

Regular Coverings of Links

大阪市大 理 作間 誠

(Makoto Sakuma)

Kim-Tollefson [1] は、既約でない 3-mfd 上の involution は既約成分の involution に分解される事を示した。特に、系として、 S^3 の link L で分岐する 2-fold branched covering space が irreducible であるためには、 L が non-splittable かつ prime であるのが必要十分である事が示された。

ここでは、Meeks-Yau [3] の equivariant sphere theorem を用いて上の結果を一般の regular cover の場合に拡張し、その二つの応用を述べる。一つは $S^2 \times S^1$ を regular cover に持つ S^3 内の link type の決定であり、もう一つは、composite link の period に関するものである。

以下、次の記号を用いる。

S^3 内の link $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ に對して、

$E(L) = S^3 - L$: L の補空間,

$G(L) = \pi_1(E(L))$: L の link group ,

$m(K_i) \in G(L)$: K_i の meridian .

Link group $G(L)$ から有限群 G への epimorphism φ が与えられた時.

$E_\varphi(L)$: $\text{Ker } \varphi$ に対応する $E(L)$ の covering space ,

$\Sigma_\varphi(L)$: $E_\varphi(L)$ の completion とし得られる S^3 の branched cover .

この時、 G は $\Sigma_\varphi(L)$ に効果的に作用し、 $\Sigma_\varphi(L)/G \cong S^3$ となる。

L の component K_i が branch set に属する (ie $p^{-1}(K_i) \subset \text{Fix } G$,

但し $p: \Sigma_\varphi(L) \rightarrow S^3$ は projection) 事と、 $\varphi(m(K_i)) \neq 1$ ($\in G$)

となる事は同値である。そこで、すべての i ($1 \leq i \leq \mu$) に

対して、 $\varphi(m(K_i)) \neq 1$ となる時、 $\Sigma_\varphi(L)$ を L の regular cover

と呼ぶ。又、特に、 G が abel 群の時 $\Sigma_\varphi(L)$ を L の abelian

cover、 G が cyclic group $\mathbb{Z}_n$ の時 $\Sigma_\varphi(L)$ を $\Sigma_n(L)$ で表わし、 L の

n -fold branched cyclic cover と呼ぶ。

§ 1. Regular cover の second homotopy group

Link L の regular cover $\Sigma_\varphi(L)$ に関して次が成り立つ。

定理 1 (a) $\pi_2(\Sigma_\varphi(L)) \neq 0$ となるためには、 L が split link または composite link である事が必要十分である。

(b) $\Sigma_\varphi(L)$ が non-separating 2-sphere を含むためには、次の (1) または (2) の いづれかが成り立つ事が必要十分である。

(1) L は split link $L_1 \circ L_2$

(2) L は composite link $L_1 \# L_2$ で $G_i \cong \varphi(G(L_i)) \cong \langle \varphi(m) \rangle$

($i=1,2$) となる。但し、ここで $G(L) = G(L_1) *_{\langle m \rangle} G(L_2)$

と見なしている。

更に、この時 $\Sigma_g(L)$ は (少なくとも) 次の個数の "独立な" non-separating 2-sphere を含む。

(1) の場合: $1 + |G| \{ 1 - 1/|G_1| - 1/|G_2| \}$

(2) の場合: $1 + [G: \langle \varphi(m) \rangle] \{ 1 - 1/[G_1: \langle \varphi(m) \rangle] - 1/[G_2: \langle \varphi(m) \rangle] \}$

(証明) Equivariant sphere theorem と homotopy Smith conjecture を用いる。詳しくは [8] を見て下さい。

§ 2. $S^2 \times S^1$ を regular cover に持つ link

2-fold branched covering に関しては、branch line の一意性の問題はいろいろ研究されているが、一般の regular cover については、まだあまり調べられていない。ここでは、定理 1 を用いて、 $S^2 \times S^1$ を regular cover に持つ S^3 内の link type を決定する。

定理 2 $\Sigma_g(L)$ が homotopy $S^2 \times S^1$ であるためには、次の (1), (2) のいずれかが成立する事が必要十分である。

$$(1) \quad L \cong \bigcirc_{K_1} \bigcirc_{K_2}$$

$$G \cong D_n = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^n = 1 \rangle$$

$$\varphi(m(K_1)) = x, \quad \varphi(m(K_2)) = y.$$

$$(2) \quad L \cong \bigcirc_{K_1} \bigcirc_{K_3} \bigcirc_{K_2}$$

G は 2つの $G^I(n, k)$, $G^{II}(n, k)$ のいずれかに同型。

$$\begin{cases} G^I(n, k) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^k = [x, z] = [y, z] = (xy)^n = 1 \rangle \\ \quad (n, k : \text{positive integers}) \\ G^{II}(n, k) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^k = [x, z] = [y, z] = (xy)^n z^{k'} = 1 \rangle \\ \quad (n, k = 2k' : \text{positive integers}) \end{cases}$$

$$\varphi(m(K_1)) = x, \quad \varphi(m(K_2)) = y, \quad \varphi(m(K_3)) = z.$$

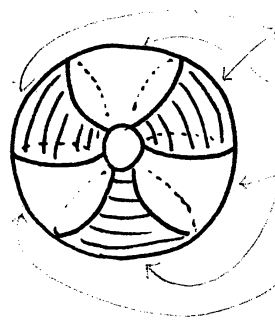
更に、上が成立する時、 $\Sigma_g(L)$ は $S^2 \times S^1$ に同相である。

(証明) 十分性を示す。

(1) の場合。 Link を split する 2-sphere を S , K_i を含む $S^3 - S$ の component の closure を B_i とする。 $S^3 = B_1 \cup_S B_2$,
よって $\Sigma_g(L) = p^{-1}(B_1) \cup_{p^{-1}(S)} p^{-1}(B_2)$ とある。 とは 3 が、
 $p^{-1}(B_i)$ は n 本の $\Sigma_2(K_i) - \{\text{two 3-balls}\} \cong S^2 \times I$ の disjoint
union である。 これより $\Sigma_g(L) \cong S^2 \times S^1$ を得る。

(次図参照)

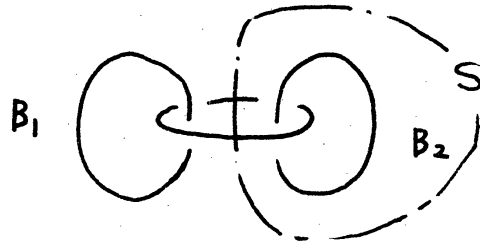
($n=3$ の場合)



$$p^{-1}(B_1) = n(S^2 \times I)$$

$$p^{-1}(B_2) = n(S^2 \times S')$$

(2) の場合. Link を decompose する 2-sphere を S , K_i を含む $S^3 - S$ の component の closure を B_i ($i=1,2$) とする。



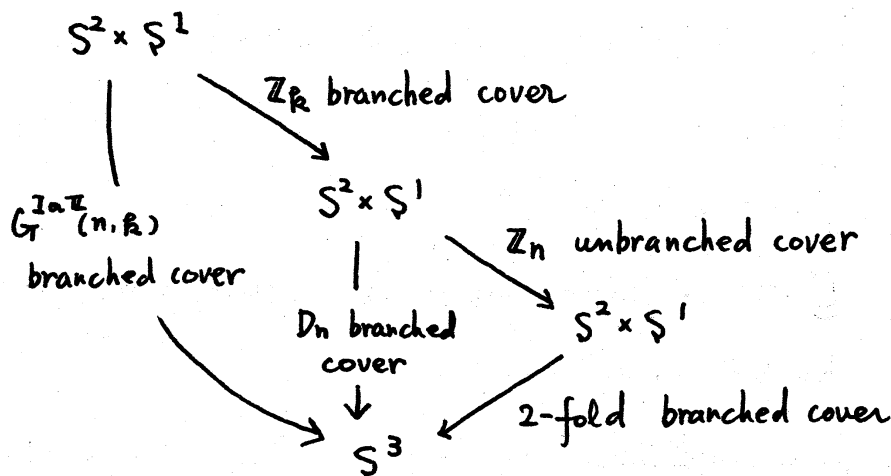
この時、 $\Sigma_\varphi(L) \cong p^{-1}(B_1) \cup_{p^{-1}(S)} p^{-1}(B_2)$ 。又、 $p^{-1}(B_i)$ は n 個の $S^3 - \{\text{two } 3\text{-balls}\} \cong S^2 \times I$ の disjoint union である事がわかる。これより $\Sigma_\varphi(L) \cong S^2 \times S'$ を得る。

次に必要性の証明の概略を述べる。 $\Sigma_\varphi(L)$ が homotopy $S^2 \times S'$ であるとする。定理 1 により、 L は split link $L_1 \circ L_2$, 又は composite link $L_1 \# L_2$ である。 $\varphi_i = \varphi|_{G(L_i)}$ とすると、 $\Sigma_\varphi(L)$ は $\Sigma_{\varphi_i}(L_i) - \{3\text{-balls}\}$ ($i=1,2$) の copy を張り合わせて出来る。これより、 $\Sigma_{\varphi_i}(L_i)$ は homotopy 3-sphere で、しかも、 φ_i は abelian representation である事がわかる。ところで、homotopy 3-sphere を abelian cover に持っ

link は trivial knot と Hopf link に限る ([4, 7, 8])

これより (1), (2) の いづれかが成立しなくてはならない事がわかる。

Remark 定理 2 で与えられた branched covering は、次の様に分解される。



§3. Composite link の period

S^3 内の link L が period $n (> 1)$ を持つとは、次の条件を満足する S^3 上の homeomorphism T が存在する事を言う。

- (1) $T(L) = L$,
- (2) $\text{Fix}(T)$ は L と交わらない 1-sphere,
- (3) T は period n の periodic map。

この章では、定理 1 を用いて、composite link は "canonical" な period n を持つ事を示す。

今、 L を period n の periodic link とし、 T を それに付随
 L 上 periodic map とする。この時 [10] により T は
 standard rotation で $S^3/T \cong S^3$ とする。 $p \in \text{projection}$
 $S^3 \rightarrow S^3/T$ とし、 $K_0 = p(\text{Fix}(T))$, $\underline{L} = p(L)$, $\underline{L}' = K_0 \cup \underline{L}$
 とおく。

定理 3 (a) L が split link であるためには、次の (1) または (2)
 が成立する事が必要十分である。

(1) $\underline{L}'$: split link,

(2) $\underline{L}'$ は composite link で、その decomposing 2-sphere は
 K_0 と交わる。

(b) L は non-splittable とする。この時、 L が composite
 link であるためには、 $\underline{L}'$ が composite link で、その decomposing
 2-sphere が K_0 と交わる事が必要十分である。

(c) L が trivial knot であるためには、 $\underline{L}'$ が Hopf link
 である事が必要十分である。

(証明) (a), (b). L 及び $\underline{L}'$ の適当な regular cover
 に対して定理 1 を適用する ([9] 参照)。

(c) については [7, 8] 参照。

上の定理より、次を得る。

定理 4 L を non-splittable link とし、 $\#\{n_i L_i \mid 1 \leq i \leq s\}$
 $(s \geq 1, n_i \geq 1)$ を L の prime decomposition とする。この時、
 もし L が period $n (> 1)$ を持てば 次の (1) 又は (2) が成立する。

(1) n はすべての n_i ($1 \leq i \leq s$) を割り切る。

(2) ある自然数 j ($1 \leq j \leq s$) に対して次が成立する

(i) L_j は period n を持つ、

(ii) $n \mid n_j - 1$,

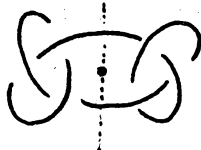
(iii) $n \mid n_i$ ($i \neq j$) .

更に、上の条件は knot に対しては十分条件でもある。

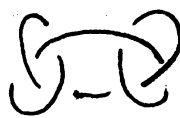
系 1 (1) K を nontrivial prime knot とすると、 $K \# K$ は
 period 2 を持ち、しかもそれが唯一つの period である。

(2) K_1, K_2 を相異なる nontrivial prime knot とすると、
 $K_1 \# K_2$ は period を持つ $T \neq 1$ 。

例 1 Granny knot は唯一つ period 2 を持つ。 - 5、
 square knot は period を持つ $T \neq 1$ 。



Granny



square

Remark 系 1 の (1) において、付随する involution も一意である事が証明からわかる。

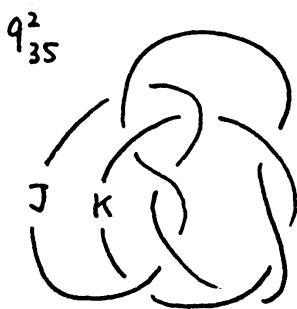
系 2 Non-splittable composite link は 高々 有限個の period しか持たない。

Remark Trotter [11], Murasugi [5] は、fibred knot は 高々 有限個の period しか持たない事を示した。

最後に、定理 3 の応用として、すべての自然数 $n (> 1)$ に対して、相異なる prime knots J_n, K_n で その n -fold branched cyclic cover が 同相となるものを構成する。

(二つの相異なる composite knots で すべての branched cyclic cover が 同相となる例は既に知られている。)

$L = J \cup K$ を 9_{35}^2 -link とする。この時、 $lk(J, K) = 1$,



J, K は共に unknotted, J, K は

prime である。今、 $J_n [K_n]$ を

$\Sigma_n(K) \cong S^3 (\Sigma_n(J))$ への $J [K]$

の lift とする。すると、定理 3 により

J_n, K_n は共に non trivial prime knot

である。又、 J_n, K_n の n -fold branched cyclic cover は

共に L の $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$ branched cover であり、従って同相となる。
 ここで、Alexander 多項式を調べる事に依り、 J_n と K_n
 は同相なる事がわかる。よってこれが求めていた knot である。
 (この例は、筆者と中西氏が構成したものであるが、中西氏
 は、tangle 論法の改良により、 J_n, K_n の primeness の初等的
 証明を与えた [6]。)

References

- [1] Kim, P.K., Tollefson, J.L.: Splitting involutions of nonprime 3-manifolds, Mich. Math. J. 27, 259-274
- [2] Kouno, M.: The irreducibility of 2-fold branched covering spaces of 3-manifolds, 数理研講究録 417, pp.106-121 (1981)
- [3] Meeks, W.H.III, Yau, S.T.: Topology of three dimensional manifolds and the embedding problem in minimal surface theory, Ann. of Math. 112, 441-484 (1980)
- [4] Morgan, J.W.: Actions de groupes finis sur S^3 , Lect. Notes in Math. 901 Springer Verlag, pp.277-289 (1981)
- [5] Murasugi K.: On periodic knots, Comment. Math. Helv. 46, 162-174 (1971)
- [6] Nakanishi Y.: Primeness of links, Math. Semi. Notes, Kobe Univ. 9, 415-440, (1981)
- [7] Sakuma M.: Abelian coverings of links, 数理研講究録 417, pp.62-70, (1981)
- [8] Sakuma M.: On regular coverings of links, to appear in Math. Ann.
- [9] Sakuma M.: Periods of composite links, Math. Semi notes, Kove Univ. 9, 445-452, (1981)
- [10] The proof of the Smith Conjecture, Proc. of Conference at Columbia University, New York, 1979, in preparation
- [11] Trotter H.F.: Periodic automorphisms of groups and knots, Duke Math. J. 28 (1961), 553-558