

Asymptotic behavior of the Bellman equation

徳島大総合 長井 英生

$\mathbb{R}^N$ 上の非線型偏微分方程式 (1) を考える.

$$(1) \quad -\frac{1}{2}\Delta u_\alpha + \frac{1}{2}|\nabla u_\alpha|^2 + \alpha u_\alpha = V(x).$$

ここで $V(x)$ は,

$$(A.1) \quad V(x) \geq 0, \text{ smooth, } \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

なるものとする。この方程式は、次の (2) のように書き換える事により Bellman 方程式と見なせる。

$$(2) \quad -\frac{1}{2}\Delta u_\alpha + \alpha u_\alpha = \inf_{z \in \mathbb{R}^N} \left\{ z \cdot \nabla u_\alpha + \frac{1}{2}|z|^2 + V(x) \right\}.$$

この方程式の正值解 u_α の $\alpha \rightarrow 0$ とした時の挙動を調べようというのが、我々の問題である。この問題の意味を見るために次の線型の問題に立ち返ってみる。

なめらかな領域 D 上で 次の Neuman 問題を考えよう。

$$(3) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta \xi_\alpha + \alpha \xi_\alpha = f(x), & x \in D \\ \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial n} = 0 & x \in \partial D \end{cases}$$

この解 ξ_α は $\alpha \rightarrow 0$ とした時, Poincaré の不等式を使えば

$$\alpha \xi_\alpha(x) \longrightarrow \frac{1}{|D|} \int f(x) dx \equiv \langle f \rangle \quad \text{in } H^1(D)$$

$$\xi_\alpha(x) - \langle \xi_\alpha(x) \rangle \longrightarrow \exists \xi$$

となることがわかり、ここで ξ は

$$(4) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta \xi + \langle f \rangle = f \\ \frac{\partial \xi}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

を満たし、 $\langle \xi \rangle = 0$ である。この事実は確率論的立場から見れば、対応する拡散過程（反射壁ブラウン運動）のエルゴード性に基つくものである。すなわち、 $\bar{D}$ 上の反射壁ブラウン運動を $M = (\Omega, \mathcal{B}, P, X_t)$ とするときその不変測度は $m(dx) = \frac{1}{|D|} dx$ であり、任意の有界連続関数 f に対して

$$T_t f(x) \equiv E_x[f(X_t)] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle f \rangle = \int f(x) m(dx).$$

であり、この収束は指数的に速い。すなわち

$$(*) \quad |T_t f(x) - \langle f \rangle| \leq \gamma e^{-\beta t} \|f\|_\infty, \quad \exists \gamma > 0, \beta > 0.$$

従って

$$\begin{aligned} \alpha \xi_\alpha(x) - \langle f \rangle &= \alpha E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right] - \langle f \rangle \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} (T_t f - \langle f \rangle) dt \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

でありかつ、

$$\xi_\alpha(x) - \langle \xi_\alpha(x) \rangle = \int_0^\infty e^{-\alpha t} (T_t f - \langle f \rangle) dt \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty (T_t f - \langle f \rangle) dt = \xi(x)$$

となる。この現象を D 上の確率制御問題を特徴づける。

Bellman 方程式に対して、考えて見るのは自然である。すなわち、次の Bellman 方程式を考える。

$$(5) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta \tau_\alpha + \alpha \tau_\alpha = H(x, \nabla \tau_\alpha) & x \in D \\ \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial n} = 0 & x \in \partial D \end{cases}$$

ここで $H(x, \nabla \tau_\alpha) = \inf_{z \in I} \{ b(x, z) \nabla \tau_\alpha + f(x, z) \}$ 。この右辺

の $\inf$ が、ある $z_\alpha(x) \in I$ で attain されるとすると、すなわち、
 $H(x, \nabla \tau_\alpha) = b(x, z_\alpha(x)) \nabla \tau_\alpha + f(x, z_\alpha(x))$ とすると、

対応する確率制御問題で最適な拡散過程の生成作用素は、

Neuman 条件を持つ $-\frac{1}{2} \Delta + b(x, z_\alpha(x)) \nabla$ であり、これは、
 やはり、エルゴートの的であり、不変測度 $m_\alpha(dx) = m_0(x) dx$ をもつ。
 またこの拡散過程は α をとめる毎に (*) の条件を満たす。

この時、不変測度は α に depend しているため、(5) の解 τ_α の漸近挙動を見る事は上の様にはやさしくないが、 $m_0(x)$ の α に関係しない評価式を得る事により、解析的証明で上と同様

の議論ができる (cf. [1]). すなわち $\alpha \rightarrow 0$ とした時

$$\alpha z_\alpha \rightarrow \exists X$$

$$\in H^1(D)$$

$$z_\alpha - \langle z_\alpha \rangle \rightarrow \exists z$$

で、 z, X は

$$(b) \begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta z + X = H(\alpha, \nabla z) \\ \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

を満たし $\langle z \rangle = 0$ である。ここで X は定数である。この証明で基本的な事は、Poincaré の不等式を使う事であるが、それは確率論的には、反射壁拡散過程の一意エルゴード性 (c) に対応している。

この種の問題を $\mathbb{R}^N$ 全体で考えようとする時、(c) の条件が保証されないため、有界領域での問題と同じ方法はとれない。方程式 (1) 又は (2) に戻って考えよう。(2) の正値解 U_α が得られたとする。このとき (2) の右辺の $\inf$ は $-\nabla U_\alpha$ で attain されるので、Bellman 方程式の立場に立てば、

$$(7) \quad -\frac{1}{2} \Delta + \nabla U_\alpha \cdot \nabla$$

が最適な拡散過程の生成作用素と見なせる。この拡散過程は $U_\alpha \equiv e^{-U_\alpha} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ であるならばエルゴード的であり、

その不変測度は $\frac{u_0^2(x)}{\|u_0\|_2^2} dx$ である。従ってそのような解 u_α が見つかる状況があるならば、その時は、上の議論のアナロジーが考えられるとするのは自然であろう。我々は、変換 $u_\alpha = e^{-u}$ により、方程式 (1) を u_α に関するもの

$$(8) \quad -\frac{1}{2}\Delta u_\alpha + V u_\alpha = -\alpha u_\alpha \log u_\alpha$$

に変換し、(8) の L^2 -solution の存在を議論する事から始めて、所期の問題を解決する。この問題が シュレーディンガー作用素の固有値問題に関連する事は興味深い。以下に得られた結果を掲げる。(cf. [2]).

$L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の シュレーディンガー作用素 $-\frac{1}{2}\Delta + V$ の第 i 固有値を λ_i とし、 λ_i に対応する固有関数を ϕ とする。但し、 $\int \phi^2(x) dx = 1$ と正規化されたものとする。仮定 (A, 1) の下では λ_i は単純でかつその固有関数 $\phi(x)$ は至る所正で $|x| \rightarrow \infty$ のとき指数的に速く減少する事が知られている。(cf. [3]).

$$L_{V,\mu}^2 = \left\{ z \mid \int z^2 \beta_\mu^2 < +\infty, \int V z^2 \beta_\mu^2 dx < +\infty \right\}$$

$$\beta_\mu(x) = \exp \left\{ -\mu(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad 0 < \frac{\mu^2}{2} < \alpha$$

$$\phi_\alpha(x) = c e^{-\frac{\alpha}{2}x} \phi(x), \quad \text{ここで } c \text{ は } \sup_x c \phi(x) = 1 \text{ なる定数}$$

$$H_{V,\mu}' = \left\{ z \in L_{V,\mu}^2 \mid \int |\nabla(z \beta_\mu)|^2 dx < +\infty \right\}$$

X_α は

$$(9) \quad -\frac{1}{2}\Delta X_\alpha + (V - \lambda_1)X_\alpha + \alpha X_\alpha = \alpha e^{-\frac{\lambda_1}{\alpha}}$$

の $H_{V,\mu}^1$ での一意解とする。 ($0 < \frac{\mu^2}{2} < \alpha$ なので存在す

3). このとき

$$K_\alpha = \{z \in L_{V,\mu}^2 \mid \phi_\alpha \leq z \leq X_\alpha \wedge 1\}$$

とおく。

定理 1. 仮定 (A.1) の下で 方程式 (8) は K_α 内に最小解と最大解をもつ。

定理 2 仮定 (A.1) と次の仮定 (A.2) の下で

$$(A.2) \quad e^{-\delta\sqrt{V}} \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad \exists \delta > 0$$

(8) は $0 < \alpha < \frac{1}{5}$ のとき、 $H_{V,\mu}^1$ に一意解 u_α をもち、かつ $u_\alpha \in H_V^1$ である。

定理 3. u_α を (8) の K_α 内の任意の解とする。このとき

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (-\alpha \log u_\alpha(x)) = \lambda_1.$$

$$L^2_\phi = \{ f \mid \int f^2 \phi^2 dx \}$$

$$H^1_\phi = \{ f \in L^2_\phi \mid |\nabla f| \in L^2_\phi \}$$

としよう。次の定理が目指したものである。

定理 4 (A.1) (A.2) を仮定する。 $u_\alpha \in (8)$ の解とし $v_\alpha = -\log u_\alpha$ とおく。この時

$$v_\alpha - \int v_\alpha \phi^2 dx \longrightarrow w = -\log \phi + \int \phi^2 \log \phi dx \quad \text{in } H^1_\phi.$$

- [1] Bensoussan, A. - Blankenship, G : Singular perturbations in stochastic control, Lect. Notes Cont. Inf. Sci. 90 (1987) 171-260
- [2] Bensoussan, A. - Nagai, H. : An ergodic control problem arising from the principal eigen function of an elliptic operator, to appear
- [3] Reed, M. - Simon, B. : Methods of Modern Mathematical Physics IV, Academic Press, New York (1979)