

BERENSTEIN-ZELEVINSKY DATA AND THE CRYSTAL BASIS OF U_q^- IN TYPE $A_{n-1}^{(1)}$

東京大学大学院数理科学研究科 齊藤 義久 (Yoshihisa Saito)
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

1. INTRODUCTION

1.1. $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元単純 Lie 代数, $\mathfrak{g}^\vee$ をその Langlands dual とする. Mirković-Vilonen は [MV1] において, Mirković-Vilonen cycle と呼ばれる, $\mathfrak{g}$ に付随する affine Grassmannian の中の代数的サイクルを導入した. 正確な定義を述べようとすると affine Grassmannian の幾何学や交叉コホモロジー等, 大道具が必要となるのでここでは割愛するが, その後 Kamnitzer ([Kam1], [Kam2]) により, Mirković-Vilonen cycle の持つある種の幾何学的な情報を組合せ論的に翻訳した, Mirković-Vilonen polytope (MV polytope) なる概念が定式化された. これは $\mathfrak{g}^\vee$ の実の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^\vee$ の中に描かれた凸多面体である. Kamnitzer は, ある種の正規化条件を満たす MV polytope 全体の集合が crystal の構造を持ち, さらに crystal として $U_q(\mathfrak{g}^\vee)$ の crystal basis である $B(\infty)$ と同型であることを示した. $B(\infty)$ を実現する方法はこれまでもいくつか知られているが, Kamnitzer の結果により, MV polytope を用いた新しい実現の方法が得られたことになる. また Kamnitzer は, MV polytope を用いて $U_q(\mathfrak{g}^\vee)$ の有限次元既約表現の crystal basis を実現する方法も与えている.

その後の MV polytope に関する研究としては, その組合せ論的性質調べた [NS1], [NS2], affine Grassmannian の幾何学とのより詳細な関係を調べた [KNS1], [KNS2] 等が挙げられる. また最近では quiver の表現論との関係も明らかになりつつある ([KamS], [BK], [S]).

1.2. ここで 1 つ注意しておきたいことは, MV polytope を用いた方法で実現されているのは, 有限次元単純 Lie 代数に付随する crystal のみで, affine 型をはじめとする一般の Kac-Moody Lie 代数に付随する crystal に関しては, その方法を与えていないという点である.

幾何学的な立場から, Mirković-Vilonen cycle の概念を affine の場合に拡張しようという試みはいくつか知られているが, 関連する幾何学の難しさから, 現時点では十分に整備されているとは言えない状況にあると思う. 今回の小論では, とりあえず affine Grassmannian 等の幾何学的な背景を忘れて, 純粋に組合せ論的な立場から MV polytope の概念を affine 型に拡張する試みを紹介したい. 以下では, affine 型の場合の中で最も基本的な $A_{n-1}^{(1)}$ 型の場合に限定して話をすすめる.

1.3. ただし, 拡張すると言っても, MV polytope の概念を直接 $A_{n-1}^{(1)}$ 型の場合に拡張するわけではなく, MV polytope と同値なデータである “Berenstein-Zelevinsky data” なる概念を $A_{n-1}^{(1)}$ 型の場合に拡張することになる. ここで, 有限の A 型の場合に限定して MV polytope と Berenstein-Zelevinsky data の関係を簡単におさらいしておく.

$\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ を A_m 型の fundamental weights, $W = \mathfrak{S}_{m+1}$ を Weyl 群として,

$$\Gamma := \bigcup_{w \in W, 1 \leq i \leq m} w\Lambda_i$$

とおき, $\gamma \in \Gamma$ を chamber weight と呼ぶ.

まず Kamnitzer ([Kam1]) にしたがって Berenstein-Zelevinsky datum の定義を述べよう. chamber weights でパラメトライズされた整数の組

$$\mathbf{M} := (M_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \quad (M_\gamma \in \mathbb{Z})$$

が不等式

$$M_{ws_i\Lambda_i} + M_{w\Lambda_i} + \sum_{j \neq i} a_{j,i} M_{w\Lambda_j} \leq 0 \quad (\forall w \in W, 1 \leq \forall i \leq m), \quad (1.3.1)$$

および,

関係式: $a_{i,j} = a_{j,i} = -1$ かつ $ws_i > w, ws_j > w$ のとき

$$M_{ws_i\Lambda_i} + M_{ws_j\Lambda_j} = \min\{M_{w\Lambda_i} + M_{ws_is_j\Lambda_j}, M_{ws_js_i\Lambda_i} + M_{w\Lambda_j}\} \quad (1.3.2)$$

を満たすとき, Berenstein-Zelevinsky datum (BZ datum) であるという. ただし $>$ は Bruhat order である. 不等式 (1.3.1) は edge inequality (EI), 関係式 (1.3.2) は tropical Plücker relation (TP) と呼ばれる.

BZ datum $\mathbf{M} := (M_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ 対して, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 内の polytope¹

$$P(\mathbf{M}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \alpha, \gamma \rangle \geq M_\gamma \text{ for all } \gamma \in \Gamma\}$$

を考える. このとき次が知られている.

Proposition 1.3.1 ([Kam1]). $P(\mathbf{M})$ の頂点は

$$\mu_w := \sum_{i=1}^n M_{w\Lambda_i} w h_i \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \quad (w \in W)$$

で与えられる. ここに h_i ($1 \leq i \leq n$) は simple coroot である. すなわち, $P(\mathbf{M})$ は $\mu_\bullet := (\mu_w)_{w \in W}$ の convex hull である.

したがって, 有限の A_m 型の場合には, BZ datum $\mathbf{M}$ を与えることと, MV polytope $P(\mathbf{M})$ を与えることは同値である². 今回は (MV polytope ではなく) BZ datum $\mathbf{M}$ の方を affine 型に拡張することになる.

Acknowledgment. この研究は筑波大学の内藤聡, 佐垣大輔両氏との共同研究に基づく.

2. 有限 A 型の場合 (復習)

2.1. Berenstein-Zelevinsky data. BZ datum の定義はすでに introduction で述べたが, 後の都合で多少フォーミュレーションを替える必要があるので, (繰り返しになるが) もう一度述べておく.

$I = [l+1, l+m]$ を $\mathbb{Z}$ の有限区間とし, $\mathfrak{g}_I$ を A_m 型 simple Lie algebra とする. Lie algebra としては, もちろん $\mathfrak{g}_I$ は $\mathfrak{sl}_{m+1}(\mathbb{C})$ と同型であるが, $\mathfrak{g}_I$ の simple root は $(1, \dots, m$ ではなく) I で index 付けされているものとする. 以下 $\mathfrak{h}_I$ を $\mathfrak{g}_I$ の Cartan subalgebra, α_i ($i \in I$) を simple roots, h_i ($i \in I$) を simple coroots, Λ_i ($i \in I$) を fundamental weights, $W_I \cong \mathfrak{S}_{m+1}$ を Weyl 群とする.

$\Gamma_I := \bigcup_{i \in I} W_I \Lambda_i$ を I に付随する chamber weight の集合と呼ぶ. I に付随する BZ datum とは, Γ_I でパラメトライズされた整数の組 $\mathbf{M} = (M_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_I}$ であって, edge inequalities (EI) と tropical Plücker relations (TP) と呼ばれる 2 つの条件を満たすもののことをいう. オリジナルの Kamniter [Kam1], [Kam2] 等, 多くの文献では introduction にあるような記法を用いているし, 一般の (有限) ルート系に対する BZ datum を書こうとすると, どうしてもこのような記法を用いざるを得ない. 一方, 話を A 型に限定した場合には, 以下に述べる Maya 図形によるパラメトリゼーションも可能となる. この方法はいろいろと便利な点もあるので, 今回はこちらを採用して全てを書き下すことにする.

$\tilde{I} = [l+1, l+m+1]$ とし, $\tilde{I}$ の部分集合の全体を $\mathcal{M}_I$ と書く. また $\mathcal{M}_I^\times := \mathcal{M}_I \setminus \{\emptyset, \tilde{I}\}$ とおく. (あまり一般的でない呼称かも知れないが) この小論では $\mathcal{M}_I$ の元を, 区間 I に付随する Maya 図形と呼ぶことにする. このとき, Γ_I と $\mathcal{M}_I^\times$ の間には以下に述べるような 1 対 1 対

¹話を A 型に限定しているので, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^\vee$ と $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ は自然に同型であることに注意.

²この同値は A 型に限らず, 全ての有限型の場合に成り立つ.

応がある。まず, fundamental weight Λ_i ($i \in I$) には, $[l+1, i]$ を対応させる。 $W_I \cong \mathfrak{S}_{m+1}$ は, $\tilde{I}$ に自然に (かつ transitive に) 作用しているので, このことを用いて $w\Lambda_i$ ($w \in W_I$) と $w([l+1, i])$ を対応させる。これにより, Γ_I と $\mathcal{M}_I^\times$ の間の 1 対 1 対応が構成出来る。この同一視 $\Gamma_I \cong \mathcal{M}_I^\times$ のもとに BZ datum の定義を書き直すと, 次のようになる。

Definition 2.1.1. $\mathcal{M}_I^\times$ でパラメトライズされた整数の集合 $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^\times}$ が次の 2 条件を満たす時, I に付随する BZ datum であるという。

(BZ-1) *Edge inequalities (EI)*: 任意の異なる 2 元 $i, j \in \tilde{I}$ と, $\mathbf{k} \cap \{i, j\} = \emptyset$ なる $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I$ に対して,

$$M_{\mathbf{k}i} + M_{\mathbf{k}j} \leq M_{\mathbf{k}ij} + M_{\mathbf{k}}$$

が成り立つ。ただし $M_{\mathbf{k}ij}$ は $M_{\mathbf{k} \cup \{i, j\}}$ 表す。他の記号も同様。また $M_\emptyset = M_{\tilde{I}} = 0$ と定める。

(BZ-2) *Tropical Plücker relations (TP)*: 任意の $\tilde{I}$ の 3 元 $i < j < k$ と, $\mathbf{k} \cap \{i, j, k\} = \emptyset$ なる $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I$ に対して,

$$M_{\mathbf{k}ik} + M_{\mathbf{k}j} = \min \{M_{\mathbf{k}ij} + M_{\mathbf{k}k}, M_{\mathbf{k}jk} + M_{\mathbf{k}i}\}$$

が成り立つ。

BZ datum $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^\times}$ であって, 正規化条件

(BZ-0) $M_{[i+1, l+m+1]} = 0$ for any $i \in I$

を満たすものの全体を BZ_I と書く。

BZ_I 上に crystal structure を定めよう。 $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^\times} \in BZ_I$ に対し,

$$\text{wt}(\mathbf{M}) := \sum_{i \in I} M_{[l+1, i]} \alpha_i^I,$$

$$\varepsilon_i(\mathbf{M}) := - (M_{[l+1, i]} + M_{[l+1, i+1] \setminus \{i\}} - M_{[l+1, i-1]} - M_{[l+1, i+1]}),$$

$$\varphi_i(\mathbf{M}) := \varepsilon_i(\mathbf{M}) + \langle h_i, \text{wt}(\mathbf{M}) \rangle.$$

と定める。ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}_I \times \mathfrak{h}_I \rightarrow \mathbb{C}$ は canonical pairing。EI から $\varepsilon_i(\mathbf{M})$ は非負整数であることに注意しよう。

Proposition 2.1.2 ([Kam2]). $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^\times} \in BZ_I$ とする。

(1) $\varepsilon_i(\mathbf{M}) > 0$ の時, 次の条件を満たす $\mathbf{M}' = (M'_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^\times} \in BZ_I$ が一意的に存在する:

$$(i) \ M'_{[l+1, i]} = M_{[l+1, i]} + 1,$$

$$(ii) \ M'_{\mathbf{k}} = M_{\mathbf{k}} \text{ for all } \mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^\times \setminus \mathcal{M}_I^\times(i).$$

ただし $\mathcal{M}_I^\times(i) := \{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^\times \mid i \in \mathbf{k} \text{ かつ } i+1 \notin \mathbf{k}\}$ 。

(2) 次の条件を満たす $\mathbf{M}'' = (M''_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^\times} \in BZ_I$ が一意的に存在する:

$$(i) \ M''_{[l+1, i]} = M_{[l+1, i]} - 1,$$

$$(ii) \ M''_{\mathbf{k}} = M_{\mathbf{k}} \text{ for all } \mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^\times \setminus \mathcal{M}_I^\times(i).$$

BZ_I 上の Kashiwara operators $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ を

$$\tilde{e}_i \mathbf{M} := \begin{cases} \mathbf{M}' & (\varepsilon_i(\mathbf{M}) > 0), \\ 0 & (\varepsilon_i(\mathbf{M}) = 0), \end{cases} \quad \tilde{f}_i \mathbf{M} := \mathbf{M}''$$

と定める。

Theorem 2.1.3 ([Kam2]). 6 つ組 $(BZ_I; \text{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i)$ は crystal の公理を満たし, crystal として $(B(\infty); \text{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i)$ と同型である。

別の正規化条件

(BZ-0') $M_{[l+1,i]} = 0$ for any $i \in I$

を考え, これを満たすものの全体を BZ_I^e と書く. $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^{\times}}$ を BZ datum として, 新しい整数の組 $\mathbf{M}^* = (M_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^{\times}}$ を $M_{\mathbf{k}}^* := M_{\mathbf{k}^c}$ で定める. ただし $\mathbf{k}^c = \tilde{I} \setminus \mathbf{k}$ である. このとき $\mathbf{M}^*$ も BZ datum となる. この写像を $*$ と書くことにすれば, $*$ は BZ data 全体の集合上の involutive な自己同型を定める. 特に $\mathbf{M} \in BZ_I$ ならば, $\mathbf{M}^* \in BZ_I^e$ であり, この対応は BZ_I と BZ_I^e の間の全単射を誘導する.

BZ datum $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^{\times}} \in BZ_I^e$ に対し,

$$\text{wt}(\mathbf{M}) := \text{wt}(\mathbf{M}), \quad \varepsilon_i^*(\mathbf{M}) := \varepsilon_i(\mathbf{M}^*), \quad \varphi_i^*(\mathbf{M}) := \varphi_i(\mathbf{M}^*)$$

とおく. Proposition 2.1.2, Theorem 2.1.3 の簡単な帰結として次が示される.

Corollary 2.1.4 ([S]). $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^{\times}} \in BZ_I^e$ とする.

(1) $\varepsilon_i^*(\mathbf{M}) > 0$ の時, 次の条件を満たす $\mathbf{M}' = (M'_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^{\times}} \in BZ_I^e$ が一意的に存在する:

- (i) $M'_{[i+1, l+m+1]} = M_{[i+1, l+m+1]} + 1$,
- (ii) $M'_{\mathbf{k}} = M_{\mathbf{k}}$ for all $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^{\times} \setminus \mathcal{M}_I^{\times}(i)^*$.

ただし $\mathcal{M}_I^{\times}(i)^* := \{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^{\times} \mid i \notin \mathbf{k} \text{ かつ } i+1 \in \mathbf{k}\}$.

(2) 次の条件を満たす $\mathbf{M}'' = (M''_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^{\times}} \in BZ_I$ が一意的に存在する:

- (i) $M''_{[i+1, l+m+1]} = M_{[i+1, l+m+1]} - 1$,
- (ii) $M''_{\mathbf{k}} = M_{\mathbf{k}}$ for all $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^{\times} \setminus \mathcal{M}_I^{\times}(i)^*$.

(3) BZ_I^e 上の Kashiwara operators $\tilde{e}_i^*, \tilde{f}_i^*$ を

$$\tilde{e}_i^* \mathbf{M} := \begin{cases} \mathbf{M}' & (\varepsilon_i^*(\mathbf{M}) > 0), \\ 0 & (\varepsilon_i^*(\mathbf{M}) = 0), \end{cases} \quad \tilde{f}_i^* \mathbf{M} := \mathbf{M}''$$

と定める. このとき,

$$\tilde{e}_i^* = * \circ \tilde{e}_i \circ *, \quad \tilde{f}_i^* = * \circ \tilde{f}_i \circ *.$$

(4) $(BZ_I^*; \text{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \tilde{e}_i^*, \tilde{f}_i^*)$ は crystal であり, さらに $(B(\infty); \text{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \tilde{e}_i^*, \tilde{f}_i^*)$ と同型である.

2.2. Lusztig data.

Definition 2.2.1. $\Delta_I^+ := \{(i, j) \in \tilde{I}^2 \mid i < j\}$ でパラメトライズされる非負整数の組 $\mathbf{a} = (a_{i,j})_{(i,j) \in \Delta_I^+}$ を I に付随する Lusztig datum と呼び, その全体の集合を $\mathcal{B}_I$ と書く.

以下 $\mathcal{B}_I$ 上に 2 つの crystal structure を定める. Lusztig datum $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_I$ に対し,

$$\text{wt}(\mathbf{a}) = - \sum_{i \in I} r_i(\mathbf{a}) \alpha_i^I, \quad \text{ただし} \quad r_i(\mathbf{a}) = \sum_{s=n+1}^i \sum_{t=i+1}^{n+m+1} a_{s,t} \quad (i \in I)$$

と定める. また $i \in I$ に対し,

$$A_k^{(i)}(\mathbf{a}) := \sum_{s=n+1}^k (a_{s,i+1} - a_{s-1,i}) \quad (n+1 \leq k \leq i),$$

$$A_k^{*(i)}(\mathbf{a}) := \sum_{t=k+1}^{n+m+1} (a_{i,t} - a_{i+1,t+1}) \quad (i \leq k \leq n+m)$$

とおく. ただし $a_{n,i} = a_{i+1,n+m+2} = 0$ とした.

$$\varepsilon_i(\mathbf{a}) := \max \left\{ A_{n+1}^{(i)}(\mathbf{a}), \dots, A_i^{(i)}(\mathbf{a}) \right\}, \quad \varphi_i(\mathbf{a}) = \varepsilon_i(\mathbf{a}) + \langle h_i, \text{wt}(\mathbf{a}) \rangle,$$

$$\varepsilon_i^*(\mathbf{a}) := \max \left\{ A_i^{*(i)}(\mathbf{a}), \dots, A_{n+m}^{*(i)}(\mathbf{a}) \right\}, \quad \varphi_i^*(\mathbf{a}) = \varepsilon_i^*(\mathbf{a}) + \langle h_i, \text{wt}(\mathbf{a}) \rangle$$

とおく. また

$$\begin{aligned} k_e &:= \min \left\{ n+1 \leq k \leq i \mid \varepsilon_i(\mathbf{a}) = A_k^{(i)}(\mathbf{a}) \right\}, \\ k_f &:= \max \left\{ n+1 \leq k \leq i \mid \varepsilon_i(\mathbf{a}) = A_k^{(i)}(\mathbf{a}) \right\}, \\ k_e^* &:= \max \left\{ i \leq k \leq n+m \mid \varepsilon_i^*(\mathbf{a}) = A_k^{*(i)}(\mathbf{a}) \right\}, \\ k_f^* &:= \min \left\{ i \leq k \leq n+m \mid \varepsilon_i^*(\mathbf{a}) = A_k^{*(i)}(\mathbf{a}) \right\} \end{aligned}$$

とし, 与えられた $\mathbf{a} \in B_I$ に対して, $\mathbf{a}^{(\#)} = (a_{s,t}^{(\#)})$ ($\# = 1, 2, 3, 4$) を

$$\begin{aligned} a_{s,t}^{(1)} &= \begin{cases} a_{k_e,i} + 1 & (s = k_e, t = i), \\ a_{k_e,i+1} - 1 & (s = k_e, t = i+1), \\ a_{s,t} & (\text{otherwise}). \end{cases} \\ a_{s,t}^{(2)} &= \begin{cases} a_{k_f,i} - 1 & (s = k_f, t = i), \\ a_{k_f,i+1} + 1 & (s = k_f, t = i+1), \\ a_{s,t} & (\text{otherwise}). \end{cases} \\ a_{s,t}^{(3)} &= \begin{cases} a_{i,k_e^*+1} - 1 & (s = i, t = k_e^* + 1), \\ a_{i+1,k_e^*+1} + 1 & (s = i+1, t = k_e^* + 1), \\ a_{s,t} & (\text{otherwise}). \end{cases} \\ a_{s,t}^{(4)} &= \begin{cases} a_{i,k_f^*+1} + 1 & (s = i, t = k_f^* + 1), \\ a_{i+1,k_f^*+1} - 1 & (s = i+1, t = k_f^* + 1), \\ a_{s,t} & (\text{otherwise}). \end{cases} \end{aligned}$$

と定める. このとき B_I 上の Kashiwara operators を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i \mathbf{a} &= \begin{cases} \mathbf{0} & (\text{if } \varepsilon_i(\mathbf{a}) = 0), \\ \mathbf{a}^{(1)} & (\text{if } \varepsilon_i(\mathbf{a}) > 0), \end{cases} \quad \tilde{f}_i \mathbf{a} = \mathbf{a}^{(2)}, \\ \tilde{e}_i^* \mathbf{a} &= \begin{cases} \mathbf{0} & (\text{if } \varepsilon_i^*(\mathbf{a}) = 0), \\ \mathbf{a}^{(3)} & (\text{if } \varepsilon_i^*(\mathbf{a}) > 0), \end{cases} \quad \tilde{f}_i^* \mathbf{a} = \mathbf{a}^{(4)}. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.2 ([R],[S]). $(B_I; \text{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i)$, $(B_I; \text{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \tilde{e}_i^*, \tilde{f}_i^*)$ はともに *crystal* で, さらに *crystal* として $B(\infty)$ と同型である.

2.3. BZ data と Lusztig data の対応.

Definition 2.3.1 ([BFZ]). $\mathbf{k} = \{k_{n+1} < k_{n+2} < \dots < k_{n+u}\} \in \mathcal{M}_I^\times$ を *Maya* 図形とする. このとき, 次の条件を満たす整数の組 $C = (c_{p,q})_{n+1 \leq p \leq q \leq n+u}$ を **k-tableau** と呼ぶ:

$$c_{p,p} = k_p, \quad c_{p,q} \leq c_{p,q+1}, \quad c_{p,q} < c_{p+1,q}.$$

Lusztig datum $\mathbf{a} = (a_{i,j}) \in B_I$ に対し, 整数の組 $\mathbf{M}(\mathbf{a}) = (M_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}))_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^\times}$ を

$$M_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}) := - \sum_{j=n+1}^{n+u} \sum_{i=n+1}^{k_j-1} a_{i,k_j} + \min \left\{ \sum_{n+1 \leq p < q \leq n+u} a_{c_{p,q}, c_{p,q} + (q-p)} \mid \begin{array}{l} C = (c_{p,q}) \text{ は} \\ \mathbf{k}\text{-tableau} \end{array} \right\}$$

で定義する. また写像 $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{M}(\mathbf{a})$ を Φ_I と書く.

Theorem 2.3.2 ([BFZ],[S]). Φ_I は B_I から BZ_I^e への全単射を与え, さらに *crystal* としての同型 $(B_I; \text{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \tilde{e}_i^*, \tilde{f}_i^*) \xrightarrow{\Phi_I} (BZ_I^e; \text{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \tilde{e}_i^*, \tilde{f}_i^*)$ を誘導する.

合成 $B_I \xrightarrow{\Phi_I} BZ_I^e \xrightarrow{*} BZ_I$ を考えることで次を得る.

Corollary 2.3.3. 全単射 $* \circ \Phi_I : B_I \rightarrow BZ_I$ は同型

$$(B_I; \text{wt}, \varepsilon_i^*, \varphi_i^*, \tilde{e}_i^*, \tilde{f}_i^*) \xrightarrow{* \circ \Phi_I} (BZ_I; \text{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i)$$

を誘導する.

3. 無限区間への拡張

3.1. Berenstein Zelevinsky data associated to $\mathbb{Z}$.

Definition 3.1.1. (1) $r \in \mathbb{Z}$ を整数とする. $\mathbb{Z}$ の部分集合 $\mathbf{k}$ が荷電 r の *Maya* 図形であるとは, 非負整数 p, q が存在して

$$\mathbb{Z}_{\leq r-p} \subset \mathbf{k} \subset \mathbb{Z}_{\leq r+q}, \quad |\mathbf{k} \cap \mathbb{Z}_{> r-p}| = p$$

を満たすことをいう. 荷電 r の *Maya* 図形全体を $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{(r)}$ と書き, $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}} := \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{(r)}$ とおく.

(2) 荷電 r の *Maya* 図形 $\mathbf{k}$ に対し, $\mathbf{k}^c := \mathbb{Z} \setminus \mathbf{k}$ とおく. これを荷電 r の反 *Maya* 図形と呼び, その全体を $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{(r),c}$ と書く. また $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c := \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^{(r),c}$ とする.

定義から, 荷電 r の *Maya* 図形 $\mathbf{k}$ は,

$$\mathbf{k} = \{k_j \mid j \in \mathbb{Z}_{\leq r}\}; \quad k_{j-1} < k_j \ (j \leq r), \quad k_j = j \ (j \ll r)$$

なる整数の列と思える. 同様に, 荷電 r の反 *Maya* 図形 $\mathbf{k}$ は

$$\mathbf{k} = \{k_j \mid j \in \mathbb{Z}_{> r}\}; \quad k_j < k_{j+1} \ (j > r), \quad k_j = j \ (j \gg r)$$

なる整数の列と思える. 写像 $c : \mathcal{M}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c$ を $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{k}^c$ で定めると, これは全単射となる. 以後, 逆写像も同じ記号で c と書くことにしよう.

$I = [l+1, l+m]$ とし,

$$\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I) := \{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}} \mid \mathbf{k} = \mathbb{Z}_{\leq n} \cup \mathbf{k}_I, \text{ for some } \mathbf{k}_I \in \mathcal{M}_I^{\times}\},$$

$$\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c(I) := \{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c \mid \mathbf{k} = \mathbf{k}_I \cup \mathbb{Z}_{\geq n+m+2}, \text{ for some } \mathbf{k}_I \in \mathcal{M}_I^{\times}\}$$

とおく. 写像 $\text{res}_I : \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I) \rightarrow \mathcal{M}_I^{\times}$ を $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{k}_I$ で定めると, res_I は全単射である. $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ に対し, $\Omega_I(\mathbf{k}) := (\text{res}_I)^{-1}(\tilde{I} \setminus \text{res}_I(\mathbf{k}))$ とおく. このとき $\Omega_I(\mathbf{k}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ であり, 写像 $\Omega_I : \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ は全単射となる. 全単射 $\text{res}_I^c : \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c(I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_I^{\times}$ および, 全単射 $\Omega_I^c : \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c(I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ を同様に定める. このとき次の補題が容易に確かめられる.

Lemma 3.1.2. (1) *Maya* 図形 $\mathbf{k}$ が $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ に属することと, 反 *Maya* 図形 $\mathbf{k}^c$ が $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c(I)$ に属することは同値である.

(2) 任意の $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ に対し, 次が成り立つ.

$$(\text{res}_I^c)^{-1}(\tilde{I} \setminus \text{res}_I(\mathbf{k})) = \mathbf{k}^c, \quad \text{res}_I^{-1}(\tilde{I} \setminus \text{res}_I^c(\mathbf{k}^c)) = \mathbf{k}, \quad (3.1.1)$$

$$(\text{res}_I^c)^{-1}(\text{res}_I(\mathbf{k})) = \Omega_I^c(\mathbf{k}^c), \quad \text{res}_I^{-1}(\text{res}_I^c(\mathbf{k}^c)) = \Omega_I(\mathbf{k}), \quad (3.1.2)$$

$$(\Omega_I(\mathbf{k}))^c = \Omega_I^c(\mathbf{k}^c), \quad (\Omega_I^c(\mathbf{k}^c))^c = \Omega_I(\mathbf{k}). \quad (3.1.3)$$

$\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}}$ を $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ でインデックス付けされた整数の組とする. このような $\mathbf{M}$ に対し, $\mathbf{M}_I := (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)}$ とおく. このとき, 全単射 $\text{res}_I : \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_I^{\times}$ によって, $\mathbf{M}_I$ は $\mathcal{M}_I^{\times}$ でインデックス付けされた整数の組と思える. 同様に, $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c}$ に対して, $\mathbf{M}_I := (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c(I)}$ は $\mathcal{M}_I^{\times}$ でインデックス付けされた整数の組と思える.

Definition 3.1.3. (1) 整数の組 $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c}$ が $\mathbb{Z}$ に付随する *BZ datum* であるとは, 次が満たされることをいう:

(1-a) $\mathbb{Z}$ の任意の有限区間 K に対し, $\mathbf{M}_K = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_K^{\times}}$ は $\mathcal{BZ}_K$ の元である.

(1-b) 各 $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c$ に対し, 有限区間 I が存在して, *such that*

(1-i) $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c(I)$,

(1-ii) $J \supset I$ なる任意の有限区間 J に対し, $M_{\Omega_J^c(\mathbf{k})} = M_{\Omega_I^c(\mathbf{k})}$.

(2) 整数の組 $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}}$ が $\mathbb{Z}$ に付随する *e-BZ datum* であるとは, 次が満たされることをいう:

(2-a) $\mathbb{Z}$ の任意の有限区間 K に対し, $\mathbf{M}_K = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_K^{\times}}$ は $\mathcal{BZ}_K^e$ の元である.

(2-b) 各 $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ に対し, 有限区間 I が存在して, $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ かつ, 上記 (1-ii) と同様の条件が満たされる.

$\mathbb{Z}$ に付随する BZ data 全体の集合を $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}$ に付随する e-BZ data 全体の集合を $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^e$ と書く.

与えられた $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ に対し, 新しい整数の組 $\mathbf{M}^* = (M_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}}$ を

$$M_{\mathbf{k}}^* := M_{\mathbf{k}^c}$$

で定める. このとき, 有限区間の場合と同様に次が成り立つ.

Lemma 3.1.4. $\mathbf{M} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ に対し, $\mathbf{M}^*$ は $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^e$ の元である. さらに $*$: $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^e$ は全単射である.

以下, 上記全単射の逆写像も同じ記号で $*$ と書くことにする.

$\mathbf{M} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ に対し, (上の $\mathbf{M}^*$ とは別の) 新しい整数の組 $\Theta(\mathbf{M}) = (\Theta(M)_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}}$ を次のように定める. $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ を固定し, その補集合 $\mathbf{k}^c \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c$ を考える. $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}^c})_{\mathbf{k}^c \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ であつたので, $\mathbf{k}^c \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c$ に対し, Definition 3.1.3 の条件 (1-b) を満たすような有限区間 I が存在する. このとき Lemma 3.1.2 (1) から, $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I)$ となることがわかる. そこで, $\Theta(M)_{\mathbf{k}} := M_{(\text{res}_I^c)^{-1}(\text{res}_I(\mathbf{k}))}$ とおくと, これは上の有限区間 I の取り方に依らず定まる. 実際, Lemma 3.1.2 の (3.1.2) より, $(\text{res}_I^c)^{-1}(\text{res}_I(\mathbf{k})) = \Omega_I^c(\mathbf{k}^c)$ である. したがって Definition 3.1.3 の条件 (1-b) から, $\Theta(\mathbf{M})_{\mathbf{k}}$ は I の取り方に依らずに定まる.

3.2. Kashiwara operators on BZ data associated to $\mathbb{Z}$. まず $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ 上に raising Kashiwara operators $\tilde{e}_p$ ($p \in \mathbb{Z}$) の作用を定める. $\mathbf{M} = (M_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\varepsilon_p(\mathbf{M}) := - \left(\Theta(M)_{\mathbb{Z}_{\leq p}} + \Theta(M)_{\mathbb{Z}_{\leq p-1} \cup \{p+1\}} - \Theta(M)_{\mathbb{Z}_{\leq p+1}} - \Theta(M)_{\mathbb{Z}_{\leq p-1}} \right)$$

とおく. このとき $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ の定義から, $\varepsilon_p(\mathbf{M})$ は非負整数となることがわかる.

$\varepsilon_p(\mathbf{M}) = 0$ の場合には, $\tilde{e}_p \mathbf{M} = 0$ とおく. 他方, $\varepsilon_p(\mathbf{M}) > 0$ の場合には, $\tilde{e}_p \mathbf{M} = (M'_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c}$ を以下のように定義する. 各 $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^c$ に対し, 有限区間 I を十分大きく取り,

$$M'_{\mathbf{k}} := (\tilde{e}_p \mathbf{M}_I)_{\text{res}_I^c(\mathbf{k})}$$

と定める. ここで $\mathbf{M}_I \in \mathcal{BZ}_I$ であつたので, $\tilde{e}_p \mathbf{M}_I$ はすでに定義されていることに注意しよう. この定義が well-defined であるためには, 上の定義が有限区間 I の取り方に依らないことを言わねばならないが, それは Definition 3.1.3 の条件 (1-b) から比較的容易に従う.

次に lowering Kashiwara operators $\tilde{f}_p$ ($p \in \mathbb{Z}$) の作用を定義しよう. アイデアは上の場合とほぼ同様である. $\mathbf{M} = (M_k)_{k \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^e} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し, $\tilde{f}_p \mathbf{M} = (M''_k)_{k \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^e}$ を次のように定める. 各 $k \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^e$ に対し, 有限区間 I を十分大きく取り,

$$M''_k := (\tilde{f}_p \mathbf{M}_I)_{\text{res}_I^e(k)}$$

と定める. このとき Definition 3.1.3 の条件 (1-b) から, この定義が well-defined であることが従う.

Proposition 3.2.1 ([NSS1]). 任意の $\mathbf{M} = (M_k)_{k \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^e} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し, $\tilde{e}_p \mathbf{M}$ (resp. $\tilde{f}_p \mathbf{M}$) は $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ (resp. $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$) に含まれる.

後の議論では $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^e$ 上の $*$ -Kashiwara operators $\tilde{e}_p^*$, $\tilde{f}_p^*$ も必要になる. こちらも併せて定義しておこう.

$\mathbf{M} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^e$ に対し, $\varepsilon_p^*(\mathbf{M}) := \varepsilon_p(\mathbf{M}^*)$ ($p \in \mathbb{Z}$) とおき, $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^e$ 上の Kashiwara operators $\tilde{e}_p^*$ および $\tilde{f}_p^*$ を

$$\tilde{e}_p^* \mathbf{M} := \begin{cases} (\tilde{e}_p(\mathbf{M}^*))^* & (\varepsilon_p^*(\mathbf{M}) > 0), \\ 0 & (\varepsilon_p^*(\mathbf{M}) = 0), \end{cases}, \quad \tilde{f}_p^* \mathbf{M} := (\tilde{f}_p(\mathbf{M}^*))^*$$

で定める. 以下の Lemma は上の Proposition の簡単な帰結である.

Corollary 3.2.2. 任意の $\mathbf{M} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^e$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し, $\tilde{e}_p^* \mathbf{M}$ (resp. $\tilde{f}_p^* \mathbf{M}$) は $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^e \cup \{0\}$ (resp. $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^e$) に含まれる.

4. BERENSTEIN-ZELEVINSKY DATA OF TYPE $A_{n-1}^{(1)}$

4.1. Root datum of type $A_{n-1}^{(1)}$. 以下, 3 以上の整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ を固定する. $\hat{\mathfrak{g}}$ を $A_{n-1}^{(1)}$ 型 affine Lie algebra, $\hat{\mathfrak{h}}$ をその Cartan subalgebra, $\hat{h}_i \in \hat{\mathfrak{h}}$ ($i \in \hat{I} := \{0, 1, \dots, l-1\}$) を simple coroot, $\hat{\alpha}_i \in \hat{\mathfrak{h}}^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\hat{\mathfrak{h}}, \mathbb{C})$ ($i \in \hat{I}$) を simple root とする. $\hat{\mathfrak{g}}$. このとき $\langle \hat{h}_i, \hat{\alpha}_j \rangle = \hat{a}_{ij}$ ($i, j \in \hat{I}$) である. ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle : \hat{\mathfrak{h}} \times \hat{\mathfrak{h}}^* \rightarrow \mathbb{C}$ は canonical pairing, $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})_{i,j \in \hat{I}}$ は index set を $\hat{I}$ とする $A_l^{(1)}$ 型 Cartan matrix で, その行列成分 $\hat{a}_{ij}$ は

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} 2 & (i = j), \\ -1 & (|i - j| = 1 \text{ or } l - 1), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で与えられる.

4.2. BZ data of type $A_{n-1}^{(1)}$. $\mathbb{Z}$ 上の全単射 τ を $j \mapsto \tau(j) := j+1$ ($j \in \mathbb{Z}$) で定め, $\sigma := \tau^n$ とおく. $\mathbf{M} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ に対し, $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^e$ でインデックス付けされた整数の組 $\sigma(\mathbf{M})$ および $\sigma^{-1}(\mathbf{M})$ を

$$\sigma(\mathbf{M})_k = \mathbf{M}_{\sigma^{-1}(k)}, \quad \sigma^{-1}(\mathbf{M})_k = \mathbf{M}_{\sigma(k)} \quad (k \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^e)$$

で定める. このとき $\sigma(\mathbf{M})$ と $\sigma^{-1}(\mathbf{M})$ はともに $\mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ の元であり, 全単射 $\sigma^{\pm} : \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}$ が誘導される. また, $\mathbf{M} \in \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^e$ に対しても同様の方法で組 $\sigma^{\pm}(\mathbf{M})$ を定義することが出来, 全単射 $\sigma^{\pm} : \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^e \xrightarrow{\sim} \mathcal{BZ}_{\mathbb{Z}}^e$ が誘導される.

Lemma 4.2.1 ([NSS1]). (1) $BZ_{\mathbb{Z}}$ 上, Θ と σ は可換である.

(2) 任意の $M \in BZ_{\mathbb{Z}}$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し, $\varepsilon_p(\sigma(M)) = \varepsilon_{\sigma^{-1}(p)}(M)$.

(3) 任意の $p \in \mathbb{Z}$ に対し, $BZ_{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ 上の作用素として $\sigma \circ \tilde{e}_p = \tilde{e}_{\sigma(p)} \circ \sigma$ かつ $\sigma \circ \tilde{f}_p = \tilde{f}_{\sigma(p)} \circ \sigma$ が成り立つ. ただし $\sigma(0) = 0$ と解釈するものとする.

Definition 4.2.2.

$$BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma} := \{M \in BZ_{\mathbb{Z}} \mid \sigma(M) = M\}, \quad (BZ_{\mathbb{Z}}^e)^{\sigma} := \{M \in BZ_{\mathbb{Z}}^e \mid \sigma(M) = M\}$$

とおく. $BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ (resp. $(BZ_{\mathbb{Z}}^e)^{\sigma}$) の元を $A_{n-1}^{(1)}$ 型 BZ (resp. e - BZ) datum と呼ぶ.

$A_{n-1}^{(1)}$ 型 BZ data の全体 $BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ 上に crystal structure を定めよう. まず $M \in BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ と $p \in \hat{I}$ に対し,

$$\text{wt}(M) := \sum_{p \in \hat{I}} \Theta(M)_{\mathbb{Z}_{\leq p}} \hat{\alpha}_p, \quad \hat{\varepsilon}_p(M) := \varepsilon_p(M), \quad \hat{\varphi}_p(M) := \hat{\varepsilon}_p(M) + \langle \hat{h}_p, \text{wt}(M) \rangle$$

とおく.

次に Kashiwara operators の作用を定義したい. 次の Lemma に注意しよう.

Lemma 4.2.3 ([NSS1]). 2つの整数 $q, q' \in \mathbb{Z}$ は $|q - q'| \geq 2$ を満たすとする. このとき $BZ_{\mathbb{Z}}$ から $BZ_{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ への作用素として $\tilde{e}_q \tilde{e}_{q'} = \tilde{e}_{q'} \tilde{e}_q$ かつ $\tilde{f}_q \tilde{f}_{q'} = \tilde{f}_{q'} \tilde{f}_q$.

この Lemma のもとに, $BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ 上の Kashiwara operators を以下のように定める. $M \in BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$, $p \in \hat{I}$ とする. もし $\hat{\varepsilon}_p(M) = 0$ なら, $\hat{e}_p M := 0$ とおく. $\hat{\varepsilon}_p(M) > 0$ の時は, 新しい整数の組 $\hat{e}_p M = (M'_k)$ を

$$M'_k := (e_{L(k,p)} M)_k \quad \text{for each } k \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^e$$

で定義する. ここに $L(k, p) := \{q \in p + n\mathbb{Z} \mid q \in k \text{ and } q+1 \notin k\}$, $e_{L(k,p)} := \prod_{q \in L(k,p)} \tilde{e}_q$ である. 定義から $L(k, p)$ は有限集合で, しかも任意の異なる2元 $q, q' \in L(k, p)$ は, $|q - q'| > 2$ を満たす. 従って Lemma 4.2.3 より, $e_{L(k,p)}$ は積の順序の取り方に依らずに定まる well-defined な作用素である.

lowering Kashiwara operators の作用も同様の方法で定める. $f_{L(k,p)} := \prod_{q \in L(k,p)} \tilde{f}_q$ とし, 整数の組 $\hat{f}_p M = (M''_k)$ を

$$M''_k := (f_{L(k,p)} M)_k \quad \text{for each } k \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^e$$

とおく. $f_{L(k,p)}$ が well-defined であることは前の場合と同様である.

Proposition 4.2.4 ([NSS1]). (1) $\hat{e}_p M \in BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma} \cup \{0\}$ かつ $\hat{f}_p M \in BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$.

(2) 組 $(BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma}; \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p, \hat{\varphi}_p, \hat{e}_p, \hat{f}_p)$ は $A_{n-1}^{(1)}$ 型 crystal である.

$\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^e$ でインデックス付けされた整数の組であって, 各 k -成分が全て0であるようなものを $\mathbf{O}$ と書く. $\mathbf{O} \in BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ となることは明らかであろう. crystal $BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ の, $\mathbf{O}$ を含む (crystal としての) 連結成分を $BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma}(\mathbf{O})$ と書く.

Theorem 4.2.5 ([NSS1]). $(BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma}(\mathbf{O}); \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p, \hat{\varphi}_p, \hat{e}_p, \hat{f}_p)$ は $A_{n-1}^{(1)}$ 型の $B(\infty)$ と crystal として同型である.

有限区間の場合と同様の方法で, $(BZ_{\mathbb{Z}}^e)^{\sigma}$ 上にも crystal structure を定めることができる. 定義から $* \circ \sigma = \sigma \circ *$ が成り立つことは容易にわかる. しかがって全単射 $*$: $BZ_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} (BZ_{\mathbb{Z}}^e)^{\sigma}$ の $BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ への制限は, 再び全単射 $*$: $BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma} \xrightarrow{\sim} (BZ_{\mathbb{Z}}^e)^{\sigma}$ を定める. そこで $\mathbf{O} \in BZ_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ の $*$ による像を $\mathbf{O}^*$ と書く. これは $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ でインデックス付けされた整数の組であって, 全ての成分が0であるようなものに他ならない.

与えられた $\mathbf{M} = (BZ_{\mathbb{Z}}^e)^{\sigma}$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\text{wt}(\mathbf{M}) := \text{wt}(\mathbf{M}^*), \quad \widehat{e}_p^*(\mathbf{M}) := \widehat{e}_p(\mathbf{M}^*), \quad \widehat{f}_p^*(\mathbf{M}) := \widehat{e}_p^*(\mathbf{M}) + \langle \widehat{h}_p, \text{wt}(\mathbf{M}) \rangle,$$

$$\widehat{e}_p^* \mathbf{M} := \begin{cases} (\widehat{e}_p(\mathbf{M}^*))^* & (\widehat{e}_p^*(\mathbf{M}) > 0), \\ 0 & (\widehat{e}_p^*(\mathbf{M}) = 0), \end{cases} \quad \widehat{f}_p^* := (\widehat{f}_p(\mathbf{M}^*))^*$$

とおく. 次の corollary は Theorem 4.2.5 から容易に従う.

Corollary 4.2.6 ([NSS2]). (1) 組 $((BZ_{\mathbb{Z}}^e)^{\sigma}; \text{wt}, \widehat{e}_p^*, \widehat{f}_p^*, \widehat{e}_p^*, \widehat{f}_p^*)$ は $A_{n-1}^{(1)}$ 型 crystal である.
 (2) $(BZ_{\mathbb{Z}}^e)^{\sigma}(\mathbf{O}^*)$ で crystal $(BZ_{\mathbb{Z}}^e)^{\sigma}$ の $\mathbf{O}^* \in (BZ_{\mathbb{Z}}^e)^{\sigma}$ を含む連結成分を表す. このとき $((BZ_{\mathbb{Z}}^e)^{\sigma}(\mathbf{O}^*); \text{wt}, \widehat{e}_p^*, \widehat{f}_p^*, \widehat{e}_p^*, \widehat{f}_p^*)$ は, crystal として $A_{n-1}^{(1)}$ 型の $B(\infty)$ と同型である.

5. 無限サイズの LUSZTIG DATA

Definition 4.2.2 で定義された “ $A_{n-1}^{(1)}$ 型の BZ data” なるものは, 単にそう名前を付けたという以上のものではなく, 「なぜこれが affine 型の BZ data なのか?」という疑問は当然湧く. 実際, BZ data を定める条件である edge inequality や Tropical Plücker relation を affine の場合に拡張したわけではない. しかしながら, 我々は上の定理が成り立つことを根拠に, 今回定義した “ $A_{n-1}^{(1)}$ 型の BZ data” が, 『BZ data の $A_{n-1}^{(1)}$ 型への拡張』と呼んでいいものだろうと考えているわけである.

ただし, 前節で考えている $BZ_{\mathbb{Z}}^e(\mathbf{O})$ は, 文字通り $\mathbf{O}$ を含む crystal としての連結成分として定義されるものなので, その全体像は今のところよくわからない. また $BZ_{\mathbb{Z}}^e$ の中に $BZ_{\mathbb{Z}}^e(\mathbf{O})$ 以外の連結成分があるのかもわからない³.

そこで, 本節以降では “ $A_{n-1}^{(1)}$ 型の Lusztig data” を用いて $BZ_{\mathbb{Z}}^e(\mathbf{O})$ を実現する方法を与える. 以下に述べるように $A_{n-1}^{(1)}$ 型の Lusztig data は, $A_{n-1}^{(1)}$ の canonical basis をパラメトライズする際に用いられる multisegment と本質的に同じ概念で, こちらはそれなりに由緒正しいものである. これ以降の議論の目標は, $A_{n-1}^{(1)}$ 型の Lusztig data 全体と $BZ_{\mathbb{Z}}^e(\mathbf{O})$ の間の同型を具体的に構成し, その同型によって, $BZ_{\mathbb{Z}}^e(\mathbf{O})$ の全体像を “理解” することである.

5.1. Definition of Lusztig data.

Definition 5.1.1. (1) $\Delta_{\mathbb{Z}}^+ := \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid i < j\}$ でインデックス付けされた非負整数の組 $\mathbf{a} = (a_{i,j})_{(i,j) \in \Delta_{\mathbb{Z}}^+}$ が $\mathbb{Z}$ に付随する Lusztig datum であるとは, 正の整数 $N_{\mathbf{a}} > 0$ が存在して,

$$j - i \geq N_{\mathbf{a}} \text{ ならば, } a_{i,j} = 0 \quad (5.1.1)$$

を満たすことをいう. $\mathbb{Z}$ に付随する Lusztig data 全体の集合を $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ と書く.

(2) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ とする. $\mathbb{Z}$ に付随する Lusztig datum $\mathbf{a} = (a_{i,j})_{(i,j) \in \Delta_{\mathbb{Z}}^+} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ が, 条件

$$\text{任意の } (i, j) \in \Delta_{\mathbb{Z}}^+ \text{ に対し, } a_{i,j} = a_{i+n,j+n} \quad (5.1.2)$$

を満たす時, $A_{n-1}^{(1)}$ 型 Lusztig datum であるという. $A_{n-1}^{(1)}$ 型 Lusztig data 全体の集合を $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ と書く.

(3) Lusztig datum $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ が以下の条件を満たす時, aperiodic であるという.

任意の $(i, j) \in \Delta_{\mathbb{Z}}^+$ に対し, n 個の非負整数の列 $\{a_{i,j}, a_{i+1,j+1}, \dots, a_{i+n-1,j+n-1}\}$ の中に, 少なくとも 1 つ 0 が存在する.

$\mathcal{B}_{n-1}^{(1),ap}$ で aperiodic な Lusztig data 全体の集合を表す.

集合 $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ は, 以下に述べる multisegment 全体の集合と自然に同一視される.

³実は「 $BZ_{\mathbb{Z}}^e(\mathbf{O})$ は $BZ_{\mathbb{Z}}^e$ と一致しているのではないか?」とも考えているが, 特に根拠があるわけではないので, 今のところ $BZ_{\mathbb{Z}}^e$ 全体の構造に関しては不明な点が多い.

Definition 5.1.2. (1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の長さ r の *segment* とは, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に値を取る連続する r 個の元の列

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & \cdots & x_r \\ \hline \end{array}$$

のことをいう. ただし $x_p = i + p - 1$ ($1 \leq p \leq r$) for some $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の *segment* の *multiset* を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の *multisegment* と呼び, その全体を $\text{Seg}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ と書く.

与えられた $(i, j) \in \Delta_{\mathbb{Z}}^+$ に対し, $x_1 = i \bmod n\mathbb{Z}$ で始まる長さ $r = j - i$ の *segment* を対応させる. この対応で $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ から $\text{Seg}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ への全単射が構成される. このとき, 各 $(i, j) \in \Delta_{\mathbb{Z}}^+$ に対し, $a_{i,j}$ は対応する *segment* の multiplicity に他ならない.

また, 同一視 $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)} \cong \text{Seg}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ のもとで, $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ が aperiodic であるということは, 対応する multisegment が Lusztig ([L4]) の意味で aperiodic であるということに他ならない. 後でも触れるが, aperiodic な multisegment 全体の集合は, $A_{n-1}^{(1)}$ 型の量子包絡環のベキ零部分代数の標準基底 ($A_{n-1}^{(1)}$ 型の $B(\infty)$ と言っても良い) をパラメトライズすることが知られている ([L4]).

5.2. Kashiwara operators on $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$. 与えられた $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ と $p \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$A_k^{(p)}(\mathbf{a}) := \sum_{s \leq k} (a_{s,p+1} - a_{s-1,p}) \quad (k \leq p),$$

$$A_k^{*(p)}(\mathbf{a}) := \sum_{t \geq k+1} (a_{p,t} - a_{p+1,t+1}) \quad (k \geq p)$$

とおく. 条件 (5.1.1) により, 右辺は有限和であり, さらに there exist k_1 and k_2 such that

$$A_k^{(p)}(\mathbf{a}) = 0 \quad (k \leq k_1), \quad A_k^{*(p)}(\mathbf{a}) = 0 \quad (k \geq k_2)$$

なる k_1, k_2 が存在することに注意しよう. したがって

$$\varepsilon_p(\mathbf{a}) := \max \left\{ A_k^{(p)}(\mathbf{a}) \mid k \leq p \right\}, \quad \varepsilon_p^*(\mathbf{a}) := \max \left\{ A_k^{*(p)}(\mathbf{a}) \mid k \geq p \right\}$$

と定めれば, これらは非負整数である. ここで

$$\mathcal{K}(p; \mathbf{a}) := \left\{ k \mid k \leq p, \varepsilon_p(\mathbf{a}) = A_k^{(p)}(\mathbf{a}) \right\}, \quad \mathcal{K}^*(p; \mathbf{a}) := \left\{ k \mid k \geq p, \varepsilon_p^*(\mathbf{a}) = A_k^{*(p)}(\mathbf{a}) \right\}$$

とおこう. $\mathcal{K}(p; \mathbf{a})$ は上に有界なので, $k_f = k_f(p; \mathbf{a}) := \max \{ k \mid k \in \mathcal{K}(p; \mathbf{a}) \}$ は意味を持つ. 他方, 一般に $\mathcal{K}(p; \mathbf{a})$ は下に有界ではない. しかし, もし $\varepsilon_p(\mathbf{a}) > 0$ であるならば, $\mathcal{K}(p; \mathbf{a})$ は有限集合となる. したがって, この場合に限り $k_e = k_e(p; \mathbf{a}) := \min \{ k \mid k \in \mathcal{K}(p; \mathbf{a}) \}$ は意味を持つ. 同様に, $\varepsilon_p^*(\mathbf{a}) > 0$ なる $\mathbf{a}$ に対してのみ $k_e^* = k_e^*(p; \mathbf{a}) := \max \{ k \mid k \in \mathcal{K}^*(p; \mathbf{a}) \}$ と定め, 一般の $\mathbf{a}$ に対して $k_f^* = k_f^*(p; \mathbf{a}) := \min \{ k \mid k \in \mathcal{K}^*(p; \mathbf{a}) \}$ とおく.

以上の準備のもとに, $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ 上の Kashiwara operators $\tilde{e}_p, \tilde{f}_p, \tilde{e}_p^*, \tilde{f}_p^*$ ($p \in \mathbb{Z}$) が有限区間の場合と同様の方法で定義される.

5.3. Crystal structure on $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$. $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ 上に $A_{n-1}^{(1)}$ 型の crystal structure を定義しよう. まず次は容易に示せる.

Lemma 5.3.1. $p \in \hat{I} = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ とする. このとき任意の $r \in \mathbb{Z}$ に対し, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} A_k^{(p)} &= A_{k+rn}^{(p+rn)}, & A_k^{*(p)} &= A_{k+rn}^{*(p+rn)}, & \varepsilon_p(\mathbf{a}) &= \varepsilon_{p+rn}(\mathbf{a}), & \varepsilon_p^*(\mathbf{a}) &= \varepsilon_{p+rn}^*(\mathbf{a}), \\ k_e(p+rn; \mathbf{a}) &= k_e(p; \mathbf{a}) + rn, & k_f(p+rn; \mathbf{a}) &= k_f(p; \mathbf{a}) + rn, \\ k_e^*(p+rn; \mathbf{a}) &= k_e^*(p; \mathbf{a}) + rn, & k_f^*(p+rn; \mathbf{a}) &= k_f^*(p; \mathbf{a}) + rn. \end{aligned}$$

与えられた $p \in \hat{I}$ と $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ に対し,

$$\text{wt}(\mathbf{a}) := - \sum_{p \in \hat{I}} r_p(\mathbf{a}) \hat{\alpha}_p, \quad \text{where } r_p(\mathbf{a}) := \sum_{s \leq p} \sum_{t \geq p+1} a_{s,t},$$

$\hat{\varepsilon}_p(\mathbf{a}) := \varepsilon_p(\mathbf{a})$, $\hat{\varepsilon}_p^*(\mathbf{a}) := \varepsilon_p^*(\mathbf{a})$, $\hat{\varphi}_p := \hat{\varepsilon}_p(\mathbf{a}) + \langle \hat{h}_p, \text{wt}(\mathbf{a}) \rangle$, $\hat{\varphi}_p^* := \hat{\varepsilon}_p^*(\mathbf{a}) + \langle \hat{h}_p, \text{wt}(\mathbf{a}) \rangle$ とおく. ここで条件 (5.1.1) により, $r_p(\mathbf{a})$ の定義の右辺は有限和であることに注意しよう. さらに以下の等式の成立も容易に示せる: $|q - q'| > 2$ なる 2 整数 $q, q' \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\tilde{e}_q \tilde{e}_{q'} = \tilde{e}_{q'} \tilde{e}_q, \quad \tilde{f}_q \tilde{f}_{q'} = \tilde{f}_{q'} \tilde{f}_q, \quad \tilde{e}_q^* \tilde{e}_{q'}^* = \tilde{e}_{q'}^* \tilde{e}_q^*, \quad \tilde{f}_q^* \tilde{f}_{q'}^* = \tilde{f}_{q'}^* \tilde{f}_q^*.$$

したがって, 以下の作用素は well-defined である.

$$\hat{e}_p := \prod_{r \in \mathbb{Z}} \tilde{e}_{p+rl}, \quad \hat{f}_p := \prod_{r \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_{p+rl}, \quad \hat{e}_p^* := \prod_{r \in \mathbb{Z}} \tilde{e}_{p+rl}^*, \quad \hat{f}_p^* := \prod_{r \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_{p+rl}^*.$$

さらに 5.3.1 から, $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}$ の上記作用素たちによる像は $\mathcal{B}_{l-1}^{(1)} \cup \{0\}$ に含まれる. より強く, 次が成り立つ.

Proposition 5.3.2. [NSS2] 組 $(\mathcal{B}_{l-1}^{(1)}; \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p, \hat{\varphi}_p, \hat{e}_p, \hat{f}_p)$, および組 $(\mathcal{B}_{l-1}^{(1)}; \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p^*, \hat{\varphi}_p^*, \hat{e}_p^*, \hat{f}_p^*)$ は $A_{n-1}^{(1)}$ 型 crystal である.

以下, $(\mathcal{B}_{l-1}^{(1)}; \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p, \hat{\varphi}_p, \hat{e}_p, \hat{f}_p)$ および $(\mathcal{B}_{l-1}^{(1)}; \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p^*, \hat{\varphi}_p^*, \hat{e}_p^*, \hat{f}_p^*)$ の, より詳細な構造を調べよう.

Definition 5.3.3. *Lusztig datum* $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}$ が *maximal element* であるとは, 任意の $p \in \hat{I}$ に対して $\hat{\varepsilon}_p(\mathbf{a}) = 0$ が成り立つときをいう. $\mathcal{B}_{l-1}^{(1)}$ の *maximal element* 全体を $\text{Max}(\mathcal{B}_{l-1}^{(1)})$ と書く.

非負整数の無限列 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots)$ であつて, $z_l = 0$ ($l \gg 1$) なるものを考える. また, このような $\mathbf{z}$ の全体を $\mathcal{Z}$ と書く. $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ に対し, $\mathbf{a}_{\mathbf{z}} = ((a_{\mathbf{z}})_{i,j})_{(i,j) \in \Delta_{\mathbb{Z}}^+} \in \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}$ を $(a_{\mathbf{z}})_{i,j} := z_{j-i}$ で定める. 他方, $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}$ に対し, 非負整数の無限列 $\mathbf{z}(\mathbf{a}) = (z(\mathbf{a})_1, z(\mathbf{a})_2, \dots) \in \mathcal{Z}$ を $z(\mathbf{a})_l := \min\{a_{i,j} \mid j - i = l\}$ for $l \geq 1$ で定め, $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}(\mathbf{z}) := \{\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{n-1}^{(1)} \mid \mathbf{z}(\mathbf{a}) = \mathbf{z}\}$ とおく. このとき構成から次は明らかである.

$$\mathcal{B}_{n-1}^{(1)} = \bigsqcup_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}} \mathcal{B}_{n-1}^{(1)}(\mathbf{z}) \quad (5.3.1)$$

かつ

$$\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}(\mathbf{0}) = \mathcal{B}_{n-1}^{(1), \text{ap}}, \quad \text{ただし } \mathbf{0} := (0, 0, \dots) \in \mathcal{Z}.$$

以上の記法のもとに, 次が成り立つ.

Lemma 5.3.4. (1) $\text{Max}(\mathcal{B}_{l-1}^{(1)}) = \{\mathbf{a}_{\mathbf{z}} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}\}$ である. さらに, 各 $\mathbf{z} = (z_l) \in \mathcal{Z}$ に対し, $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}(\mathbf{z})$ は唯一の *maximal element* $\mathbf{a}_{\mathbf{z}}$ を含む.

(2) *Lusztig datum* $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ が *maximal* であることと, 任意の $p \in \hat{I}$ に対して $\hat{\varepsilon}_p^*(\mathbf{a}) = 0$ であることは同値.

定義から $\text{wt}(\mathbf{a}_{\mathbf{z}}) = -m(\mathbf{z})\delta$ は容易にわかる. ここに $m(\mathbf{z}) = \sum_{l \geq 1} n z_l$. また $\delta := \sum_{p \in \hat{I}} \hat{\alpha}_p$ は null root である.

P を $A_{n-1}^{(1)}$ 型の weight lattice, $\lambda \in P$ とする. ただ 1 つの元からなる集合 $T_\lambda = \{t_\lambda\}$ を考え, ここに 2 つの $A_{n-1}^{(1)}$ 型の crystal structure $(T_\lambda; \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p, \hat{\varphi}_p, \hat{e}_p, \hat{f}_p)$ and $(T_\lambda; \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p^*, \hat{\varphi}_p^*, \hat{e}_p^*, \hat{f}_p^*)$

を次のように定める：まず $\text{wt}(t_\lambda) = \lambda$ とおく．さらに $p \in \hat{I}$ に対し、 $\hat{e}_p(t_\lambda) = \hat{\varphi}_p(t_\lambda) = \hat{e}_p^*(t_\lambda) = \hat{\varphi}_p^*(t_\lambda) = -\infty$ 、 $\hat{e}_p t_\lambda = \hat{f}_p t_\lambda = \hat{e}_p^* t_\lambda = \hat{f}_p^* t_\lambda = 0$ とおく．

写像 $T: \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}(\mathbf{0}) \otimes T_{-m(\mathbf{z})\delta}$ を

$$\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}(\mathbf{0}) \otimes t_{-m(\mathbf{z})\delta}$$

で定める．このとき、次が成り立つ．

Theorem 5.3.5 ([LTV]). (1) 各 $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ に対し、組 $(\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}(\mathbf{z}); \text{wt}, \hat{e}_p, \hat{\varphi}_p, \hat{e}_p^*, \hat{f}_p^*)$ および、組 $(\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}(\mathbf{z}); \text{wt}, \hat{e}_p^*, \hat{\varphi}_p^*, \hat{e}_p, \hat{f}_p)$ は $A_{n-1}^{(1)}$ 型 *crystal* である．

(2) $(\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}(\mathbf{0}); \text{wt}, \hat{e}_p, \hat{\varphi}_p, \hat{e}_p^*, \hat{f}_p^*)$ と $(\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}(\mathbf{0}); \text{wt}, \hat{e}_p^*, \hat{\varphi}_p^*, \hat{e}_p, \hat{f}_p)$ は、いずれも *crystal* として $A_{n-1}^{(1)}$ 型の $B(\infty)$ と同型である．

(3) 写像 $T: \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}(\mathbf{0}) \otimes T_{-m(\mathbf{z})\delta}$ は、*crystal* としての同型を与える．

(4) 分解 (5.3.1) は、 $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ の *crystal* としての連結成分への分解を与える．より正確に、 $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ の *crystal* の *crystal* としての構造は、次のように記述される．

$$\mathcal{B}_{n-1}^{(1)} \cong \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (B(\infty) \otimes T_{-m\delta})^{\oplus p(m)},$$

ただし $p(m)$ は $m \geq 0$ の分割数．

Remark . Leclerc-Thibon-Vasserot が [LTV] で導入している $\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}$ 上 ($\text{Seg}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 上と言っても良い) は、正確には $(\mathcal{B}_{n-1}^{(1)}; \text{wt}, \hat{e}_p^*, \hat{\varphi}_p^*, \hat{e}_p, \hat{f}_p^*)$ の方である．したがって、厳密に言えば、彼らが証明したのは上記定理の半分だけであるが、残りの部分は全く同じ議論で証明出来るので、“[LTV] の定理”と呼ぶことにした．

6. BZ DATA ARISING FROM LUSZTIG DATA OF INFINITE SIZE

6.1. 主定理．以上の準備のもとに、今回の主結果を述べたい．そのために、いくつか準備をする．

無限サイズの Lusztig datum $\mathbf{a} = (a_{i,j})_{(i,j) \in \Delta_{\mathbb{Z}}^+} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ と有限区間 $I = [l+1, l+m]$ を考える．このとき、 $\Delta_I^+ = \{(i,j) \mid l+1 \leq i < j \leq l+m+1\}$ は自然に $\Delta_{\mathbb{Z}}^+$ の部分集合と思える．そこで $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ から定まる、 Δ_I^+ でインデックス付けされた非負整数の組 $\mathbf{a}^I = (a_{i,j})_{(i,j) \in \Delta_I^+}$ を考える．定義から $\mathbf{a}^I \in \mathcal{B}_I$ となることは、明らかであるが、より強く次が成り立つ．

Lemma 6.1.1 ([NSS2]). 与えられた $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ と $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ に対し、以下の2条件を満たす有限区間 I_0 が存在する：(i) $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(I_0)$ かつ、(ii) $J \supset I_0$ なる任意の有限区間 J に対し、 $M_{\text{res}_J(\mathbf{k})}(\mathbf{a}^J) = M_{\text{res}_{I_0}(\mathbf{k})}(\mathbf{a}^{I_0})$ ．

与えられた $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ と $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ に対して上のような有限区間 I_0 を取り、 $M_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}) := M_{\text{res}_{I_0}(\mathbf{k})}(\mathbf{a}^{I_0})$ と定める．上の Lemma から、この定義は I_0 の取り方に依らない．さらに $\mathbf{M}(\mathbf{a}) := (M_{\mathbf{k}}(\mathbf{a}))_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}}$ とし、 $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ から $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ でインデックス付けされた整数の組のなす集合への写像 $\Phi_{\mathbb{Z}}$ を $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{M}(\mathbf{a})$ で定める．

注意すべきは、このように定義された写像 $\Phi_{\mathbb{Z}}$ が単射ではない、ということである．実際、次が成り立つ．

Lemma 6.1.2 ([NSS2]). 任意の $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ に対し、 $\Phi_{\mathbb{Z}}(\mathbf{a}_{\mathbf{z}}) = \mathbf{0}^*$ である．

しかし、定義域を $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap} = \mathcal{B}_{l-1}^{(1)}(\mathbf{0})$ に制限した場合には、単射となる。より強く、次が成り立つ。

Theorem 6.1.3 ([NSS2], 主定理). 写像 Φ_Z による $\mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap}$ の像は $(BZ_Z^e)^\sigma(\mathbf{O}^*)$ に一致する。さらにこの写像は *crystal* としての同型

$$\Phi_Z : (\mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap}; \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p^*, \hat{\varphi}_p^*, \hat{e}_p^*, \hat{f}_p^*) \xrightarrow{\sim} ((BZ_Z^e)^\sigma(\mathbf{O}^*); \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p^*, \hat{\varphi}_p^*, \hat{e}_p^*, \hat{f}_p^*)$$

を誘導する。

また、Theorem 6.1.3 から次は容易に従う。

Corollary 6.1.4 ([NSS2]). 全単射 $* \circ \Phi_Z : \mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap} \xrightarrow{\Phi_Z} (BZ_Z^e)^\sigma(\mathbf{O}^*) \xrightarrow{*} BZ_Z^\sigma(\mathbf{O})$ は *crystal* としての同型 $(\mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap}; \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p^*, \hat{\varphi}_p^*, \hat{e}_p^*, \hat{f}_p^*) \xrightarrow{\sim} (BZ_Z^\sigma(\mathbf{O}); \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p, \hat{\varphi}_p, \hat{e}_p, \hat{f}_p)$ を誘導する。

6.2. もう一つの具体的表示式。5節の始めに述べた「 $BZ_Z^\sigma(\mathbf{O})$ の全体像を affine 型の Lusztig data を介して理解する」という目標からすれば、Corollary 6.1.4 でも十分なのであるが、同型対応の構成の途中に $(BZ_Z^e)^\sigma(\mathbf{O}^*)$ を用いているために、もう一つわかりにくい点もある。話の最後に affine 型の Lusztig data から $BZ_Z^\sigma(\mathbf{O})$ への同型対応をダイレクトに構成する方法を紹介したい。

まず、有限区間の場合を考える。 $I = [n+1, n+m]$ を有限区間、 $\mathbf{k} = \{k_{n+1} < \dots < k_{n+u}\} \in \mathcal{M}_I^\times$ とする。 I に付随する Lusztig datum $\mathbf{a}^I = (a_{i,j}^I)_{(i,j) \in \Delta_I^+} \in \mathcal{B}_I$ に対し、整数の組 $\mathbf{M}'(\mathbf{a}^I) = (M'_\mathbf{k}(\mathbf{a}^I))_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_I^\times}$ を

$$M'_\mathbf{k}(\mathbf{a}^I) := - \sum_{i=n+1}^{n+u} \sum_{j=k_i+1}^{n+m+1} a_{k_i,j}^I + \min \left\{ \sum_{n+1 \leq p < q \leq n+u} a_{c_p,q,c_p,q+(q-p)}^I \mid \begin{array}{l} C = (c_{p,q}) \text{ は} \\ \mathbf{k}\text{-tableau.} \end{array} \right\}$$

で定める。また写像 Φ'_I を $\mathbf{a}^I \mapsto \mathbf{M}'(\mathbf{a}^I)$ で定義する。

この Φ'_I を持ちいることで、 $\mathcal{B}_I$ から BZ_I への同型を直接構成出来る (Corollary 2.3.3 を参照)。

Proposition 6.2.1 ([NSS2]). 任意の $\mathbf{a}^I \in \mathcal{B}_I$ に対して、 $\Phi'_I(\mathbf{a}^I) = \mathbf{M}'(\mathbf{a}^I)$ は BZ_I の元である。さらに $\Phi'_I : \mathcal{B}_I \rightarrow BZ_I$ は *crystal* としての同型

$$(\mathcal{B}_I; \text{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i) \xrightarrow{\Phi'_I} (BZ_I; \text{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i)$$

を誘導する。

話を無限区間の場合に戻そう。無限サイズの Lusztig data $\mathbf{a} = (a_{i,j})_{(i,j) \in \Delta_Z^+} \in \mathcal{B}_Z$ に対し、その I への制限を $\mathbf{a}^I = (a_{i,j})_{(i,j) \in \Delta_I^+}$ と書く。このとき $\mathbf{a}^I$ が $\mathcal{B}_I$ の元となるのは明らかであろう。前節までの議論と同様の論法で、次が示せる。

Theorem 6.2.2 ([NSS2]). (1) 与えられた $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_Z$ と $\mathbf{k} \in \mathcal{M}_Z^\times$ に対し、有限区間 I_0 が存在して、 $J \supset I_0$ なる任意の有限区間 J に対し、 $M'_{\text{res}_J(\mathbf{k})}(\mathbf{a}^J) = M'_{\text{res}_{I_0}(\mathbf{k})}(\mathbf{a}^{I_0})$ が成り立つ。

(2) $M'_\mathbf{k}(\mathbf{a}) := M'_{\text{res}_{I_0}(\mathbf{k})}(\mathbf{a}^{I_0})$ とおく。このとき、整数の組 $\mathbf{M}'(\mathbf{a}) := (M'_\mathbf{k}(\mathbf{a}))_{\mathbf{k} \in \mathcal{M}_Z^\times}$ は BZ_Z の元である。すなわち、写像 $\Phi'_Z : \mathcal{B}_Z \rightarrow BZ_Z$ が $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{M}'(\mathbf{a})$ によって定まる。

(3) Φ'_Z の定義域を $\mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap}$ に制限したものは、 $\mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap}$ から $BZ_Z^\sigma(\mathbf{O})$ への全単射を与える。さらにこの全単射は *crystal* としての同型

$$(\mathcal{B}_{l-1}^{(1),ap}; \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p, \hat{\varphi}_p, \hat{e}_p, \hat{f}_p) \xrightarrow{\Phi'_Z} (BZ_Z^\sigma(\mathbf{O}); \text{wt}, \hat{\varepsilon}_p, \hat{\varphi}_p, \hat{e}_p, \hat{f}_p)$$

を誘導する。

REFERENCES

- [A] J. E. Anderson, *A polytope calculus for semisimple groups*, Duke. Math. J. **116** (2003), 567-588.
- [BK] P. Baumann and J. Kamnitzer, *Preprojective algebras and MV polytopes*, arXiv:1009.2469.
- [BFZ] A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices*, Adv. Math. **122** (1996), 49-149. N. Enomoto and M. Kashiwara, *Symmetric crystals for gl_∞* , Publ. RIMS. **44** (2008), 837-891.
- [Kam1] J. Kamnitzer, *Mirković-Vilonen cycles and polytopes*, Ann. of Math. **171** (2010), 245-294.
- [Kam2] J. Kamnitzer, *The crystal structure on the set of Mirković-Vilonen polytopes*, Adv. Math. **215** (2007), 66-93.
- [KamS] J. Kamnitzer and C. Sadanand, *Modules with 1-dimensional socle and components of Lusztig quiver varieties in type A*, arXiv:1009.0272.
- [K1] M. Kashiwara, *Crystallizing the q -analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63** (1991), 465-516.
- [K2] M. Kashiwara, *Global crystal base of quantum groups*, Duke Math. J. **69** (1993), 455-485.
- [K3] M. Kashiwara, *Crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula*, Duke Math. J. **71** (1993), 839-858.
- [K4] M. Kashiwara, *Bases Cristallines des Groupes Quantiques*, Cours Spécialisés Vol. **9**, Société Mathématique de France, Paris, 2002.
- [KS] M. Kashiwara and Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*, Duke Math. J. **89** (1997), 9-36.
- [KNS1] S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, *Polytopal Estimate of Mirković-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal*, arXiv:0912.0586.
- [KNS2] S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, *Tensor products and Minkowski sums of Mirković-Vilonen polytopes*, arXiv:1010.0777.
- [LTV] B. Leclerc, J.-Y. Thibon, and E. Vasserot, *Zelevinsky's involution at roots of unity*, J. Reine Angew. Math. **513** (1999), 33-51.
- [L1] G. Lusztig, *Singularities, character formulas and a q -analogue of weight multiplicities*, Astérisque **101-102** (1983), 208-229.
- [L2] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized universal enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447-498.
- [L3] G. Lusztig, *Quivers, perverse sheaves, and quantized universal enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 365-421.
- [L4] G. Lusztig, *Affine quivers and canonical bases*, Publ. Math. IHES **76** (1992), 111-163.
- [L5] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progr. Math. **110** (1993), Birkhäuser.
- [MV1] I. Mirković and K. Vilonen, *Perverse sheaves on affine Grassmannians and Langlands Duality*, Math. Res. Lett. **7** (2000), 13-24.
- [MV2] I. Mirković and K. Vilonen, *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*, Ann. of Math. **166** (2007), 95-143.
- [NS1] S. Naito and D. Sagaki, *A modification of the Anderson-Mirković conjecture for Mirković-Vilonen polytopes in types B and C*, J. Algebra **320** (2008), 387-416.
- [NS2] S. Naito and D. Sagaki, *Mirković-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and on opposite Demazure crystal*, Adv. Math. **221** (2009), 1804-1842.
- [NSS1] S. Naito, D. Sagaki and Y. Saito, *Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, I: Construction of affine analogs*, arXiv: 1009.4526.
- [NSS2] S. Naito, D. Sagaki and Y. Saito, *Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, II: Explicit description*, in preparation.
- [R] M. Reineke, *On the coloured graph structure of Lusztig's canonical basis*, Math. Ann. **307** (1997), 705-723.
- [S] Y. Saito, *PBW basis of quantum universal enveloping algebras*, Publ. RIMS. **30** (1994), 209-232.
- [Sa] A. Savage, *Geometric and combinatorial realizations of crystal graphs*, Alg. Rep. Theory **9** (2006), 161-199.