

関数がスパイラル型である ための条件について

坂 口 果 一 (奈良産業大学)

先の論文〔1〕で筆者はJackの補題とMiller-Mocanuの補題について考察し、これらの補題の応用として、関数が星型であるための十分条件について論じた。本論文では問題を敷延して、関数がスパイラル型であるための十分条件について考察する。なおその前に、関数がスパイラル型であるということの意味について一瞥しておく。

1. 準備

1°. スパイラル型な閉曲線

(ρ, ϕ) を極座標とする極座標平面上でスパイラル

$$(1.1) \quad \rho e^{a\phi} = K \quad (a, K \text{ は定数, } K > 0)$$

を考える。このスパイラルは、 $a > 0$ のときは、左旋回で極に近かずに極を無限回取り巻く。又 $a < 0$ のときは、右旋回で極に近かずに極を無限回取り巻く。

次に a が一定で K が変る場合を考える。この場合スパイラルは、形は変らいが位置が変る。 $a > 0$ のときは、 K が大きくなればスパイラルは左回転で移動し、 $a < 0$ のときは、 K が大きくなればスパイラルは右回転で移動する。そうして K がある値 K_0 から $K_0 e^{2\pi a}$ まで単調に増加又は減少すれば、スパイラルは極のまわりを1回転してもとの位置に戻る。その際に出来るスパイラル (1.1) の族を $Sp(a)$ で表そう。

いま極を取り巻く単純閉曲線 C があって、 C が $Sp(a)$ に属する各々のスパイラルとただ1点でしか交らないとき、 C はスパイラル族 $Sp(a)$ に関して星型である、あるいは単に極 (原点) に関してスパイラル型 (spiral-lik) であるという。

2° スパイラル型関数

複素 w 平面上に、原点を極に、正の実軸を始線に見立てて、スパイラル

(1.1.) を描くと、その複素方程式は

$$(1.2) \quad |w| e^{a \arg w} = K \quad (K > 0)$$

となる。

いま複素 z 平面上の開単位円板を U で表し、 U において定義される解析関数 $f(z) = a_1 z + \dots, a_1 \neq 0$, を考える。 $f(z)$ による円 $|z| = r (< 1)$ の像を C_r とする。 1 より小さく、かつ 1 に十分近いすべての r に対して C_r がスパイラル族 $Sp(a)$ に関して星型であるとき、 $f(z)$ は U において $Sp(a)$ に関して星型であるという。しかし a の値を示す必要がないときは、単に原点に関してスパイラル型 (spiral-like) であるともいう。

C_r が $Sp(a)$ に関して星型であるとき、 C_r がスパイラル (1.2) を横切る点を $f(z)$, $z = re^{i\theta}$, とすると、

$$|f(z)| e^{a \arg f(z)} = K$$

である。両辺の対数をとると、

$$(1.3) \quad \operatorname{Re}\{\log f(z)\} + a \operatorname{Im}\{\log f(z)\} = \log K$$

となる。 $z = re^{i\theta}$ の θ が増加すると、点 $f(z)$ を載せているスパイラル (1.2) の K の値は、 1° で調べたように、 $a > 0$ のときは大きくなり、 $a < 0$ のときは小さくなる。それ故 (1.3) の両辺を θ で偏微分すると、

$$\begin{aligned} & -\operatorname{Im}\{zf'(z)/f(z)\} + a \operatorname{Re}\{zf'(z)/f(z)\} \\ & = \{\partial K / \partial \theta\} / K \geq 0 \quad \text{for } a \geq 0 \end{aligned}$$

となる。書き直せば、

$$\operatorname{Re}\{(a + i)zf'(z)/f(z)\} \geq 0 \quad \text{for } a \geq 0$$

となるから、

$$(1.4) \quad \operatorname{Re}\{e^{i\alpha}(a+i)zf'(z)/f(z)\} > 0 \quad \text{for } a \geq 0, \quad |z| = r$$

ここで

$$(1.5) \quad \alpha = \arg\{e^{i\alpha}(a+i)\}, \quad a \geq 0$$

とおけば, $a > 0$ のときは $0 < \alpha < \pi/2$, $a < 0$ のときは $-\pi/2 < \alpha < 0$ であ
って, (1.4) は

$$(1.6) \quad \operatorname{Re}\{e^{i\alpha}zf'(z)/f(z)\} > 0, \quad |z| = r$$

となる。

更に C_r は原点を 1 回だけ取りまく単純閉曲線であるから, $f(z)$ は $|z| \leq r$ において原点以外には零点を持たない。それ故 (1.6) の左辺は $|z| \leq r$ で調和になり, 調和関数の最小値の原理によって

$$(1.7) \quad \operatorname{Re}\{e^{i\alpha}zf'(z)/f(z)\} > 0, \quad |z| \leq r$$

が得られる。

以上により, C_r が $Sp(a)$ に関して星型であるらば, (1.5) の α に対して (1.7) が成り立つことが分かった。

こんどは逆に U における解析関数 $f(z) = a_1z + \dots$, $a_1 \neq 0$, が (1.5) の α に対して (1.7) を満たすものと仮定する。このとき (1.6) が成り立つが, (1.6) は上で示したように, 「 z ($|z| = r$) の偏角 θ が大きくなれば, 点 $f(z)$ が $Sp(a)$ に属するスパイラル (1.2) を, a の正負に応じて K が増加又は減少する方向に順次横切って, 原点のまわりを回転する」ことを表す。この際 θ が 0 から 2π まで変ると $f(z)$ は原点を取り巻いて閉曲線 C_r を描くが, (1.7) によって $f(z)$ は $|z| \leq r$ において原点以外には零点を持たないから, C_r が原点を取り巻く回数はただ 1 回である。それ故 C_r は $Sp(a)$ に関して星型な単純閉曲線になる。加えて (1.7) により, $|z| \leq r$ において $f'(z) \neq 0$ であることも分かるので, Darvoux の定理によって $f(z)$ は $|z| < r$ において単葉である。

以上の議論が, いくらでも 1 に近い $r (< 1)$ に対しても適用できるような場合

を考えて、我々は次の定理を得る。

定理 A. $f(z)=a_1z+\dots$, $a_1 \neq 0$, を開単位円板 U 上で解析的であるとする。
 $f(z)$ が U において単葉で、かつスパイラル族 $Sp(a)$ に関して星型であるための必要十分条件は

$$(1.8) \quad \operatorname{Re}\{e^{i\alpha} z f'(z)/f(z)\} > 0, \quad z \in U$$

である。ただし α は (1.5) で定まる実数である。

注. 定理 A の関数を 原点に関して α -starlike 又は α -spirallike などとも呼ぶが、 α を示す必要がないときは、単に 原点に関して spiral-like であるともいう。

3°. 補題

補題 A. 関数 $h(z)=1+c_p z^p+c_{p+1} z^{p+1}+\dots$ が $|z| \leq |z_1|$ において解析的で、

2つの条件

$$(1.9) \quad \operatorname{Re} h(z) > 0, \quad |z| < |z_1|,$$

$$(1.10) \quad \operatorname{Re} h(z_1) = 0$$

を満たすときは、 $z_1 h'(z_1)$ は負の実数であって

$$(1.11) \quad -z_1 h'(z_1) \geq p |h(0)-h(z_1)|^2/2$$

である。ここで勿論 $h(0)=1$ である。

これは筆者が [1] で示した Lemma であって、Miller-Mocanu の Lemma の 1 つの一般化である。これを更に一般化して次の補題が得られる。

補題 B. 関数 $h(z)=c_0+c_p z^p+c_{p+1} z^{p+1}+\dots$, $\operatorname{Re} c_0 > 0$, が $|z| \leq |z_1|$ において解析的で、上の 2 つの条件 (1.9), (1.10) を満たせば、 $z_1 h'(z_1)$ は負の実数であって、

$$(1.12) \quad -z_1 h'(z_1) \geq p |c_0-h(z_1)|^2 / 2 \operatorname{Re} c_0$$

である。

何故ならば、この場合 $\alpha=0$ である。

$$H(z) = \{h(z) - i \operatorname{Im} h(0)\} / \operatorname{Re} h(0) = 1 + bz^p + \dots$$

を考えれば、 $H(z)$ は補題Aの $h(z)$ と同じ仮定を満たすから

$$-z_1 H'(z_1) \geq p |H(0) - H(z_1)|^2 / 2$$

が成り立つ。これを書き直せば (1.12) となる。

2. 定理

以上の準備のもとに関数が spiral-likeであるための十分条件を導こう。

定理1. $f(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$ を開単位円板 U において解析的で、 $f(z)/z \neq 0$ とする。もしも $|\alpha| < \pi/2$ なる実数 α に対して

$$(2.1) \quad |p \tan \alpha + \operatorname{Im}\{zf''(z)/f'(z)\}| < \sqrt{p(p+2) + p^2 \tan^2 \alpha}, \quad z \in U$$

ならば、 $f(z)$ は U において、原点に関して α -スパイラル型である。

証明. $h(z) = e^{i\alpha} zf'(z)/f(z)$ とおくと、 $h(z)$ は $h(z) = e^{i\alpha} + c_p z^p + \dots$ の形の展開式を持ち、かつ U において解析的で、 $\operatorname{Re} h(0) = \cos \alpha > 0$ である。

いま $\operatorname{Re} h(z) > 0$, $z \in U$, が成り立たないものと仮定すると、 $\operatorname{Re} h(z) > 0$ for $|z| < |z_1|$, $\operatorname{Re} h(z_1) = 0$ となる z_1 が U の中に存在する。このとき $h(z_1) = iu$, $z_1 h'(z_1) = v$ とおくと、補題Bによって、 u, v は実数で

$$(2.2) \quad \begin{aligned} -v &\geq p |\cos \alpha + i \sin \alpha - iu|^2 / 2 \cos \alpha \\ &= p(1 - 2u \sin \alpha + u^2) / 2 \cos \alpha \end{aligned}$$

が成り立つ。なお (2.1) により $f'(z) \neq 0$, $z \in U$, なので、 $u \neq 0$ である。

さて $h(z)$ の定義から

$$(2.3) \quad 1 + zf''(z)/f'(z) = z h'(z)/h(z) + e^{-i\alpha} h(z)$$

となるので、

$$\begin{aligned} |p \tan \alpha + \operatorname{Im}\{z_1 f''(z_1)/f'(z_1)\}| &= |p \tan \alpha + \operatorname{Im}\{z_1 h'(z_1)/h(z_1) \\ &\quad + e^{-i\alpha} h(z_1)\}| = |p \tan \alpha - v/u + u \cos \alpha| \\ &= |u p \tan \alpha - v + u^2 \cos \alpha| / |u| \quad (*) \end{aligned}$$

ここで (2.2) から得られる不等式

$$up \tan \alpha - v \geq p(1+u^2)/2\cos \alpha$$

を用いると,

$$\begin{aligned} (*) &\geq \{p(1+u^2)/2\cos \alpha + u^2 \cos \alpha\}/|u| \\ &= \{p/|u|\cos \alpha + |u|(p+2\cos^2 \alpha)/\cos \alpha\}/2 \\ &\geq \sqrt{p^2 \sec^2 \alpha + 2p} = \sqrt{p(p+2)+p^2 \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

となる。しかしこれは(2.1)に反する。それ故(2.1)の下では上記のような z_1 は存在しない。よって

$$\operatorname{Re}\{e^{i\alpha} z f'(z)/f(z)\} > 0, \quad z \in U$$

が成り立つ。

定理2. $f(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$ を U において解析的で、 $f(z)/z \neq 0$ とする。もしも

$$(2.4) \quad |\alpha| < \sin^{-1} [\sqrt{p(p+2)}/(p+1)]$$

なる実数 α に対して

$$(2.5) \quad |(p+1)\sin \alpha + \operatorname{Im}\{e^{i\alpha} z f''(z)/f'(z)\}| < \sqrt{p(p+2)}, \quad z \in U$$

ならば、 $f(z)$ は U において、原点に関して α -スパイラル型である。

証明. ここでも関数 $h(z) = e^{i\alpha} z f'(z)/f(z) = e^{i\alpha} + c_p z^p + \dots$ に対して、定理1の証明において仮定したのと同様の z_1 の存在を仮定し、 $h(z_1) = \lambda u$, $z_1 h'(z_1) = v$ とおくと、 u, v は実数であって、(2.3)により

$$\begin{aligned} &|(p+1)\sin \alpha + \operatorname{Im}\{e^{i\alpha} z_1 f''(z_1)/f'(z_1)\}| \\ &= |(p+1)\sin \alpha + \operatorname{Im}\{-e^{i\alpha} + e^{i\alpha} z_1 h'(z_1)/h(z_1) + h(z_1)\}| \\ &= |p \sin \alpha - v \cos \alpha / u + u| \\ &= |up \sin \alpha - v \cos \alpha + u^2|/|u| \quad (*) \end{aligned}$$

ここで(2.2)から得られる不等式

$$up \sin \alpha - v \cos \alpha \geq p(1+u^2)/2$$

を用いると,

$$(*) \geq \{p/|u| + (p+2)|u|\} / 2 \geq \sqrt{p(p+2)}$$

となる。これは(2.5)に反する。よって(2.5)の下では

$$\operatorname{Re}\{e^{i\alpha} z f'(z)/f(z)\} > 0, \quad z \in U$$

が成り立つ。(注. 条件(2.4)が必要なわけは, もしもこれがなかったならば, $z=0$ において(2.5)が満たされないことが起り得るからである。)

参考文献

- [1] 坂口 杲一, 関数が星型であるための十分条件について, 京都大学数理解析研究所講究録, No.821(1993), 41-46