

保型形式に associate したゼータ函数 $D(s, f, g)$ の値について

— 肥田晴三氏の結果の紹介 —

北大理 前田芳彦 (Yoshitaka Maeda)

自然数 $N \geq 1$ に対して $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0(N)$

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\},$$

とおく, $\Gamma_1(N)$ に対する weight k の cusp form の空間 $S_k(\Gamma_1(N))$

となく. また, modulo N で定義され χ Dirichlet character χ

に対して

$$S_k(N, \chi) = \left\{ f \in S_k(\Gamma_1(N)) \mid f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \chi(d)f, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \right\}$$

となく. 但し

$$\left\{ f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}(z) = f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)(cz+d)^{-k}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

$l < k$ とする. primitive form $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \exp(2\pi i n z) \in$

$S_k(N, \chi)$ と $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \exp(2\pi i n z) \in S_l(N, \psi)$, $b(n) \in \overline{\mathbb{Q}}$,

に対して

$$D_N(s, f, g) = \left(\sum_{\substack{n=1 \\ (n, N)=1}}^{\infty} \chi \psi(n) n^{k+l-2s-2} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a(n) b(n) n^{-s} \right)$$

とわくと, ω は全平面上正則に解析接続し, $l \leq m < k$ なる自然数 m について

$$\frac{\mathcal{D}_N(m, f, g)}{\pi^{2m+l-1} \langle f, f \rangle_N} \text{ は代数的数である}$$

と知られてゐる (G. Shimura: *The special values of zeta functions associated with cusp forms*, *Comm. Pure Appl. Math.* 29 (1976), 783-804). 但 $\langle f, f \rangle_N = \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}} |f(z)|^2 y^{k-2} dx dy$, $(z = x + iy)$, $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$. 本稿では, 上記の値が, m, f, g を変数とする p -進解析函数に interpolate されるという肥田晴三氏の結果の一部を紹介する. 関連論文は次の通り:

H. Hida: *A p -adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic modular forms I, II*, (I: *Invent. math.* 79 (1985), 159-195; II: preprint).

——: *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^e série 19 (1986), 231-273.

——: *Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, *Invent. math.* 85 (1986), 545-613.

§1. p -進 cusp forms, Hecke algebras & ordinary forms.

以下 $p \geq 5$: 素数, $(N, p) = 1$ とし, $\overline{\mathbb{Q}}$ の $\overline{\mathbb{Q}_p}$ への埋め込みを 1 つ固定しておく.

1° p 進 cusp forms :

有限次拡大 $K_0/\mathbb{Q}$ に対して

$$S_k(\Gamma_1(Np^r); K_0) = \left\{ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \exp(2\pi i n z) \in S_k(\Gamma_1(Np^r)) \mid a(n) \in K_0 \right\}$$

とおく ($r \geq 0$). $\bar{\mathbb{Q}_p}$ における topological closure を K とおくと

$$S_k(\Gamma_1(Np^r); K) = S_k(\Gamma_1(Np^r); K_0) \otimes_{K_0} K$$

とおく. これは K のみで定まり, K_0 の取り方は依らない. 更に, $g = \exp(2\pi i z)$ とおくと, $S_k(\Gamma_1(Np^r); K_0)$ の元は ω に関する Fourier 展開により $K_0[[g]]$ の元と見なすことができる. 従って $S_k(\Gamma_1(Np^r); K)$ も亦 $K[[g]]$ に埋め込まれる. K の p 進整数環 $\mathcal{O}_K$ に対して

$$S_k(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) = S_k(\Gamma_1(Np^r); K) \cap \mathcal{O}_K[[g]]$$

とおく. 自然数 $j (> 0)$ に対して

$$S^j(\Gamma_1(Np^r); K) = \bigoplus_{k=1}^j S_k(\Gamma_1(Np^r); K) \subset K[[g]],$$

$$S^j(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) = S^j(\Gamma_1(Np^r); K) \cap \mathcal{O}_K[[g]],$$

とし,

$$S(Np^r; K) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ j}} S^j(\Gamma_1(Np^r); K) \subset K[[g]],$$

$$S(Np^r; \mathcal{O}_K) = S(Np^r; K) \cap \mathcal{O}_K[[g]]$$

とおく. 更に $\bar{\mathbb{Q}_p}$ における normalized p -adic norm $|\cdot|_p$ (i.e. $|p|_p = \frac{1}{p}$) を使って $|\sum_{n=0}^{\infty} a(n) g^n|_p = \sup_n |a(n)|_p$ とおくと, $S(Np^r; K)$ の

各元は有限な値をもつ. この norm に 関する $S(Np^r; K)$ の完備化を $\bar{S}(Np^r; K)$ とし,

$$\bar{S}(Np^r; \mathcal{O}_K) = \bar{S}(Np^r; K) \cap \mathcal{O}_K[[\varphi]]$$

とおく. 以下の通り

$$(1) \quad \bar{S}(Np^r; \mathcal{O}_K) = \bar{S}(N; \mathcal{O}_K)$$

とある. $\bar{S}(N; \mathcal{O}_K)$ の元を p -進 cusp form と云う. 次に, 自然な埋め込みにより, $S_2(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \subset S_2(\Gamma_1(Np^{r+1}); \mathcal{O}_K)$ であるから

$$S_2(Np^\infty; \mathcal{O}_K) = \varinjlim_r S_2(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_K[[\varphi]]$$

が定義される. $S_2(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \subset S^*(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \subset \bar{S}(Np^r; \mathcal{O}_K) = \bar{S}(N; \mathcal{O}_K)$

であるから

$$(2) \quad S_2(Np^\infty; \mathcal{O}_K) \subset \bar{S}(N; \mathcal{O}_K)$$

である.

2° Hecke algebras:

$S_2(\Gamma_1(Np^r))$ 上には Hecke 作用素 $T(n)$ が定義されていて, 自然に $S_2(\Gamma_1(Np^r); K)$ 上へ拡張される. また 対角的に作用させることにより $S^0(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$ 上へ, 従って $S(Np^r; K)$ 及び $\bar{S}(N; K)$ 上へ拡張される. 以上の通り, $S_2(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$, $S^0(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$, $\bar{S}(N; \mathcal{O}_K)$ はそれぞれ stable とあるので, $T(n)$ ($n=1, 2, \dots$) によって $\mathcal{O}_K$ 上生成される $\text{End}_{\mathcal{O}_K}(S_2(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K))$ (resp. $\text{End}_{\mathcal{O}_K}(S^0(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K))$) の subalgebra を $\mathfrak{h}_K(\Gamma_1(Np^r);$

$\mathcal{O}_K$) (resp. $h^j(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$) とおく. $i < j$ のとき, 制限写像により

$$h^j(\Gamma_1(Np); \mathcal{O}_K) \longrightarrow h^i(\Gamma_1(Np); \mathcal{O}_K); \text{ surjection}$$

$$T(n) \longmapsto T(n)$$

が定義される. したがって

$$h(N; \mathcal{O}_K) = \varprojlim_j h^j(\Gamma_1(Np); \mathcal{O}_K)$$

とおくと, これは $\bar{S}(Np; \mathcal{O}_K)$ 上に作用している.

ここで, $(l, Np) = 1$ とする素数 l に対して,

$$f|l = l \{ f|T(l)^2 - f|T(l)^2 \}$$

と定めると, $S_k(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$, $\bar{S}(Np; \mathcal{O}_K)$ 上に

$\varprojlim_r \mathcal{O}_K[(\mathbb{Z}/Np^r\mathbb{Z})^\times]$ の作用を定義し, 更に endomorphism として

$$\varprojlim_r \mathcal{O}_K[(\mathbb{Z}/Np^r\mathbb{Z})^\times] \subset h_k(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K), h(N; \mathcal{O}_K)$$

と存在. $\Lambda_K = \mathcal{O}_K[[1+p\mathbb{Z}_p]]$ とおくと, $\varprojlim_r \mathcal{O}_K[(\mathbb{Z}/Np^r\mathbb{Z})^\times] \cong \Lambda_K \times \mathcal{O}_K[(\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z})^\times]$ であるから, 特に,

(3) $h(N; \mathcal{O}_K)$ は Λ_K -algebra である.

3° ordinary forms:

$$S_k(\Gamma_1(Np^r)) \ni f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \exp(2\pi i n z) \quad (\neq 0) \text{ かつ}$$

$$f|T(n) = a(n)f \quad (n=1, 2, \dots)$$

と存在するとき, $f \in$ normalized eigenform と云う. 特に $a(1)=1$ である. 更に

$$r \geq 1 \text{ 且 } |a(p)|_p = 1$$

となることを, f は ordinary form (for p) と云う. $k \geq 2$ の

とき ordinary form f は次の様にして得られる. まず, f_0

$\in S_k(Np^r, \chi)$: primitive form with conductor Np^r とする.

更に $f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) \exp(2\pi i n z)$ とおくと, $|h(p)|_p = 1$ と仮定する. このとき

$$(i) \ r \geq 1 \text{ のとき } f = f_0;$$

$$(ii) \ r = 0 \text{ のとき } f = f_0(z) - \beta f_0(pz) \ (\in S_k(\Gamma_1(Np)));$$

(但し β は $X^2 - h(p)X + \chi(p)p^{k-1} = 0$ の根で $|\beta|_p < 1$ となるもの.)

とおくと f は ordinary form となる. 次に充分大きい m を

とって

$$e_j = \lim_{r \rightarrow \infty} T(p)^{r_m} \in h^j(\Gamma_1(Np); \mathcal{O}_K)$$

が (m に依らず) 一意に定義される. また,

$$e = \lim_{j \rightarrow \infty} e_j \in h(N; \mathcal{O}_K)$$

も定義され, $e^2 = e$ である. この e により $f \in S_k(\Gamma_1(Np^r))$

($r \geq 1$): normalized eigenform かつ

$$f: \text{ordinary form} \Leftrightarrow f|e = f$$

となる. $\tau = \tau'$

$$h^0(N; \mathcal{O}_K) = e h(N; \mathcal{O}_K),$$

$$\bar{h}^0(N; \mathcal{O}_K) = \bar{h}(N; \mathcal{O}_K)|e, \text{ etc.}$$

とかき, ordinary part と云う. 次の二式は成立する.

(4) (i) $h^0(N; \mathcal{O}_K)$ は Λ_K 上 free & finite rank;

(ii) $R \geq 2$ のとき $\Lambda_K \cong \mathcal{O}_K[[X]]$ と同一視して,

$$(1) \quad h^0(N; \mathcal{O}_K) / ((1+X)^{p^{r-1}} - (1+p)^{Rp^{r-1}}) h^0(N; \mathcal{O}_K) \\ \cong h_R^0(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$$

$$(2) \quad h^0(N; \mathcal{O}_K) / (1+X - (1+p)^R \varepsilon(1+p)) h^0(N; \mathcal{O}_K) \\ \cong h_R^0(\Gamma_0(p^r) \cap \Gamma_1(Np), \varepsilon; \mathcal{O}_K);$$

ここで $\varepsilon: 1+p\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{O}_K^\times$: finite order の character $\gamma \in \text{Ker}(\varepsilon)$

$= 1+p^r\mathbb{Z}_p$ とおきもの. また $h_R^0(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) = h_R(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)_{\mathcal{O}_K}$,

$h_R^0(\Gamma_0(p^r) \cap \Gamma_1(Np), \varepsilon; \mathcal{O}_K)$ は $h_R(\Gamma_0(p^r) \cap \Gamma_1(Np), \varepsilon; \mathcal{O}_K)$ の Hecke algebra の ordinary part である.

4 duality:

$K[[g]]$ の元 $f \in f = \sum_{n=0}^{\infty} a(n, f) g^n$ とかくことができる.

このとき, $h^{\pm}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \times s^{\pm}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$ 上に bilinear form を次のように定める:

$$(5) \quad (h, f) = a(1, f|h), \quad h \in h^{\pm}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K), \\ f \in s^{\pm}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K).$$

特に

$$(6) \quad (T(n), f) = a(n, f)$$

である. 次の duality が成立する:

(7) $r \geq 1$ とする.

$$(1) \quad h^{\pm}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(s^{\pm}(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K),$$

$$S^j(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(h^j(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K).$$

$$(II) \quad h_K(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(S_K(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K),$$

$$S_K(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(h_K(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K).$$

$$(A) \quad h(N; \mathcal{O}_K) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\bar{S}(N; \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K),$$

$$\bar{S}(N; \mathcal{O}_K) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(h(N; \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K).$$

さて, $f \in S_K(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K)$: *normalized eigenform* ($r \geq 1$)

に対して, $f|h = \lambda(h)f$ とおくと

$$h_K(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \ni h \mapsto (h, f) = a(1, f|h) = \lambda(h)$$

は $\mathcal{O}_K$ -algebra homomorphism となる. この逆も成り立ち,

$$(B) \quad \text{Hom}_{\mathcal{O}_K\text{-alg}}(h_K(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K) \xrightarrow{1-1} \{ \text{normalized eigenforms} \\ \in S_K(\Gamma_1(Np^r); \mathcal{O}_K) \}$$

となる.

§2. ordinary forms の family.

$$\mathcal{X}(\mathcal{O}_K) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_K\text{-alg}}(\Lambda_K, \mathcal{O}_K) \text{ とおくと, } \Lambda_K \cong$$

$\mathcal{O}_K[[X]]$ の同型体であり $\mathcal{X}(\mathcal{O}_K) \ni \mathfrak{p}$ に対して $\text{Ker}(\mathfrak{p}) = (X-a)$

とあるとき $\mathfrak{p} \mapsto a$ によって

$$\mathcal{X}(\mathcal{O}_K) \cong \{ a \in \mathcal{O}_K \mid |a|_p < 1 \}$$

となり, $\mathcal{X}(\mathcal{O}_K)$ は p -adic analytic space となる. また,

$$\text{Ker}(\mathfrak{p}) = (X+1 - (1+p)^k \varepsilon(1+p)), \quad \varepsilon: 1+p\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{O}_K^\times:$$

finite order の character, と表わされる $\mathcal{X}(\mathcal{O}_K)$ の部分集合

$\varepsilon \in \mathcal{F}_{alg}(\mathcal{O}_K)$ とかく. $k = k(p)$, $\varepsilon = \varepsilon(p)$, $r = r(p)$ とかく.
 $\text{Ker}(\varepsilon) = \mathbb{H} p^r \mathbb{Z}_p \quad (r \geq 1)$.

さて,

$\lambda : h^0(N; \mathcal{O}_K) \rightarrow \Lambda_K : \Lambda_K\text{-algebra homomorphism}$

とすると, 各 $f \in \mathcal{F}_{alg}(\mathcal{O}_K)$ について

$\lambda_f : h^0(W; \mathcal{O}_K) \xrightarrow{\lambda} \Lambda_K \xrightarrow{f} \mathcal{O}_K ; \mathcal{O}_K\text{-algebra homomorphism}$

が得られ, 従って (7), (8) によって $\text{Sk}(p)(N p^{r(p)}, \varepsilon(p) \psi \omega^{-k(p)})$ に属する ordinary form f_f として

$$f_f|T(n) = \lambda_f(T(n)) f_f$$

となるものが存在する. ω は modulo p の Teichmüller character, ψ は modulo Np の Dirichlet character として λ のみで定まるものである. $\lambda(T(n)) = A_n(X) \in \Lambda_K = \mathcal{O}_K[[X]]$ とおくと, f_f は

$$f_f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varepsilon(1+p)(1+p)^k - 1) \exp(2\pi i n z)$$

と parametrize される. ($k = k(p)$, $\varepsilon = \varepsilon(p)$). $k(p) \geq 2$ 且 f_f は conductor $N p^{r(p)}$ の primitive form となる f が存在するとし, $\lambda \in \text{primitive}$ と置く.

§3. generalized p -adic measure.

$\mathbb{Z}_p^x$ 上の連続函数で $\mathcal{O}_K$ 上へ値をとるもののなす p -adic Banach space を $C(\mathbb{Z}_p^x; \mathcal{O}_K)$ とし,

$$\text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K),$$

$$\text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K = \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \otimes_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K \text{ の } p\text{-進完備化}$$

と置く. $\Phi \in \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K$ 及び $f \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_K)$ に対し
 $\Phi_f \in \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K)$ 次の様に定める:

$$\text{id} \otimes f : \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K \rightarrow \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \otimes_{\mathcal{O}_K} (\Lambda_K / \text{Ker } f)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \parallel \\ \Phi_1 & \longrightarrow & \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi_1 & \longrightarrow & \Phi_f \end{array}$$

同様に $\text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K \ni \bar{\Phi}$ と $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_K)$ に対し
 $\Phi_{f,g} \in \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K)$ が定まる.

§4. 結果.

定理 (Hida) $(N, p) = 1, (J, p) = 1$ なる自然数 N, J に対し

27

$$\lambda : h^0(N, \mathcal{O}_K) \rightarrow \Lambda_K : \text{primitive } \Lambda_K\text{-algebra homomorphism}$$

$$\mu : h^0(J, \mathcal{O}_K) \rightarrow \Lambda_K : \Lambda_K\text{-algebra homomorphism}$$

とある. K が充分大な p -進数体のとき, $\Phi = \Phi^{\lambda, \mu} \in \text{Meas}(\mathbb{Z}_p^X; \mathcal{O}_K) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} \Lambda_K$ 次のことを満たすものが一意に存在する:

$f, g \in \mathcal{F}_{\text{alg}}(\mathcal{O}_K)$ かつ $2 \leq k(g) < k(f)$ とある. $0 \leq m < k(f) - k(g)$ なる整数 m と $\chi : \mathbb{Z}_p^X \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}^X$: finite order の

character に対して

$$\int_{\mathbb{Z}^{\times}} \chi(z) z^m d\bar{Q}_{f,g} \\ = t(f, m, j, \beta) a(p, f_g)^{r(f)-\beta} H(f) \frac{D_{JNp}(j-m, f_g, (f_g|\chi)|_{\tau_\beta})}{\pi^{j+1} \langle h_g, f_g \rangle_{Np^{r(f)}}}.$$

但. f_g は (λ, g) に対して定まる ordinary form; g_g は (μ, g) に対して定まる ordinary form; $j = k(g) + 2m$; β は $f_g|\chi = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) a(n, f_g) \exp(2\pi i n z) \in S_{k(g)}(\Gamma_1(Jp^\beta))$ となる自然数;

$$\tau_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Jp^\beta & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z});$$

$$t(f, m, j, \beta) = 2^{1-k(f)-j} (\sqrt{f})^{k(f)+j} \frac{1}{p^{\frac{1}{2}(j-r(f)(k(f)-2))}}$$

$$\times (N \text{ と } J \text{ の 最小公倍数})^{1-m+\frac{1}{2}(j-k(f))}$$

$$\times N^{-\frac{k(f)}{2}} J^{m+\frac{k(f)}{2}} (j-m-1)! m!;$$

H は λ によって決まる Λ_K の元で, $H(f)$ は H の f への値;

$$h_g = f_g^p|_{k(g)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Np^{r(g)} & 0 \end{pmatrix} \in S_{k(g)}(Np^{r(g)}, \varepsilon(g)\psi\omega^{-k(g)}),$$

p は complex conjugation;

$$\langle h_g, f_g \rangle_{Np^{r(g)}} = \int_{\Gamma_0(Np^{r(g)}) \backslash \mathbb{H}} \bar{h}_g(z) f_g(z) y^{k(g)-2} dx dy, \quad z = x + iy.$$