

非線形楕円型問題の数値解に対する自由パラメータ を用いたアポステリオリ誤差評価法

新島耕一 (九州工業大学情報工学部)
(Koichi Niijima)

1 序

非線形楕円型問題の数値解に対するアプリオリな誤差解析は、数多くなされている。しかしながら、アポステリオリ誤差評価についての結果は少ない。筆者は最近、自由パラメータを利用する一つのアポステリオリ誤差評価法を提案し、非線形楕円型問題の数値解に対して事後誤差評価を行なった ([3],[4])。ここでは、これらの結果を紹介することにする。

まずはじめに、この方法の鍵をにぎる、三角形上の線積分と体積分との関係について述べる。次に、ラプラシアン項に非線形項が加わった方程式の区分一次近似解にこの方法を適用し、アポステリオリ誤差限界を計算する。さらに、ラプラシアン項そのものが非線形の形をした圧縮性流体方程式の数値解にもこの方法が適用可能で、アポステリオリ誤差限界が計算できることを示す。なお、いずれの場合にもシミュレーションを行ない、真の誤差との比較を行なう。

2 準備

序で述べたいずれの非線形楕円型方程式も、2次元ユークリッド空間 R^2 における有界領域 Ω において考察する。 Ω の境界 $\partial\Omega$ は、 Ω を三角形分割した場合、境界とのすき間が生じないように折れ線からなっているものとする。

これから必要な関数空間を用意しておこう。 ω を R^2 における領域とする。超関数の意味での ℓ 回までの導関数が $L^2(\omega)$ に属す空間を $H^\ell(\omega)$ で表し、さらにトレースが 0 となる空間を $H_0^\ell(\omega)$ で表す。また、 $(\cdot, \cdot)$ によって $L^2(\Omega)$ 内積を表し、 $\|\cdot\|_p$ によって $L^p(\Omega)$ ノルムを表そう。

Ω を三角形分割し、それぞれの三角形を τ や τ_- 、 τ_+ などで表し、格子幅を代表して h で表す。 F で分割三角形の集合を表す。また、分割三角形の辺を γ や γ_i で表し、 E_Ω で $\partial\Omega$ 上にない分割三角形の辺の集合を表す。 $\partial\Omega$ 上にある分割三角形の辺の集合は $E_{\partial\Omega}$ で表す。 $E = E_\Omega \cup E_{\partial\Omega}$ とおく。 τ の境界は $\partial\tau$ で表す。また、 $(\cdot, \cdot)_\tau$ によって $L^2(\tau)$ 内積を表し、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$ によって $L^2(\gamma)$ 内積を表す。

τ の頂点を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ で表し、それぞれの頂点に対応する辺を $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ で表すと、次の補題が成り立つ:

補題 1。 $g \in H^1(\tau)$ とする。そのとき、次の式が成り立つ:

$$\langle 1, g \rangle_{\gamma_3} = h_3^{-1} [2(1, g)_\tau + (x - x_3, g_x)_\tau + (y - y_3, g_y)_\tau].$$

ただし、 h_3 は頂点 (x_3, y_3) から辺 γ_3 に下した垂線の長さである。

以後では、この補題が重要な役割を演じる。

3 方程式 $-\Delta u + f(x, y, u, \nabla u) = 0$

次の問題を考える:

$$-\Delta u + f(x, y, u, \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.1)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (3.2)$$

ただし、 $\nabla u = (u_x, u_y)$ である。

(3.1), (3.2) の弱解を次のように定義する :

任意の $v \in H_0^1(\Omega)$ に対し

$$(\nabla u, \nabla v) + (f(x, y, u, \nabla u), v) = 0 \quad (3.3)$$

を満たす解 $u \in H_0^1(\Omega)$ を (3.1), (3.2) の弱解という。

つぎの仮定をおく :

H1. f は次の条件を満たす:

$$|f(x, y, s, t)| \leq C[a(x, y) + |s|^\mu + |t|^\nu].$$

ただし、 C は正定数であり、 a は $L^p(\Omega)$ ($p > 1$) の元で、 μ と ν は、それぞれ、 $\mu = p - 1$, $\nu = 2(p - 1)/p$ である、

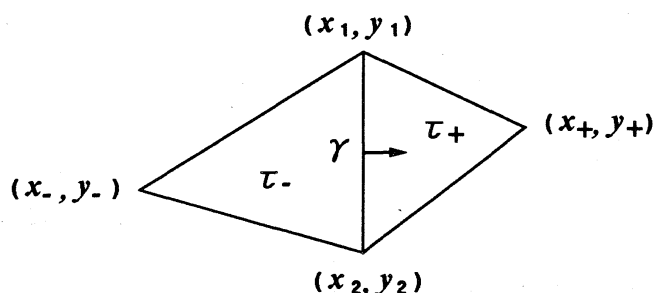
H2. $v, w \in H_0^1(\Omega)$ に対して、

$$\begin{aligned} (\nabla(v - w), \nabla(v - w)) + (f(x, y, v, \nabla v) - f(x, y, w, \nabla w), v - w) \\ \geq \alpha \|v - w\|_2^2 + \beta \|\nabla(v - w)\|_2^2 \end{aligned}$$

を満たす $\alpha \geq 0$ と $\beta > 0$ が存在する。

仮定 H1 と H2 のもとで、(3.3) は一意な解をもつことが知られている ([2]p.143, p.247)。

E に属するそれぞれの辺に対して、その法線方向を n で表そう。 $\gamma \in E_\Omega$ を共通辺にもつ2つの三角形を τ_- と τ_+ で表わす。ただし、 n は τ_- から τ_+ へ向いているとする。



u^h を (3.3) の連続な区分的一次近似解とし,

$$\left[\frac{\partial u^h}{\partial n} \right]_{\gamma} = \frac{\partial u^h}{\partial n} \Big|_{\tau_+} - \frac{\partial u^h}{\partial n} \Big|_{\tau_-}$$

によって $\partial u^h / \partial n$ の γ における飛躍を表す。あとの便宜上、 $\gamma \in E_{\partial\Omega}$ に対しては、

$$\left[\frac{\partial u^h}{\partial n} \right]_{\gamma} = 1$$

と定義しておく。これらの量は、 n の向きに依存しないことに注意しよう。

$\tau \in F$ の各辺を $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ で表し、作用素 Δ_{τ}^h を

$$\Delta_{\tau}^h u^h = 2 \sum_{i=1}^3 w_{\tau,i} h_i^{-1} \left[\frac{\partial u^h}{\partial n} \right]_{\gamma_i}$$

で定義する。ただし、 $\gamma_i \in E_{\Omega}$ の場合には、 $w_{\tau,i}$ と、 γ_i を共有する三角形 τ' におけるパラメータ $w_{\tau',i'}$ との間に

$$w_{\tau,i} + w_{\tau',i'} = 1$$

なる関係がある。もし $\gamma_i \in E_{\partial\Omega}$ ならば、 $w_{\tau,i}$ は任意で、定義より $\left[\frac{\partial u^h}{\partial n} \right]_{\gamma_i} = 1$ である。

さらに、2次元ベクトル r_{τ}^h を

$$r_{\tau}^h = \left(\sum_{i=1}^3 w_{\tau,i} h_i^{-1} \left[\frac{\partial u^h}{\partial n} \right]_{\gamma_i} (x - x_i), \sum_{i=1}^3 w_{\tau,i} h_i^{-1} \left[\frac{\partial u^h}{\partial n} \right]_{\gamma_i} (y - y_i) \right)$$

によって定義しよう。

また、 $\Delta^h = (\Delta_{\tau}^h)_{\tau \in F}$ と $r^h = (r_{\tau}^h)_{\tau \in F}$ によって、それぞれ、 Δ^h と r^h を定義する。また、パラメータ $w_{\tau,i}$ の集合を W によって表す。

次の補題が成り立つ：

補題2。 u を (3.3) の解とし、 u^h を (3.3) の連続な区分的一次近似解とする。 $e = u - u^h$ とおく。また、 L を

$$L = (\nabla e, \nabla e) + (f(x, y, u, \nabla u) - f(x, y, u^h, \nabla u^h), e)$$

で定義する。そのとき、

$$L = -(-\Delta^h u^h + f^h, e) + (r^h, \nabla e)$$

が成り立つ。ただし、 $f^h = f(x, y, u^h, \nabla u^h)$ である。

証明。 e の定義により、

$$L = (\nabla u, \nabla e) + (f(x, y, u, \nabla u), e) - (\nabla u^h, \nabla e) - (f(x, y, u^h, \nabla u^h), e).$$

ここで

$$(\nabla u, \nabla e) + (f(x, y, u, \nabla u), e) = 0$$

を用いると、

$$\begin{aligned} L &= -(\nabla u^h, \nabla e) - (f(x, y, u^h, \nabla u^h), e) \\ &= M - (f(x, y, u^h, \nabla u^h), e). \end{aligned}$$

M を各三角形上の積分の和で表し、それぞれの積分を部分積分して飛躍記号を使って表すと、

$$M = \sum_{\gamma \in E_\Omega} \left[\frac{\partial u^h}{\partial n} \right]_\gamma \langle 1, e \rangle_\gamma + \sum_{\gamma \in E_{\partial\Omega}} w_{\tau, \gamma} \langle 1, e \rangle_\gamma. \quad (3.4)$$

$\gamma \in E_\Omega$ に対しては γ を共有する三角形が2個あるから、それらを τ_- と τ_+ で表し、それぞれに対して補題1を適用すると

$$\begin{aligned} \langle 1, e \rangle_\gamma &= h_-^{-1} [2(1, e)_{\tau_-} + (x - x_-, e_x)_{\tau_-} + (y - y_-, e_y)_{\tau_-}], \\ \langle 1, e \rangle_\gamma &= h_+^{-1} [2(1, e)_{\tau_+} + (x - x_+, e_x)_{\tau_+} + (y - y_+, e_y)_{\tau_+}]. \end{aligned}$$

ここで、 $w_{\tau_-} + w_{\tau_+} = 1$ を満たすパラメータ w_{τ_-} と w_{τ_+} を上式のそれぞれに掛け、加え合わせた結果を (3.4) に代入すると補題 2 の結果が得られる。

仮定 H2 と補題 2 を用いると次の定理が成り立つ。

定理 1。 u を (3.3) の解とし、 u^h を (3.3) の連続な区分的一次近似解とする。 $e = u - u^h$ とおく。 α と β を仮定 H2 に現れた定数としよう。

そのとき、 $\alpha > 0$ の場合には、次のアポステリオリ誤差評価が成り立つ：

$$(2\alpha - \rho)\|e\|_2^2 + (2\beta - \lambda)\|\nabla e\|_2^2 \leq \inf_W \left(\frac{1}{\rho} \|\cdot - \Delta^h u^h + f^h\|_2^2 + \frac{1}{\lambda} \|r^h\|_2^2 \right).$$

ただし、 ρ と λ は、 $2\alpha \geq \rho > 0$ と $2\beta \geq \lambda > 0$ を満たすものとする。

さらに、 $\alpha \geq 0$ の場合には、次のアポステリオリ誤差評価が成り立つ：

$$2\alpha\|e\|_2^2 + \beta\|\nabla e\|_2^2 \leq \frac{1}{\beta} \inf_W \left(\frac{1}{K} \|\cdot - \Delta^h u^h + f^h\|_2 + \|r^h\|_2 \right)^2.$$

ただし、 K は

$$K = \pi \sqrt{\frac{1}{\ell_x^2} + \frac{1}{\ell_y^2}}$$

で与えられ、 ℓ_x と ℓ_y は、それぞれ、 Ω の x -軸 と y -軸 への射影の長さを表す。

4 シミュレーション 1

前節の結果を次の問題に適用する。

問題。

$$\begin{aligned} -\Delta u + \cos(u) &= f_1 & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

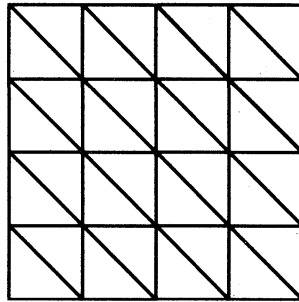
ただし、 f_1 は

$$u(x, y) = 8x(y - 1) \sin(\pi y(x - 1))$$

が上の方程式を満たすように選ばれる。仮定 H1 が満たされることは容易にわかる。また、 $K = \sqrt{2}\pi$ として

$$\begin{aligned} (\nabla(v - w), \nabla(v - w)) + (\cos(v) - \cos(w), v - w) \\ \geq \|\nabla(v - w)\|_2^2 - \|v - w\|_2^2 \\ \geq \left(1 - \frac{1}{K^2}\right) \|\nabla(v - w)\|_2^2 \end{aligned}$$

が満たされるので、仮定 H2 は $\alpha = 0$ 、 $\beta = 1 - \frac{1}{K^2}$ として満たされる。区間 $(0, 1)$ を m 等分し、 Ω を次のように三角形分割する：



連続な区分的一次近似解 u^h は、汎関数

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u^h|^2 + \sin(u^h) - f_1 u^h \right] dx dy$$

を最小にすることによって求め、それを用いて

$$\inf_W \left[\frac{1}{K^2} \| -\Delta^h u^h + \cos(u^h) - f_1 \|_2^2 + \| r^h \|_2^2 \right]$$

を共役勾配法で解いてアポステリオリ誤差限界を計算した。なお、比較のために真の誤差 $\|\nabla e\|_2$ も計算した：

m	$\ \nabla e\ _2$	アポステリオリ誤差限界
4	1.458	2.557
6	0.987	1.753
8	0.744	1.327
10	0.597	1.067
12	0.498	0.891
14	0.427	0.765
16	0.374	0.670

アポステリオリ誤差限界は、 $O(m^{-1})$ で減少している。

5 圧縮性流体方程式

次の圧縮性流体方程式を考えよう：

$$\nabla \cdot \left[\left(1 - \frac{\theta - 1}{2} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{\theta - 1}} \nabla u \right] = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (5.1)$$

ただし、 $\theta \leq -1$ である。(5.1) の弱形式は次のように書ける：

$$\left((1 + \alpha |\nabla u|^2)^{\frac{1}{\theta - 1}} \nabla u, \nabla v \right) = 0, \quad v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.2)$$

ただし、 $\alpha = -\frac{\theta - 1}{2}$ とおいた。この方程式に次のディリクレ境界条件

$$u = z \quad \text{on } \partial\Omega \quad (5.3)$$

を課す。もし Ω が狭義凸で、 z が、有界傾斜条件を満たす $\tilde{z} \in H^2(\Omega)$ のトレースならば、問題 (5.2), (5.3) は一意な解をもつ ([1])。

いま、 u を (5.2),(5.3) の解とし、 v^h を、(5.2),(5.3) の数値解とする。そして、 $e = u - v^h$ とおき、3節のようにして e のアポステリオリ誤差限界を計算したい。ところが、 v^h は区分的一次関数とは限らないのでそのままではうまくいかない。そこで、 v^h の連続な区分的一次補間 u^h を媒介にして誤差評価を進める。

$$\rho_\theta = (1 + \alpha |\nabla u^h|^2)^{\frac{1}{\theta-1}}$$

とおき、 $\gamma \in E_\Omega$ に対して $\rho_\theta \partial u^h / \partial n$ の飛躍を3節と同じように定義する：

$$\left[\rho_\theta \frac{\partial u^h}{\partial n} \right]_\gamma = \rho_\theta \frac{\partial u^h}{\partial n} \Big|_{\tau_+} - \rho_\theta \frac{\partial u^h}{\partial n} \Big|_{\tau_-}.$$

もちろん、 $\gamma \in E_{\partial\Omega}$ に対しては、 $[\rho_\theta \frac{\partial u^h}{\partial n}]_\gamma = 1$ と定義する。ここで

$$D_\tau^{h,\theta} u^h = -2\theta \sum_{i=1}^3 w_{\tau,i} h_i^{-1} \left[\rho_\theta \frac{\partial u^h}{\partial n} \right]_{\gamma_i}$$

と

$$r_\tau^{h,\theta} = -\theta \left(\sum_{i=1}^3 w_{\tau,i} h_i^{-1} \left[\rho_\theta \frac{\partial u^h}{\partial n} \right]_{\gamma_i} (x - x_i), \sum_{i=1}^3 w_{\tau,i} h_i^{-1} \left[\rho_\theta \frac{\partial u^h}{\partial n} \right]_{\gamma_i} (y - y_i) \right)$$

によって、それぞれ、作用素 $D_\tau^{h,\theta}$ と 2次元ベクトル $r_\tau^{h,\theta}$ を定義する。さらに、 $D^{h,\theta} = (D_\tau^{h,\theta})_{\tau \in F}$, $r^{h,\theta} = (r_\tau^{h,\theta})_{\tau \in F}$ とおく。 W はパラメータ w_τ の集合としよう。

次の補題が成り立つ：

補題 3。 M_θ を

$$M_\theta = \theta(\rho_\theta \nabla u^h, \nabla e)$$

によって定義する。そのとき、

$$M_\theta = (D^{h,\theta} u^h, e) + (r^{h,\theta}, \nabla e)$$

が成り立つ。

証明は補題 2 の証明と同じである。

まず、Chaplygin 気体流、つまり、 $\theta = -1$ の場合を考えよう。

次の結果が成り立つ：

定理 2。 u を $\theta = -1$ の場合の (5.2), (5.3) の解とし、 v^h を同じ問題の数値解とする。 $e = u - v^h$ とおく。 u^h で v^h の連続な区分的一次補間を表そう。

$$k = \max_{\Omega} |\nabla v^h|, \quad K_{-1} = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v^h|^2} dx dy$$

とおく。

そのとき、つぎのアポステリオリ誤差評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} \|\nabla e\|_1 \leq & K_{-1} \sqrt{1 + k^2} (k + \sqrt{1 + k^2}) \\ & \cdot \left(\inf_W (\|D^{h,-1} u^h\|_2 + \|r^{h,-1}\|_\infty) + \left\| \frac{\nabla v^h}{\sqrt{1 + |\nabla v^h|^2}} - \frac{\nabla u^h}{\sqrt{1 + |\nabla u^h|^2}} \right\|_\infty \right). \end{aligned}$$

証明の本質は、補題 3 における M_{-1} の下からの評価である。詳細は論文 [4] にある。

次に、一般の気体流、つまり、 $\theta \leq -1$ の場合を考えよう。

次の結果が成り立つ：

定理 3。 u を $\theta \leq -1$ の場合の (5.2), (5.3) の解とし、 v^h を同じ問題の数値解とする。 $e = u - v^h$ とおく。 u^h で v^h の連続な区分的一次補間を表そう。

$$k = \max_{\Omega} |\nabla v^h|, \quad K_{\theta} = \int_{\Omega} (1 + \alpha |\nabla v^h|^2)^{\frac{\theta}{\theta-1}} dx dy$$

とおく。

そのとき、次のつぎのアポステリオリ誤差評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} \|\nabla e\|_1 \leq & -\frac{2K_{\theta}}{\theta \left(1 - \frac{k}{\sqrt{\alpha}\sqrt{1+\alpha k^2}}\right)} \\ & \left(\inf_W (\|D^{h,\theta} u^h\|_2 + \|r^{h,\theta}\|_{\infty}) \right. \\ & \left. - \theta \|(1 + \alpha |\nabla v^h|^2)^{\frac{1}{\theta-1}} \nabla v^h - (1 + \alpha |\nabla u^h|^2)^{\frac{1}{\theta-1}} \nabla u^h\|_{\infty} \right). \end{aligned}$$

定理 2 と同様に、証明は補題 3 における M_{θ} の下からの評価が本質的である。詳しくは論文 [4] にある。

6 シミュレーション 2

領域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ で Chaplygin 気体流 ($\theta = -1$) の方程式を考える。

$$u(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \tan\left(\frac{2\pi}{5}y - \frac{\pi}{5}\right)$$

がこの方程式の解で、境界条件

$$z(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \tan\left(\frac{2\pi}{5}y - \frac{\pi}{5}\right), & x = 0, \\ \frac{1}{2} \tan\left(\frac{2\pi}{5}y - \frac{\pi}{5}\right), & x = 1, \\ (-x + \frac{1}{2}) \tan\left(\frac{\pi}{5}\right), & y = 0, \\ (x - \frac{1}{2}) \tan\left(\frac{\pi}{5}\right), & y = 1 \end{cases}$$

を満たすことは容易にわかる。4節と同じように Ω を三角形分割する。境界条件を満たす数値解 v^h は次のようにして求める。まず、境界上で z の一次補間と一致し、

$$J(u^h) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u^h|^2} dx dy$$

を最小にするような連続な区分的一次関数 u^h を求める。そのあと、 u^h の境界三角形要素を、境界条件を満たすように補正し、 v^h とする。

この v^h に対して定理 2 のアポステリオリ誤差限界を計算する。しかしながら、この限界は混合型の最小化問題になっており、計算するのが容易でない。そこで、代わりに

$$\|D^{h,-1}u^h\|_2^2 + \text{a small constant} \times \|r^{h,-1}\|_2^2 \longrightarrow \min$$

を共役勾配法で解く。得られた結果は次のとおりである。なお、比較のために真の誤差 $\|\nabla e\|_1$ も計算した：

m	$\ \nabla e\ _1$	アポステリオリ誤差限界
4	0.212	0.596
6	0.145	0.411
8	0.112	0.321
10	0.092	0.263
12	0.077	0.222
14	0.067	0.193
16	0.059	0.170
18	0.053	0.153

アポステリオリ誤差限界は、 $O(m^{-1})$ で減少している。

なお、シミュレーション 1、2 のいずれもパソコン EPSON PC-386 noteW
上で Turbo Pascal Ver.5.5 を用いて行った。

参考文献

- [1] H.Dinh and G.F.Carey, Approximate analysis of regularized compressible flow using the fictitious gas concept, *Nonlinear analysis*, 11, 861-875(1987).
- [2] S.Fucik and A.Kufner, *Nonlinear Differential Equations*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1980.
- [3] K.Nijima, A posteriori error bounds for piecewise linear approximate solutions of elliptic equations of monotone type, *Mathematics of Computation*, 58, 549-560(1992).
- [4] K.Nijima, A posteriori error bounds for numerical solutions of regularized compressible flow problems, *Communications in Applied Numerical Methods*, in press.