 方程式と深く関係しているので、Frobenius 多様体も Painlevé 方程式やその一般化と関係がある。特に、Painlevé VI との関係については [35] が詳しい。

3 Gromov-Witten 不変量

X を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影的多様体とする。 $((C, (z_1, \dots, z_n)), \psi)$ が種数 g の n 点付き曲線から X への安定写像であるとは、 C が算術種数 g の高々通常二重点のみを持つ完備な代数曲線で、 $(z_1, \dots, z_n)$ がその上の順序付けられた n 点、そして $\psi: C \rightarrow X$ が正則写像であって、 $((C, (z_1, \dots, z_n)), \psi)$ の自己同型群が有限であることを指す。このとき、 $\psi_*[C] \in H_2(X; \mathbb{Z})$ を ψ の次数という。 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; \beta)$ を種数 g の n 点付き曲線から X への次数 β の安定写像のモジュライ空間とし、

$$\begin{array}{ccc} \text{ev} : & \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; \beta) & \longrightarrow X^n \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & (C, (z_1, \dots, z_n), \psi) & \longmapsto (\psi(z_1), \dots, \psi(z_n)) \end{array}$$

を評価写像とする。 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; \beta)$ が次元

$$(1-g)(\dim_{\mathbb{C}} X - 3) - \int_{\beta} \omega_X + n$$

の滑らかな多様体になる時、Gromov-Witten 不変量は

$$\begin{aligned} \langle I_{g,n,\beta} \rangle : H^*(X; \mathbb{Q})^{\otimes n} &\longrightarrow \mathbb{Q}, \\ \langle I_{g,n,\beta} \rangle(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; \beta)} \text{ev}^*(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) \end{aligned}$$

で定義される。ここで、Künneth 同型 $H^*(X; \mathbb{Q})^{\otimes n} \cong H^*(X^n; \mathbb{Q})$ を使って $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n$ を $H^*(X^n; \mathbb{Q})$ の元と見なした。一般に $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; \beta)$ は滑らかではなく、その次元は $(1-g)(\dim_{\mathbb{C}} X - 3) - \int_{\beta} \omega_X + n$ より高い。そのような場合でも Gromov-Witten 不変量は上と類似の式で定義されるが、積分すべきサイクルが $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X; \beta)$ の基本類ではなく、仮想基本類 (virtual fundamental class) と呼ばれるホモロジー類になるなど、技術的により複雑になる。詳しくは [3], [34] 等を見よ。

$\{T_i\}_{i=0}^{N-1}$ を $H^*(X; \mathbb{C})$ の基底、 $\{t_i\}_{i=0}^{N-1}$ を対応する $H^*(X; \mathbb{C})$ の座標とする。 $T_i \in H^k(X; \mathbb{C})$ の時 $\deg t_i = k$ とおく。ここで、 T_0 が $H^0(X; \mathbb{C})$ の基底になるように $\{T_i\}_{i=0}^{N-1}$ を取っておく。

$$\gamma = \sum_{i=0}^{N-1} t_i T_i$$

とにおいて、次の $\{t_i\}_{i=0}^{N-1}$ に関する形式巾級数 $\Phi(\gamma)$ を Gromov-Witten ポテンシャルと言う：

$$\Phi(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})} \frac{1}{n!} \langle I_{0,n,\beta} \rangle (\gamma^{\otimes n}).$$

以下、符号による煩雑さを避けるために X の奇数次のコホモロジーは零とする。 $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1})$ を多重添字、 $|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_{N-1}$ 、 $\alpha! = \alpha_0! \cdots \alpha_{N-1}!$ 、 $T^\alpha = T_0^{\alpha_0} \otimes \cdots \otimes T_{N-1}^{\alpha_{N-1}}$ 、 $t^\alpha = t_0^{\alpha_0} \cdots t_{N-1}^{\alpha_{N-1}}$ とおくと、

$$\frac{1}{n} \langle I_{0,n,\beta} \rangle (\gamma^{\otimes n}) = \sum_{|\alpha|=n} (\langle I_{0,n,\beta} \rangle (T^\alpha)) \frac{t^\alpha}{\alpha!}$$

となり、 Φ が Gromov-Witten 不変量の母関数であることが分かる。

定理 3.1 (例えば [47] 定理 6.94). Φ をポテンシャル関数として $H^*(X; \mathbb{C})$ の原点の形式近傍に Frobenius 多様体の構造が定まる。

つまり、Gromov-Witten 不変量は写像の次数ごとにばらばらに存在しているのではなく、全体として (つまり母関数を考えることによって) X のコホモロジー群 $H^*(X; \mathbb{C})$ に構造を与える。特に接空間に積構造が入るが、コホモロジー群 $H^*(X; \mathbb{C})$ がベクトル空間なので、点 $p \in H^*(X; \mathbb{C})$ における接空間も $H^*(X; \mathbb{C})$ 自身になり、結局 $H^*(X; \mathbb{C})$ に $H^*(X; \mathbb{C})$ でパラメトライズされた積構造の族が存在することになる。Gromov-Witten 不変量の公理を使うと、この積構造がコホモロジー群に入る通常のカップ積の変形になっていることも分かる。コホモロジー群にこの積構造を入れたものを量子コホモロジーと呼ぶ。さらに、Frobenius 多様体の計

量 g はコホモロジー群の Poincaré pairing で与えられ、そのことからコホモロジー群の $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての座標が平坦座標であることが従う。単位ベクトル場は

$$e = \frac{\partial}{\partial t_0},$$

Euler ベクトル場は

$$E = \sum_{i=0}^{N-1} \left(1 - \frac{\deg t_i}{2}\right) t_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{\deg t_j=2} r_j \frac{\partial}{\partial t_j},$$

荷電は $D = 2 - \dim_{\mathbb{C}} X$ となる。ここで、 $r_j \in \mathbb{Z}$ は

$$c_1(TX) = \sum_{\deg t_j=2} r_j T_j$$

で定義される。ただし、 $c_1(TX)$ は X の接束 TX の第 1 Chern 類である。

例： $\mathbb{P}^2$ の場合、 $H^*(X; \mathbb{C})$ は 3 次元であり、その座標を

$$t_0 = [\mathbb{P}^2], \quad t_1 = [l], \quad t_2 = [pt]$$

とする。ここで、 $[\mathbb{P}^2]$ は基本類、 $[l]$ は直線、 $[pt]$ は点のホモロジー類であり、ホモロジー群の元をコホモロジー群の座標と見なした。この時、Gromov-Witten ポテンシャルは

$$\Phi(t_0, t_1, t_2) = \frac{1}{2}(t_0^2 t_2 + t_0 t_1^2) + \sum_{d=1}^{\infty} N_d e^{dt_1} \frac{t_2^{3d-1}}{(3d-1)!},$$

荷電は $D = 0$ 、Euler ベクトル場は

$$E = t_0 \frac{\partial}{\partial t_0} - t_2 \frac{\partial}{\partial t_2} + 3 \frac{\partial}{\partial t_1}$$

となる。ここで、 N_d は (1) に現れた一般の $3d-1$ 点を通る d 次の有理曲線の本数である。量子コホモロジー環の結合律を Gromov-Witten ポテンシャル Φ について書くと、

$$\sum_{a,b} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t_i \partial t_j \partial t_a} \eta^{ab} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t_b \partial t_k \partial t_l} = \sum_{a,b} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t_j \partial t_k \partial t_a} \eta^{ab} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t_b \partial t_i \partial t_l}$$

となる。これを WDVV (Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde) 方程式と言う。ここで、 $(\eta^{ab})_{a,b}$ は $(\eta_{ab})_{a,b}$ の逆行列であり、 η_{ab} はコホモロジー群の Poincaré pairing ($\eta_{02} = \eta_{20} = 1$, $\eta_{11} = 1$, 残りは零) である。これを展開すると N_d に関する漸化式

$$N_d = \sum_{\substack{d_1 + d_2 = d, \\ d_1, d_2 > 0}} N_{d_1} N_{d_2} (d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1})$$

を得る。ここから N_d は帰納的に求まる。 Φ が求まると、(2) によって量子コホモロジーの積の構造定数が決まる。ここで、 $t_0 = t_2 = 0$ と特殊化すると、量子コホモロジーは

$$QH^*(\mathbb{P}^2) = \mathbb{C}[T_1]/(T_1^3 - e^{t_1})$$

と単純になる. 一般に $H^2(X)$ に対応するパラメーターだけを残して残りを零にした時の量子コホモロジーを小量子コホモロジー (small quantum cohomology) と言い, これに対応して, 全てのパラメーターを残した量子コホモロジーを大量子コホモロジー (big quantum cohomology) と言う. Kontsevich-Manin の reconstruction theorem [30] により, 全コホモロジー環 $H^*(X)$ が $H^2(X)$ で環として生成されているとき, 大量子コホモロジーは小量子コホモロジーから復元できる.

Gromov-Witten ポテンシャルは種数が零の Gromov-Witten 不変量の母関数であるが, 全ての種数についての母関数を取ることもできる. ここでさらに, 2次元の位相的重力理論との結合 (gravitational descendant の理論. 例えば Cox-Katz [9] の 10 章を見よ) も込めて考えると, KdV 階層や戸田階層などに代表される独立変数 (時間) の個数が無限大の可積分系や行列積分との関係が生じる. 江口-堀-Xiong による Virasoro 予想もこのことと関係する. 例えば [43], [31], [18], [17], [16], [14], [23], [22], [36], [37] 等を見よ.

4 接続層の導来圏と Stokes 行列

シンプレクティック幾何を前面に押し出さず全く代数幾何的に定義することもできるが, Gromov-Witten 不変量は実はシンプレクティック幾何的な不変量であり, 考えている多様体の複素構造には依らない. すなわち, 今まで議論してきたのはシンプレクティック幾何であった. さて, X を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影的代数多様体とすると, Kähler 形式によって X をシンプレクティック多様体と思うこともできるが, X を複素多様体と思って接続層の導来圏を考えることもできる. 接続層の導来圏は多様体の複素構造に強く依存し, 特に多様体の正準束もしくは反正準束が豊富なときは, 接続層の導来圏から元の多様体が復元できる (つまり, 複素構造が一意に定まる) ことが知られている [8]. ここで, 射影空間や Grassmann 多様体を含む特別なクラスの多様体に対しては, 以下で定義される exceptional collection と呼ばれる非常に特別な性質を持った接続層の導来圏の三角圏としての生成元が存在することが知られている (例えば [4], [39], [29], [38] 等を見よ).

定義 4.1. 1. 三角圏の対象 $\mathcal{E}$ は以下を満たすとき exceptional と呼ばれる:

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = 0, \\ 0 & i \neq 0. \end{cases}$$

2. 三角圏の対象の順序づけられた集合 $(\mathcal{E}_i)_{i=1}^N$ が exceptional collection であるとは全ての $\mathcal{E}_i$ が exceptional で $\mathrm{Ext}^k(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) = 0$ が任意の $i > j$ と k に対して成り立つことを指す.

接続層の導来圏と量子コホモロジーの Stokes 行列に関して, Kontsevich, Zaslow [45], Dubrovin [12] らによる次の予想がある:

予想 4.2. 滑らかな射影的代数多様体 X の量子コホモロジーが一般の点で半単純であることの必要十分条件は X の接続層の導来圏 $D^b\mathrm{coh}(X)$ の exceptional collection $(\mathcal{E}_i)_{i=1}^N$ が存在して, $D^b\mathrm{coh}(X)$ が $(\mathcal{E}_i)_{i=1}^N$ で生成されていることである. この状況で, X の量子コホモロジーの Stokes 行列 S は $\mathcal{E}_i$ たちの間の Ext の Euler 数で与えられる: $S_{ij} = \sum_k (-1)^k \dim \mathrm{Ext}^k(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j)$.

この予想は, X のシンプレクティック幾何と X の複素幾何の間に不思議な関係があることを主張している. この予想は, Dubrovin [13] と Guzzetti [24] によって射影空間の場合に成り立

つことが知られていた (Dubrovin は次元が 2 以下の場合, Guzzetti は一般次元). 彼らの証明は射影空間の量子コホモロジーから定まる z 方向の微分方程式 (9) の解である超幾何級数に対する Barnes 型の積分表示

$$\int_{-c-\sqrt{-1}\infty}^{-c+\sqrt{-1}\infty} ds \Gamma^k(-s) e^{-\sqrt{-1}\pi ks} e^{2(n-1)\pi\sqrt{-1}s} z^{ks}$$

を使う解析的なものである. 我々の結果は以下の通り:

定理 4.3. 予想 4.2 はトーリック del Pezzo 曲面と Grassmann 多様体に対して成立する.

我々の証明は幾何学的であり, ミラー対称性を本質的に使う. 実際, 上の定理 4.3 のトーリック del Pezzo 曲面に関する部分は次のホモロジー的ミラー予想 ([32] を見よ) の系である.

定理 4.4. トーリック del Pezzo 曲面 X に対し, そのミラーを W とすると, 三角圏の同値

$$D^b \text{coh} X \cong D^b \mathfrak{F} \text{ut} \rightarrow W.$$

が存在する.

定理 4.3 の Grassmann 多様体に関する部分はトーリック del Pezzo 曲面の場合とは違い, Hori-Vafa 予想 [28] (Bertram-Ciocan-Fontanine-Kim の定理 [5]) を使う. これによって, 予想 4.2 は A. N. Kirillov によって証明された Young 図式の組み合わせ論的な恒等式に帰着する.

5 トーリック Fano 多様体のミラー対称性

$\Sigma \subset N \cong \mathbb{Z}^n$ を扇, X を対応するトーリック多様体とする. X はコンパクトで滑らかな Fano 多様体であると仮定する. Σ の 1 次元錐の生成元を $\{v_i\}_{i=1}^{n+r}$, $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in}) \in \mathbb{Z}^n$ とする. $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ とおくと, 完全列

$$0 \rightarrow M \rightarrow \mathbb{Z}^{n+r} \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

がある. ここで, 写像 $M \rightarrow \mathbb{Z}^{n+r}$ は $M \ni m \mapsto (m(v_i))_{i=1}^{n+r} \in \mathbb{Z}^{n+r}$ で定義される. $H^2(X, \mathbb{Z})$ に適当な基底を入れて $\mathbb{Z}^r$ と同一視し, これによる (5) の三つ目の矢印を行列要素を m_{ia} とおく. ただし, i は $\mathbb{Z}^{n+r}$ の添字で, a は $H^2(X, \mathbb{Z})$ の添字である.

さて, 代数的トーラス $Z = (\mathbb{C}^\times)^n = \text{Spec} \mathbb{C}[x_i^\pm]_{i=1}^n$ 上の正則関数 W を

$$W(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^{n+r} q_i x_1^{v_{i1}} \cdots x_r^{v_{ir}} \quad (10)$$

で定義し, X のミラーと呼ぶ. $q_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n+r$ を一般に選ぶことによって全ての臨界点が非退化になっていると仮定すると, W の臨界点の数 N は Kouchnirenko の定理 [33] によって $\{v_i\}_{i=1}^{n+r}$ の凸包の体積の $n!$ 倍 (つまり, n 単体の体積を 1 と数えたときの凸包の体積), すなわち $\sum_k \dim H^k(X, \mathbb{R})$ に等しい. W の臨界点を $\{p_i\}_{i=1}^N$ とおく. Z の完備な Kähler 計量 (例えば $\sum_i d \log |x_i| \wedge d \arg x_i$) を一つ固定し, 一般の $h \in \mathbb{C}$ に対し, $\Re(W/h)$ の p_i に対する不安定多様体 (つまり, $\Re(W/h)$ の勾配ベクトル場で流したときに, 時間が $-\infty$ での極限が p_i になるような点の集合) を Γ_i と呼ぶ. Γ_i の W による像は臨界値 $W(p_i)$ から出る偏角が

$\pi + \arg(\hbar)$ の半直線であり、この半直線上の点 p におけるファイバーは、この半直線に沿って消滅する $W^{-1}(p)$ のサイクルである。図2はある臨界値 $W(p_i)$ の付近での W のファイバーの様子を表している。臨界点が非退化なので、この周りで W を2次式で近似すると、臨界値の上のファイバーは特異な2次超曲面であり、その近くの正則値の上のファイバーはそれを変形した滑らかな2次超曲面である。滑らかなファイバーの上の点線で書かれたサイクルは、特異ファイバーまで平行移動すると潰れる消滅サイクルであり、位相的には $n-1$ 次元球面と同相になっている。この消滅サイクルを $W(p_i)$ から出て $\Re[W/\hbar]$ が小さくなる方向に伸びる半直線に沿って並べたものが Γ_i である (図3)。

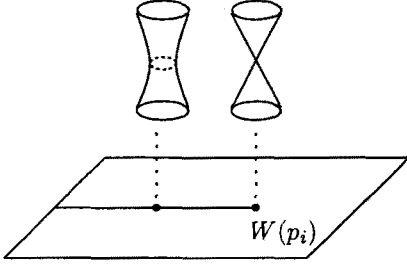


図 2: $W(p_i)$ の近くでの W のファイバー

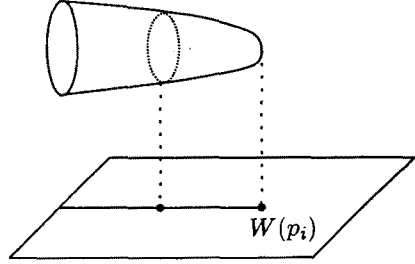


図 3: p_i に対する不安定多様体 Γ_i

この Γ_i を用いて、 $\{q_i\}_{i=1}^{n+r}$ と $\hbar$ の関数 I_i , $i = 1, \dots, N$ を

$$I_i = \int_{\Gamma_i} e^{\frac{1}{\hbar} W(x)} \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{x_1 \cdots x_n}$$

で定義する。測度

$$\frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{x_1 \cdots x_n}$$

がトーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ の $\mathbb{C}^n$ への自然な作用

$$(\mathbb{C}^\times)^n \ni (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n)$$

で不変なので、 $j = 1, \dots, n$ に対し

$$Z_j = \sum_{i=1}^{n+r} v_{ij} q_i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

とくと、

$$Z_j I_i = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (11)$$

を満たすことが分かる。さらに、 $a = 1, \dots, r$ に対し、

$$\square_a = \prod_{i: m_{ia} > 0} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial q_i} \right)^{m_{ia}} - \prod_{i: m_{ia} < 0} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial q_i} \right)^{-m_{ia}}$$

と定義すると、任意の $i = 1, \dots, N$ に対し、 I_i は

$$\square_a I_i = 0, \quad a = 1, \dots, r \quad (12)$$

を満たす. (11), (12) は Gelfand-Kapranov-Zelevinski による $\mathcal{A}$ 超幾何微分方程式系 [20] と密接に関係している.

さらに, 変数 $\hbar$ と x_i , $i = 1, \dots, n$ に次数 1 を, 変数 q_i , $i = 1, \dots, n+r$ には次数 $\deg(q_i) = -v_{i1} - \dots - v_{in}$ を与えると, $W/\hbar$ は次数が零の同次多項式になるので,

$$[\hbar \frac{\partial}{\partial \hbar} + \sum_{k=1}^{n+r} \deg(q_k) q_k \frac{\partial}{\partial q_k}] I_i = 0$$

が成り立つ. 変数 $t_1, \dots, t_r$ を

$$\exp[t_a] = q_1^{m_{1a}} \dots q_{n+r}^{m_{n+r,a}}$$

で定義する. (11) より, I_i は t_a たちを通してしか q_i たちに依存しないので, 以下では I_i を t_a たちの関数と思うことにする.

定理 5.1 (Givental [21]). X を上のようなトーリック Fano 多様体とすると, N 個の $2r+1$ 変数多項式 $\{P_a\}_{a=0}^{N-1}$ が存在して, $i = 1, \dots, N$ に対し,

$$\Phi_i = \left(P_a \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \hbar \frac{\partial}{\partial t_r}, e^{t_1}, \dots, e^{t_r}, \hbar \right) I_i \right)_{a=0}^{N-1}$$

と定義すると, $\{\Phi_i\}_{i=0}^{N-1}$ は X の小量子コホモロジーに対する第一構造接続の平坦切断のなすベクトル空間の基底を与える.

ここで, 小量子コホモロジーに対する第一構造接続とは, $H^*(X, \mathbb{Z})$ を Gromov-Witten ポテンシャルによって Frobenius 多様体と考えたときの第一構造接続 $\hat{\nabla}$ を $H^*(X, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ の部分多様体 $H^2(X, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ に制限したものを指す. また, 接束を平坦座標によって自明化して切断を N 個の関数の組で表しており, さらにここでの $\hbar$ は (4) での z と $\hbar = 1/z$ で関係している. これらの平坦切断たちから X の小量子コホモロジーは復元でき, さらに 3 節の終りで言及した Kontsevich-Manin の定理によりトーリック多様体の大量子コホモロジーは小量子コホモロジーから復元できる. 大量子コホモロジーの構造定数は種数零の Gromov-Witten 不変量の母関数から決まっているので, 結局 (10) で与えられる代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ 上の関数 W から, X の種数零の Gromov-Witten 不変量が全て求まることになる. これが Givental の定理の意味であり, X のシンプレクティック幾何的な不変量を X のミラー W の複素幾何的な量で表すという意味でのミラー定理になっている. [2], [44], [15], [28] 及び [27] も見よ.

この Givental の積分表示から Stokes 行列を求める方法を議論しよう. 簡単のため, 臨界値は $\Im m[W(p_1)] > \Im m[W(p_2)] > \dots > \Im m[W(p_N)]$ を満たすとする. w_a を

$$P_a \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \hbar \frac{\partial}{\partial t_r}, e^{t_1}, \dots, e^{t_r}, \hbar \right) e^{\frac{1}{\hbar} W(x)} = w_a(x) e^{\frac{1}{\hbar} W(x)}$$

で定義すると,

$$\Phi_{ai}(\hbar) = \int_{\Gamma_i(\hbar)} e^{\frac{1}{\hbar} W(x)} w_a(x) \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{x_1 \dots x_n}$$

となる. 鞍点法 (停留位近似) によって,

$$\Phi_{ai}(\hbar) \sim e^{\frac{1}{\hbar} W(p_i)} \frac{w_a(p_i)}{p_{i,1} \dots p_{i,n}} (\hbar \pi)^{\frac{n}{2}} \left[\det \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_m}(p_i) \right)_{i,m} \right]^{-\frac{1}{2}} (1 + O(\hbar)).$$

である。ここで、 $W(p_i)$ が Frobenius 多様体の正準座標である（すなわち、 $u_i = W(p_i)$ である）ことから、右辺の展開を先まで続けると、まさに補題 2.3 に現れる形式解を与えることが分かる。

さて、上の積分 $\Phi_{ai}(\hbar)$ の積分サイクルは不安定多様体 $\Gamma_i(\hbar)$ であるが、 $\Gamma_i(\hbar)$ は z （あるいは $\hbar = 1/z$ ）を動かすと、 i 番目の臨界値 $W(p_i)$ から出る偏角 $\pi + \arg(\hbar)$ の半直線が他の臨界値 $W(p_j)$ を横切るとき不連続に変化し、大域的には正則関数を与えない。そこを越えて正則な積分表示を得るには、相対ホモロジーに対する Gauss-Manin 接続を使えば良い。積分に使うサイクル $\Gamma_i(\hbar)$ は中間次元の相対ホモロジー $H_n((\mathbb{C}^\times)^n, \Re[W/\hbar] \ll 0)$ の元であるが、 $H_n((\mathbb{C}^\times)^n, \Re[W/\hbar] \ll 0)$ を z に関して並べたものは z 上の局所系を与え、この局所系に対応する平坦接続を Gauss-Manin 接続という。この Gauss-Manin 接続に関して平坦な切断を積分サイクルとして使うと正則な関数を得るが、Gauss-Manin 接続はモノドロミーを持つので、大域的な平坦接続は存在せず、 z 平面を適当な領域に分割しなければならない。また、鞍点法によって漸近展開を得る事ができるのは積分するサイクルが不安定多様体の場合だけである。それ以外のサイクルにおける積分の漸近展開は、不安定多様体たちを相対ホモロジーの基底に取って、積分サイクルをそれらの線形結合で表すことによって求められる。ここで、 $\Re[W(p_i)/\hbar] < \Re[W(p_j)/\hbar]$ の時、 Φ_{ai} は Φ_{aj} に比べて指数的に小さいので、漸近展開において無視できることを考慮にいと、 $z = 1$ における不安定多様体を、左半平面を少し大きくした角領域 $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid \pi/2 - \epsilon < \arg(z) < 3\pi/2 + \epsilon\}$ に Gauss-Manin 接続に関して平坦に延長したものは、虚軸が許容できる限りにおいて、補題 2.3 にある形式解に漸近する。同様に、 $z = -1$ における不安定多様体を右半平面を少し大きくした角領域に平坦に延長したものも、その角領域で同じ形式解に漸近する。 $z = 1$ における不安定多様体を Gauss-Manin 接続で $z = \sqrt{-1}$ まで平行移動したものを $\Gamma_{i,\text{right}}$ 、 $z = -1$ における不安定多様体を Gauss-Manin 接続で $z = \sqrt{-1}$ まで平行移動したものを $\Gamma_{i,\text{left}}$ とおく（図 4）。

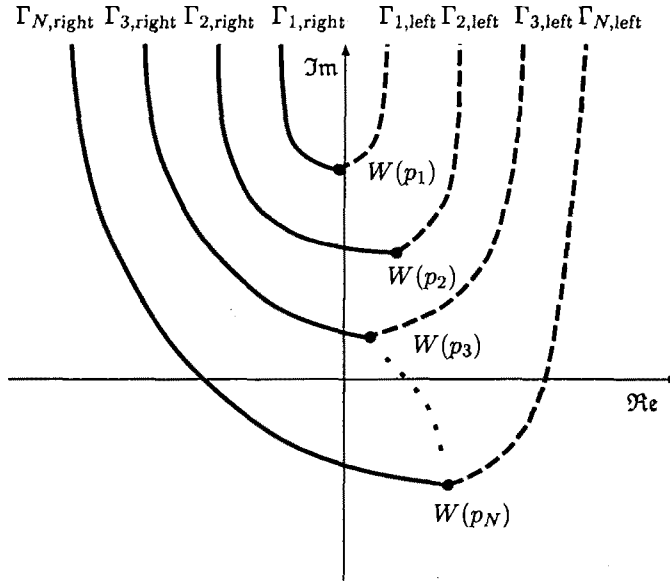


図 4: $z = \sqrt{-1}$ におけるサイクル

この時 Picard-Lefschetz 理論により, $i = 1, \dots, N$ に対し,

$$\Gamma_{i,\text{left}} = \Gamma_{i,\text{right}} - (C_i, C_{i-1})\Gamma_{i-1,\text{right}} - \dots - (C_i, C_1)\Gamma_{1,\text{right}},$$

が成り立つ. ここで, (C_i, C_j) は C_i と C_j の交点数である. 被積分関数にモノドロミーがないので, Stokes 行列はこれら二組のサイクルたちの変換行列で与えられる:

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ -(C_i, C_j) & \text{if } i < j, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

6 深谷圏

W を $\mathbb{C}$ 上の滑らかなアファイン代数多様体 Z 上の正則関数とする. このような W の臨界点の近傍での振る舞いの研究は特異点論の重要な一分野をなす. 典型的な研究対象としては, W の消滅サイクルや, Milnor ファイバーのコホモロジーの混合 Hodge 構造, 対応する周期写像等がある. 例えば [1] を見よ. 通常は消滅サイクルを単にホモロジー類としてしか考えないが, Z に Kähler 構造が入っているときには, Kähler 計量に関する勾配ベクトル場を使って消滅サイクルを部分多様体として実現できる. このとき, 消滅サイクルは Kähler 形式が $W^{-1}(t)$ に誘導するシンプレクティック構造に関して Lagrange 部分多様体になっており, Floer コホモロジーを考えることによってより精密な情報を得ることができる. これが Seidel [41] らによる完全 Morse ファイブレーションの深谷圏の理論である. 特異点のシンプレクティック幾何的な研究は Arnold に始まる.

シンプレクティック多様体とその高々可算個の Lagrange 部分多様体が与えられたときに, 対応する深谷圏とは, 対象の集合がこれらの Lagrange 部分多様体たちで, それらの間の射が Lagrange 部分多様体の Floer 複体であるような A_∞ 圏である. [19]. まず A_∞ 圏の定義を思い出そう.

定義 6.1. $\mathcal{A}$ が A_∞ 圏であるとは, 対象の集合 $\text{Ob}(\mathcal{A})$ が与えられていて, 任意の対象 $c_1, c_2 \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ に対し射の空間と呼ばれる $\mathbb{Z}$ 次数付き複素ベクトル空間 $\text{hom}_{\mathcal{A}}(c_1, c_2)$ が定まり, 任意の $k+1$ 個の対象 $\{c_i\}_{i=0}^k$ に対して射の合成と呼ばれる線形写像

$$m_k : \text{hom}_{\mathcal{A}}(c_0, c_1)[1] \otimes \dots \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(c_{k-1}, c_k)[1] \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(c_0, c_k)[1]$$

があって, 任意の k 個の射 $a_i \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(c_{i-1}, c_i)$, $a = 1, \dots, k$ に対して A_∞ 関係式

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (-1)^{\deg a_1 + \dots + \deg a_i} m_{k+i-j+1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes m_{j-i}(a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_j) \otimes a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_k) = 0.$$

を満たしているものを言う. ここで, m_k の次数を数えるときのベクトル空間の次数は, ずらしたあとのものを取る. つまり, $a \in V^i$ にたいし, a の $V[1]$ での次数は $\deg a = i-1$ である. m_1 の 2 乗は零なので, そのコホモロジーを考えることができる. これを

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(c_1, c_2) := H^0(\text{hom}_{\mathcal{A}}(c_1, c_2), m_1)$$

と書く.

A_∞ 圏の典型的な例は次数付き微分圏 (differential graded category) である：

定義 6.2. $\mathcal{C}$ が次数付き微分圏であるとは、 $\mathcal{C}$ が圏で、任意の 2 つの対象 $c_1, c_2 \in \mathcal{D}b(\mathcal{C})$ に対し、射の集合 $\text{hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_2)$ が $\mathbb{Z}$ 次数付き複素ベクトル空間で、微分と呼ばれる次数 1 の線形写像 $d: \text{hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_2) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_2)$ で 2 回合成すると消える ($d \circ d = 0$) ものが定められており、任意の 3 つの対象 $c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{D}b(\mathcal{C})$ と、任意の射 $x \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_2)$ と $y \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(c_2, c_3)$ に対し、Leibniz 則

$$d(x \cdot y) = dx \cdot y + (-1)^{\deg x} x \cdot dy$$

を満たすものを言う。ここで、 $x \cdot y \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_3)$ は射 x と y の合成である。このような $\mathcal{C}$ は

$$\begin{aligned} m_1(x) &= (-1)^{\deg x} d, \\ m_2(x, y) &= (-1)^{\deg x (\deg y + 1)} x \cdot y, \\ m_k &= 0, \quad \text{for } k > 2 \end{aligned}$$

によって A_∞ 圏になる。

さて、 Z を Kähler 構造を持つアファイン代数多様体、 $W: Z \rightarrow \mathbb{C}$ をその上の正則関数とする。 $\mathbb{C}$ 中の経路 $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ と $W(p) = c(0)$ を満たすような任意の点 $p \in Z$ に対し、 p から始まる c の持ち上げ $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow Z$ が、 Z の Kähler 構造を使って、微分が常に W のファイバーの接空間の直交補空間に入っているという条件によって定義される。

臨界点の集合に適当な順序を入れたものを $(p_i)_{i=1}^N$ とする。原点は W の正則値であると仮定する。 $(c_i)_{i=1}^N$ が distinguished set of vanishing paths であるとは、各 $c_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ が $\mathbb{C}$ の滑らかな経路であって以下を満たすことを指す：

1. $c_i(0) = 0, c_i(1) = W(p_i)$.
2. c_i は自己交叉を持たない。
3. c_i と c_j の像は原点でのみ交わる。
4. $c'_i(0) \neq 0$.
5. $\arg(\bullet)$ の適当な分枝をとると $\arg c'_{i+1}(0) < \arg c'_i(0)$, $i = 1, \dots, N-1$, とできる。

distinguished set of vanishing paths $(c_i)_{i=1}^N$ に対し、対応する消滅サイクル (vanishing cycles) $(C_i)_{i=1}^N$ が

$$C_i = \{p \in W^{-1}(0) \mid \lim_{t \rightarrow 1} \tilde{c}_p(t) = p_i\}.$$

によって定義される。これらは $W^{-1}(0)$ に Z の Kähler 形式の制限によってシンプレクティック構造を入れたとき、 $W^{-1}(0)$ の Lagrange 部分多様体になる。

深谷圏を定義するには、 Z と各消滅サイクルに余分の仮定と構造を付け加えなければならないが、技術的になるので省略する。従って、次の定義はそのままでは不正確である。詳細は [41] を見よ。

定義 6.3. アファイン Kähler 多様体の Z 上の正則関数 W の有向深谷圏 (directed Fukaya category) $\mathfrak{Fuk}^{\rightarrow} W$ とは以下を満たす A_∞ 圏である：

- 対象の集合は消滅サイクルである：

$$\text{Ob}(\mathfrak{Fut}^{\rightarrow} W) = (C_1, \dots, C_N),$$

- C_i と C_j の間の射は

$$\text{hom}_{\mathfrak{Fut}^{\rightarrow} W}(C_i, C_j) = \begin{cases} 0 & i > j, \\ \mathbb{C} \cdot \text{id}_{C_i} & i = j, \\ \bigoplus_{p \in C_i \cap C_j} \text{span}_{\mathbb{C}}\{p\} & i < j \end{cases}$$

で与えられる。

- 対象の集合 $(C_{i_0}, \dots, C_{i_k})$ と射の集合 $p_l \in C_{i_{l-1}} \cap C_{i_l}$ に対し、射の合成 m_k は

$$m_k(p_1, \dots, p_k) = \sum_{p_0 \in C_{i_0} \cap C_{i_k}} \# \overline{\mathcal{M}}_{k+1}(C_{i_0}, \dots, C_{i_k}; p_0, \dots, p_k) p_0$$

で与えられる。

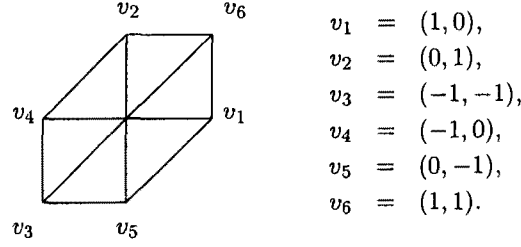
ここで、 $\overline{\mathcal{M}}_{k+1}(C_{i_0}, \dots, C_{i_k}; p_0, \dots, p_k)$ は以下を満たす組 $((D^2, (z_0, \dots, z_k)), \varphi)$ のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{k+1}(C_{i_0}, \dots, C_{i_k}; p_0, \dots, p_k)$ の安定コンパクト化である： $(D^2, (z_0, \dots, z_k))$ は閉円盤 $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ とその境界 ∂D^2 の上の反時計回りに並んだ $k+1$ 個の点の組で、 $\varphi: D^2 \rightarrow W^{-1}(0)$ は $\varphi(\partial_l D^2) \subset C_{i_l}$ 及び $\varphi(z_l) = p_l$ を任意の l に対して満たす正則写像であり、組 $\overline{\mathcal{M}}_{k+1}(C_{i_0}, \dots, C_{i_k}; p_0, \dots, p_k)$ の自己同型群は有限である。ここで、 z_l と z_{l+1} で挟まれた ∂D^2 の区間（ただし、 $z_{k+1} = z_0$ とする）を $\partial_l D^2$ とおいた。

概正則写像のモジュライ空間の定義には微妙な点があり、 $\overline{\mathcal{M}}_{k+1}(C_{i_0}, \dots, C_{i_k}; p_0, \dots, p_k)$ は一般には多様体ではないが、「角付き倉西構造」を持ち、その上の「点の数」 $\# \overline{\mathcal{M}}_{k+1}(C_{i_0}, \dots, C_{i_k}; p_0, \dots, p_k)$ には意味がある。 $\# \overline{\mathcal{M}}_{k+1}(C_{i_0}, \dots, C_{i_k}; p_0, \dots, p_k)$ は $\dim \overline{\mathcal{M}}_{k+1}(C_{i_0}, \dots, C_{i_k}; p_0, \dots, p_k) \neq 0$ の時零になる。

「有向」と呼ぶのは、 $i > j$ に対し $\text{hom}_{\mathfrak{Fut}^{\rightarrow} W}(C_i, C_j) = 0$ であることによる。Seidel [41] は消滅サイクルの distinguished basis の取り替えによる有向深谷圏 $\mathfrak{Fut}^{\rightarrow} W$ の変化が Rudakov ら ([39] を見よ) の意味での mutation であることを示した。特に、有向深谷圏の導来圏は消滅サイクルの distinguished basis の取り方によらずに定まる。

7 トーリック del Pezzo 曲面のホモロジー的ミラー対称性

$\phi: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ を $\mathbb{P}^2$ の一般の位置にある 3 点 p_1, p_2, p_3 における爆発、 E_1, E_2, E_3 を対応する例外曲線とする。 Y はトーリック del Pezzo 曲面で、しかも他の全てのトーリック del Pezzo 曲面は Y の blow-down で得られる。

図 5: Y の扇の 1 次元錐の生成元の凸包

Beilinson [4] と Orlov [38] の定理を組み合わせることによって次が得られる:

定理 7.1.

$$\mathcal{C} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5, \mathcal{E}_6),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \mathcal{O}_{E_1}(-1)[-1], & \mathcal{E}_2 &= \mathcal{O}_{E_2}(-1)[-1], & \mathcal{E}_3 &= \mathcal{O}_{E_3}(-1)[-1], \\ \mathcal{E}_4 &= \phi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1), & \mathcal{E}_5 &= \phi^* \Omega_{\mathbb{P}^2}(1), & \mathcal{E}_6 &= \mathcal{O}_Y. \end{aligned} \quad (14)$$

とおくと, $\mathcal{C}$ は exceptional collection であり, $D^b \text{coh}(Y)$ を生成する.

ここで, $\mathcal{O}_{E_i}(-1)$ は E_i を台に持ち, $E_i \cong \mathbb{P}^1$ 上では超平面層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ の双対, $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)$ は $\mathbb{P}^2$ の余接層に, $\mathbb{P}^2$ の超平面層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ をテンソルしたもの, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ の双対, $[\bullet]$ は複体の次数をずらす作用素, そして ϕ^* は引き戻しの左導来関手である. $\mathcal{C}$ が $D^b \text{coh}(Y)$ を生成するとは, $\mathcal{C}$ を含む $D^b \text{coh}(Y)$ の最小の部分三角圏が全体と一致することを指す. $\mathcal{C}$ の元の間の Ext は, 米田積の構造も込めて全て具体的に計算できる.

次にミラーの深谷圏を計算する. Y のミラーは代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^2 = \text{Spec} \mathbb{C}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$ 上の正則関数

$$W(x, y) = q_1 x + q_2 y + \frac{q_3}{xy} + \frac{q_4}{x} + \frac{q_5}{y} + q_6 xy \quad (15)$$

である ((10) および図 5 を参照). W の有向深谷圏 $\mathfrak{Fut} \rightarrow W$ は一般の q_i の選び方によらない. 我々は以下の図を書くのに $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = (1, 1, 1, 0.215, 0.25, 0.3)$ を使った. $W^{-1}(0)$ はアフライン楕円曲線であり, 無限遠点を 6 つ付け加えることによってコンパクト化できる. 図 6 に W の臨界値と我々の使った消滅経路の distinguished set を記す. 図 7 は対応する消滅サイクルである.

図 7 において, 向かい合う辺は同一視されて全体としてトーラスをなす. 白丸は $(\mathbb{C}^\times)^2$ がコンパクトでないために抜けている点である. m_k は $k = 2$ の時のみ零でないことが図 7 から分かる.

定理 7.2. 任意の $i, j = 1, \dots, 6$ に対し, $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての同型

$$\phi_{ij} : \text{Hom}_{D^b \text{coh}(Y)}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Fut} \rightarrow W}(C_i, C_j)$$

が存在して, 以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b \text{coh}(Y)}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) \times \text{Hom}_{D^b \text{coh}(Y)}(\mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k) & \longrightarrow & \text{Hom}_{D^b \text{coh}(Y)}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_k) \\ \downarrow \phi_{ij} \times \phi_{jk} & & \downarrow \phi_{ik} \\ \text{Hom}_{\mathfrak{Fut} \rightarrow W}(C_i, C_j) \times \text{Hom}_{\mathfrak{Fut} \rightarrow W}(C_j, C_k) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{Fut} \rightarrow W}(C_i, C_k). \end{array} \quad (16)$$

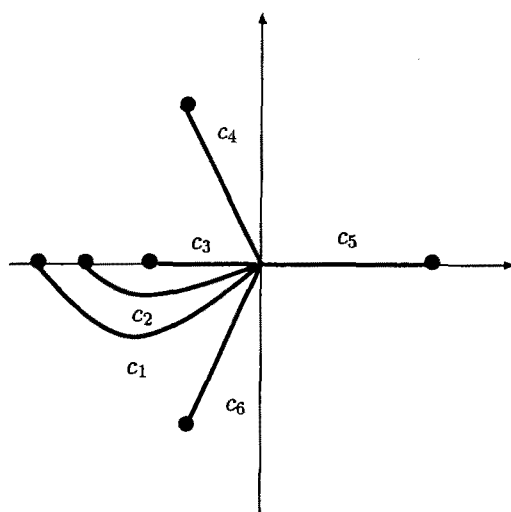


図 6: 消滅経路の distinguished set

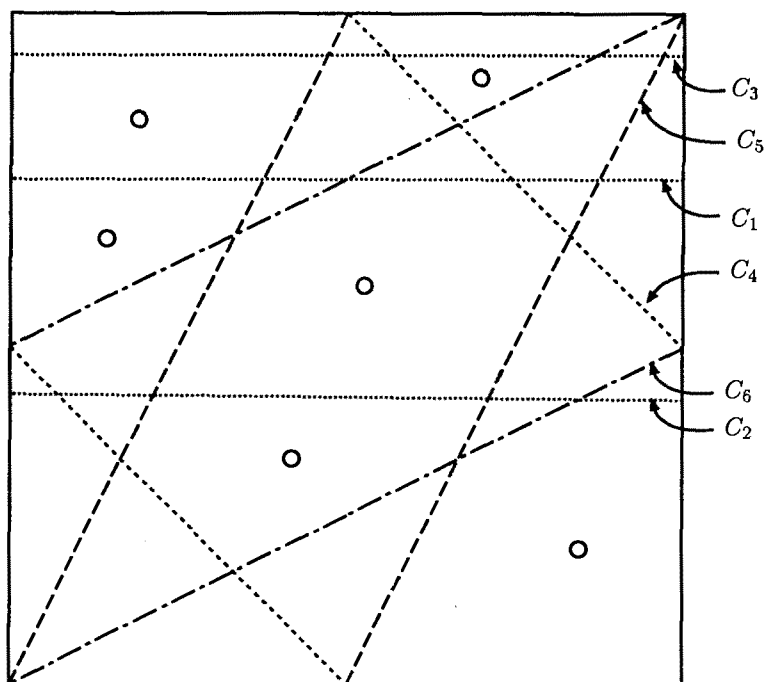


図 7: $W^{-1}(0)$ 中の消滅サイクル

証明は「塗り絵」である。[42]を見よ。

通常、 A_∞ 圏の導来圏は twisted complex [6] を使って構成される。しかし、我々の $\mathfrak{Fut} \rightarrow W$ は $k \neq 0$ に対して $\mathrm{hom}_{\mathfrak{Fut} \rightarrow W}^k(C_i, C_j) = 0$ かつ $k \neq 2$ に対して $m_k = 0$ という強い条件を満たしているので、そうする代わりに以下の定義を採用できる：

定義 7.3. $A = \oplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Fut} \rightarrow W}(C_i, C_j)$ を total morphism algebra とする。有向深谷圏の導来圏 $D^b \mathfrak{Fut} \rightarrow W$ を代数 A 上の有限次元右加群のなすアーベル圏の導来圏 $D^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$ として定義する。

我々の主定理は以下である：

定理 7.4. 三角圏の同値

$$D^b \mathrm{coh}(Y) \cong D^b \mathfrak{Fut} \rightarrow W.$$

がある。

Proof. 定理 7.2 より、

$$A \cong \oplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{D^b \mathrm{coh}(Y)}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j)$$

である。これと Bondal [7] の定理 $D^b \mathrm{coh}(Y) \cong D^b(\mathrm{mod}\text{-}(\oplus_{i,j} \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j)))$ から定理 7.4 は直ちに従う。 $\square$

系 7.5. 予想 4.2 はトーリック del Pezzo 曲面に対して成立する。

実際、深谷圏の定義から、

$$(C_i, C_j) = - \sum_k (-1)^k \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Fut} \rightarrow W}^k(C_i, C_j)$$

であるのだが ($\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Fut} \rightarrow W}$ の次数の定義をしていないが、それを見ると上が成り立つことが分かる)、これと (13) を併せると

$$\begin{aligned} S_{ij} &= -(C_i, C_j) \\ &= \sum_k (-1)^k \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Fut} \rightarrow W}^k(C_i, C_j) \\ &= \sum_k (-1)^k \dim \mathrm{Ext}^k(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) \end{aligned}$$

が得られる。

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko. *Singularities of differentiable maps. Vol. II*, volume 83 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1988. Monodromy and asymptotics of integrals, Translated from the Russian by Hugh Porteous, Translation revised by the authors and James Montaldi.
- [2] Victor V. Batyrev. Quantum cohomology rings of toric manifolds. *Astérisque*, (218):9–34, 1993. Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay (Orsay, 1992).

- [3] K. Behrend and B. Fantechi. The intrinsic normal cone. *Invent. Math.*, 128(1):45–88, 1997.
- [4] A. A. Beĭlinson. Coherent sheaves on $\mathbf{P}^n$ and problems in linear algebra. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 12(3):68–69, 1978.
- [5] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, and B. Kim. Two proofs of a conjecture of Hori and Vafa. *math.AG/0304403*.
- [6] A. Bondal and M. Kapranov. Enhanced triangulated categories. *Math. USSR Sbornik*, 70(1):93–107, 1991.
- [7] A. I. Bondal. Representations of associative algebras and coherent sheaves. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 53(1):25–44, 1989.
- [8] Alexei Bondal and Dmitri Orlov. Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences. *Compositio Math.*, 125(3):327–344, 2001.
- [9] David A. Cox and Sheldon Katz. *Mirror symmetry and algebraic geometry*, volume 68 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [10] P. Di Francesco and C. Itzykson. Quantum intersection rings. In *The moduli space of curves (Tegel Island, 1994)*, volume 129 of *Progr. Math.*, pages 81–148. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.
- [11] Boris Dubrovin. Geometry of 2D topological field theories. In *Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993)*, volume 1620 of *Lecture Notes in Math.*, pages 120–348. Springer, Berlin, 1996.
- [12] Boris Dubrovin. Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*, number Extra Vol. II, pages 315–326 (electronic), 1998.
- [13] Boris Dubrovin. Painlevé transcendents in two-dimensional topological field theory. In *The Painlevé property*, CRM Ser. Math. Phys., pages 287–412. Springer, New York, 1999.
- [14] Boris Dubrovin and Youjin Zhang. Frobenius manifolds and Virasoro constraints. *Selecta Math. (N.S.)*, 5(4):423–466, 1999.
- [15] Tohru Eguchi, Kentaro Hori, and Chuan-Sheng Xiong. Gravitational quantum cohomology. *Internat. J. Modern Phys. A*, 12(9):1743–1782, 1997.
- [16] Tohru Eguchi, Kentaro Hori, and Chuan-Sheng Xiong. Quantum cohomology and Virasoro algebra. *Phys. Lett. B*, 402(1-2):71–80, 1997.
- [17] Tohru Eguchi, Kentaro Hori, and Sung-Kil Yang. Topological σ models and large- N matrix integral. *Internat. J. Modern Phys. A*, 10(29):4203–4224, 1995.

- [18] Tohru Eguchi and Sung-Kil Yang. The topological $\mathbb{CP}^1$ model and the large- N matrix integral. *Modern Phys. Lett. A*, 9(31):2893–2902, 1994.
- [19] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono. Lagrangian intersection Floer theory. preprint available at <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fukaya/>.
- [20] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. Generalized Euler integrals and A -hypergeometric functions. *Adv. Math.*, 84(2):255–271, 1990.
- [21] Alexander B. Givental. Homological geometry and mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 472–480, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [22] Alexander B. Givental. Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic Hamiltonians. *Mosc. Math. J.*, 1(4):551–568, 645, 2001. Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100th anniversary.
- [23] Alexander B. Givental. Semisimple Frobenius structures at higher genus. *Internat. Math. Res. Notices*, (23):1265–1286, 2001.
- [24] Davide Guzzetti. Stokes matrices and monodromy of the quantum cohomology of projective spaces. *Comm. Math. Phys.*, 207(2):341–383, 1999.
- [25] Claus Hertling. *Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities*, volume 151 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [26] Nigel Hitchin. Frobenius manifolds. In *Gauge theory and symplectic geometry (Montreal, PQ, 1995)*, volume 488 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 69–112. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997. With notes by David Calderbank.
- [27] K. Hori, A. Iqbal, and C. Vafa. D-branes and mirror symmetry. hep-th/0005247.
- [28] K. Hori and C. Vafa. Mirror symmetry. hep-th/0002222.
- [29] M. M. Kapranov. On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 92(3):479–508, 1988.
- [30] M. Kontsevich and Yu. Manin. Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. *Comm. Math. Phys.*, 164(3):525–562, 1994.
- [31] Maxim Kontsevich. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. *Comm. Math. Phys.*, 147(1):1–23, 1992.
- [32] Maxim Kontsevich. Homological algebra of mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 120–139, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [33] A. G. Kouchnirenko. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. *Invent. Math.*, 32(1):1–31, 1976.

- [34] Jun Li and Gang Tian. Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of algebraic varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 11(1):119–174, 1998.
- [35] Yuri I. Manin. *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, volume 47 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [36] A. Okounkov and R. Pandharipande. The equivariant gromov-witten theory of $\mathbb{P}^1$. [math.AG/0207233](#).
- [37] A. Okounkov and R. Pandharipande. Virasoro constraints for target curves. [math.AG/0308097](#).
- [38] D. O. Orlov. Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 56(4):852–862, 1992.
- [39] A. N. Rudakov. Exceptional collections, mutations and helices. In *Helices and vector bundles*, volume 148 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–6. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [40] Kyoji Saito. Period mapping associated to a primitive form. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 19(3):1231–1264, 1983.
- [41] Paul Seidel. Vanishing cycles and mutation. In *European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000)*, volume 202 of *Progr. Math.*, pages 65–85. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [42] K. Ueda. Homological mirror symmetry for toric del pezzo surfaces. [math.AG/0411654](#).
- [43] Edward Witten. Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space. In *Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990)*, pages 243–310. Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991.
- [44] Edward Witten. Phases of $N = 2$ theories in two dimensions. *Nuclear Phys. B*, 403(1-2):159–222, 1993.
- [45] Eric Zaslow. Solitons and helices: the search for a math-physics bridge. *Comm. Math. Phys.*, 175(2):337–375, 1996.
- [46] 松澤淳一. 特異点とルート系. すうがくの風景 6. 朝倉書店, 2002.
- [47] 深谷賢治. シンプレクティック幾何学. 岩波講座現代数学の展開 21. 岩波書店, 2002.