

Dehn surgered manifolds and knots II

九州大 理 茂手木 公彦 (Kimihiro Motegi)

Dehn surgery は knots の世界と closed oriented 3-manifolds の世界を結ぶ懸け橋といえる。だが、橋が複雑でキチンとした案内板のようなものがまだない。

異なる knot を Dehn surgery することにより同じ oriented manifold が得られる例が “surgery modification” などによって構成されている。(Brakes [1], Lickorish [5], Livingston [6], Maruyama [7], Rolfsen [10])

ここでの目標は Dehn surgery を通して knots と closed oriented 3-manifolds の間の関係を調べることである。

oriented S^3 中の (unoriented な) knot K に対し、 $M(K; \frac{p}{q})$ で K に沿って $\frac{p}{q}$ -Dehn surgery をして得られる oriented manifold を表わし、 $D_K \equiv \{M(K; \frac{p}{q}) \mid \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}\}$, $H_K \equiv \{M(K; \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とおく。また、2 つの knots K_1, K_2 に対し $K_1 = K_2$ はそれらが S^3 で ambient isotopic であることを意味し、2 つの oriented manifolds M_1, M_2 に対し $M_1 = M_2$ はそれらが

orientation preservingly homeomorphicであることを意味するものとする。まず、次の事実に注意する。

命題 任意の knot K に対して、 $\#D_K \cap D_{K_i} = \infty$ となるような knot K_i が無限個存在する。

そこで、はじめに surgery の係数が一致する場合について報告し、次に Dehn surgery で得られる homology 3-sphere に限って考察する。

1. surgery の係数が一致する場合

linking number が 0 であるような Brunnian link を考えることにより、異なる knots を r -surgery して同じ oriented manifold が構成されているが、異なる knots を同じ surgery することによりどのくらい同じ oriented manifold が構成されるかということについて次がわかる。

定理 1. $K_1 \neq K_2$ とする。次の場合を除いて、 $M(K_1; r) = M(K_2; r)$ となるような r は高々有限個。

(i) K_i ; (r_i, s_i) -cable knot で、 $r_1 s_1 = r_2 s_2$

(ii) K_i ; composite knot

従って、特に異なる hyperbolic knots k_1, k_2 に対しては、
 $M(k_1; r) = M(k_2; r)$ となるような r は高々有限個であるが、Dehn
 surgery で得られた hyperbolic manifold の volume に関して、
 最近 Ruberman は次を示している。

Theorem (Ruberman [11]) K を任意の hyperbolic knot
 とし、その mutant knot を K^μ と表わす。このとき、 K^μ も
 hyperbolic knot で、 $M(K; r), M(K^\mu; r)$ が hyperbolic なら
 それらの volume は一致する。

2. Dehn surgered homology 3-spheres

ここでは特に、Dehn surgery で得られる homology 3-sphere
 に限って考察し、 H_K という集合の交わりの様子を調べる。
 はじめに、次の問題が考えられる。

問題 1. 任意の non-trivial knot K に対し、 $\#H_K \cap H_{K'} \geq 2$
 となるような knot K' ($K' \neq K$) が存在するか？

(任意の knots K, K' に対し $H_K \cap H_{K'} \ni \emptyset$ より、 $\#H_K \cap H_{K'} \geq 1$
 である。 $\#H_K \cap H_{K'} \geq 2$ ということは、 H_K と $H_{K'}$ とが本質的に
 交わっていることを意味する。)

この問に対しては、 K' として K の $(1, 2)$ -cable, あるいは、 $(-1, 2)$ -cable をとれば、Gordon の結果 [4] と cyclic surgery theorem (Culler - Gordon - Lueck - Shalen [3]) により、条件をみたすことがわかる。(従って、 K に対し、上のように少なくとも 2 つの knots が存在していることがわかる。)

では、いったい $\#H_{K_1} \cap \cdots \cap H_{K_n} \geq 2$ となるような knots $K_1, \dots, K_n$ の個数はどれくらいまでとれるのだろうか?

問題 2. $\#H_{K_1} \cap \cdots \cap H_{K_n} \geq 2$ となるような knots $K_1, \dots, K_n$ の個数 n は bounded か? (ある定数でおさえられるか?)

これについては、Livingston が構成した例が否定的な答を与えている。

Theorem (Livingston [6]) 任意の自然数 n と整数 m に対して、 $M(K_1; \frac{1}{m}) = \cdots = M(K_n; \frac{1}{m}) \neq S^3$ なる knots の組 $K_1, \dots, K_m$ が存在する。

次に、異なる knots K_1, K_2 が与えられたとき、 $H_{K_1} \cap H_{K_2}$ はどうなっているかを考える。

問題 3. $K_1 \neq K_2$ とする。 $\#H_{K_1} \cap H_{K_2}$ は有限か？

この問に対しては次が成り立つ。

定理 2.1. $K_1, K_2 (\neq K_1)$ の一方は Property P をもつとする。

このとき、 $\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid M(K_1; \frac{1}{m}) = M(K_2; \frac{1}{n})\}$ は有限集合 (但し、 K_i は non-trivial)。特に、 $\#H_{K_1} \cap H_{K_2}$ は有限。

この定理は次の 2 つの命題から得られる。

命題 2.2. K_1, K_2 の一方は Property P をもつとする。

各 K_i に対し有限集合 $D(K_i) \subset \mathbb{Z}$ が存在して、 $m \notin D(K_1)$, $n \in D(K_2)$ なる (m, n) に対し、 $M(K_1; \frac{1}{m}) = M(K_2; \frac{1}{n})$ ならば、 $K_1 = K_2$ となる。

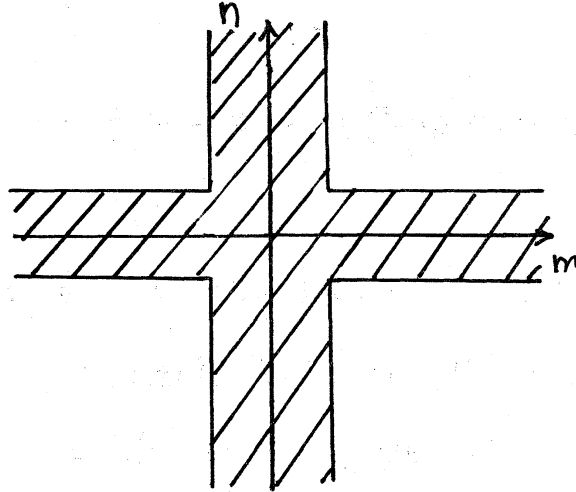
命題 2.3. K を任意の non-trivial knot とする。このとき、

$$\begin{array}{ccc} f_K : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{ \text{homology 3-spheres} \} \\ \downarrow & & \downarrow \\ n & \longmapsto & M(K; \frac{1}{n}) \end{array}$$

は有限対 1 写像である。

注意. 1°. K が trivial knot のとき, $f_K(\mathbb{Z}) = \{S^3\}$
 2°. K の normalized Alexander polynomial を $\Delta_K(t)$ としたとき, $\Delta_K''(1) \neq 0$ ならば, f_K は 1対1 であることが示されている (Casson [2]).

$K_1 \neq K_2$ とする。命題 2.2. より, $M(K_1; \frac{1}{m}) = M(K_2; \frac{1}{n})$ なる (m, n) は下の図の斜線部にしかありえない。



また、斜線部に上のような (m, n) の組が無限個あれば、無限個の m_i に対し $M(K_1; \frac{1}{m_i})$ がすべて一致するか、無限個の n_i に対し $M(K_2; \frac{1}{n_i})$ がすべて一致することになり、命題 2.3. に反する。

特に、surgery の係数が一致していると、すなわち、 $m=n$ のときは、Property P に関する条件は不要で、次が成り立つ。

系 無限個の整数 n に対して $M(K_1; \frac{1}{n}) = M(K_2; \frac{1}{n})$

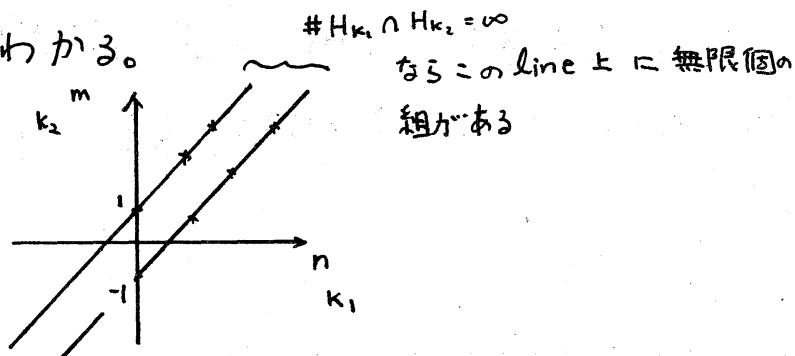
となるための必要十分条件は $k_1 = k_2$ である。

“Property P conjecture”に関連した予想として、“knot type conjecture” (knot complement は knot を決定する) があるが、この予想と関連して次が成り立つ。

系 任意の異なる knots の組 (k_1, k_2) に対して、

$\#H_{k_1} \cap H_{k_2}$ が有限であることと “knot type conjecture” が正しいことは同値。

また、もし $\#H_{k_1} \cap H_{k_2}$ が無限であるとする、cyclic surgery theorem を用いることにより、 $M(k_1; \frac{1}{n}) = M(k_2; \frac{1}{n+1})$ あるいは、 $M(k_1; \frac{1}{n}) = M(k_2; \frac{1}{n-1})$ なる n が無限個なければいけないことがわかる。

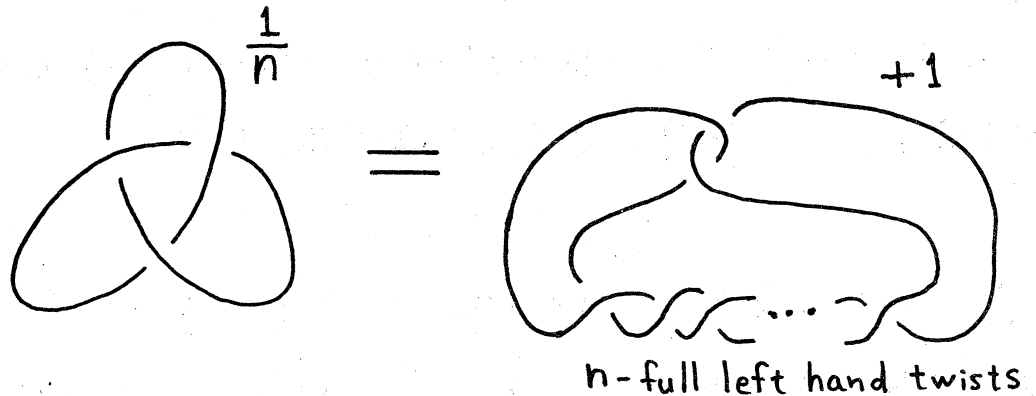


注意. 1°. $M(k_1; \frac{1}{m}) = M(k_2; \frac{1}{n})$ となるような m, n に対し、 $|m|, |n|$ はいくらでも大きな値をとる。

(Livingston の例)

2.° $M(k_1, \frac{1}{m}) = M(k_2, \frac{1}{n})$ となるような m, n に対し、 $m-n$ は任意の整数値をとらう。

例 (Rolfsen [10])



最後に、 $H_{k_1} \cap H_{k_2}$ の個数に関して次の問題をあげておきます。

問題 任意の knots k_1, k_2 ($k_1 \neq k_2$) に対して、

$1 \leq \# H_{k_1} \cap H_{k_2} \leq 2$ が成り立つか?

($\# H_{k_1} \cap H_{k_2} \geq 3$ となるような例が構成できても面白いと思う)

詳しくは [8] [9] を参照して下さい。

References

- [1] Brakes, W.R. : Manifolds with multiple knot surgery descriptions. Proc. Camb. Phil. Soc. 87, 443-448 (1980)
- [2] Casson, A.J. : An integer invariant of homology 3-spheres. to appear
- [3] Culler, M - Gordon, C.McA - Luecke, J - Shalen, P. : Dehn surgery on knots. Ann. of Math. 125, 237-300 (1987)
- [4] Gordon, C.McA. : Dehn surgery and satellite knots. Trans. Amer. Math. Soc. 275, 687 - 708 (1983)
- [5] Lickorish, W. : Surgery on knots. Proc. of Amer. Math. Soc. 60, 296 - 298 (1976)
- [6] Livingston, C. : More 3-manifolds with multiple knot-surgery and branched cover descriptions. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 91, 473 - 475 (1982)
- [7] Maruyama, N. : Knot surgery descriptions of some closed orientable 3-manifolds. Tsuda College, Jan. 16 1-14 (1984)
- [8] Motegi, K : Dehn surgered manifolds and knots.
Preprint

- [9] Motegi, K : Homology 3-spheres which are obtained by Dehn surgeries on knots
- [10] Rolfsen, D: Rational surgery calculus : Extension of Kirby's theorem. Pacific. J. Math. 110, 377-386 (1984)
- [11] Ruberman, D: Mutation and volumes of knots in S^3 . Invent. Math. 90, 189 - 215 (1987)