

Ⅱ、型因子環の指数から生まれた knots と links の不変量

—— V. Jones の仕事の紹介 ——

大阪教育大学 綿谷安男 (Yasuo Watatani)

□ はじめに

1 見したところ何の関係もなさそうな、作用素環の理論と結び目の理論、という2つの異なった分野の数学の間に誰れも予期できなかった深い関連を見つけた V. Jones の仕事 [4] を、MSRI での彼の講義をもとに、紹介する。全体的なことはすでに小林毅氏の解説 [5] があるので、ここでは特に、作用素環をほとんど知らない人のために、Jones 多項式の生まれた背後にある作用素環のことを中心にして説明をしたい。V. Jones は、Ⅱ型因子環の部分因子環に対して指数の概念を導入した [2]。群の指数とは違い、そのとる値は整数値ではなく、連続な値をとる。これは作用素環が「連続次元」の線型代数とも言えることが反映しているので数学の他の分野にとっても魅力のある事実だと思う。さらに彼はⅡ型 AF

因子環の部分因子環の指数のとりえる値を完全に決定し、それが $\{4\cos \frac{\pi}{n} \mid n=3,4,5, \dots\} \cup \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 4\} \cup \{\infty\}$ になることを示した。この $4\cos \frac{\pi}{n}$ という値は整数論にも現れる不思議な数であり、整数論と作用素環論との深い関連も予言する一つの象徴(しるし)だとみられている。さて彼が指数の決定を証明するために考え出した、ある関係をもつ射影元達のつくる有限次元 von Neumann algebras $A_n(\beta)$ の増大列、こそが、knots と links の新しい不変量 Jones 多項式を生みだした、源泉になったのである。その関係が組み系群や A_n 型の Hecke 環に表われる関係と非常に酷似していた事[3]が一連の発見の導火線になったのである。そこでそれをもここで表にしておく：

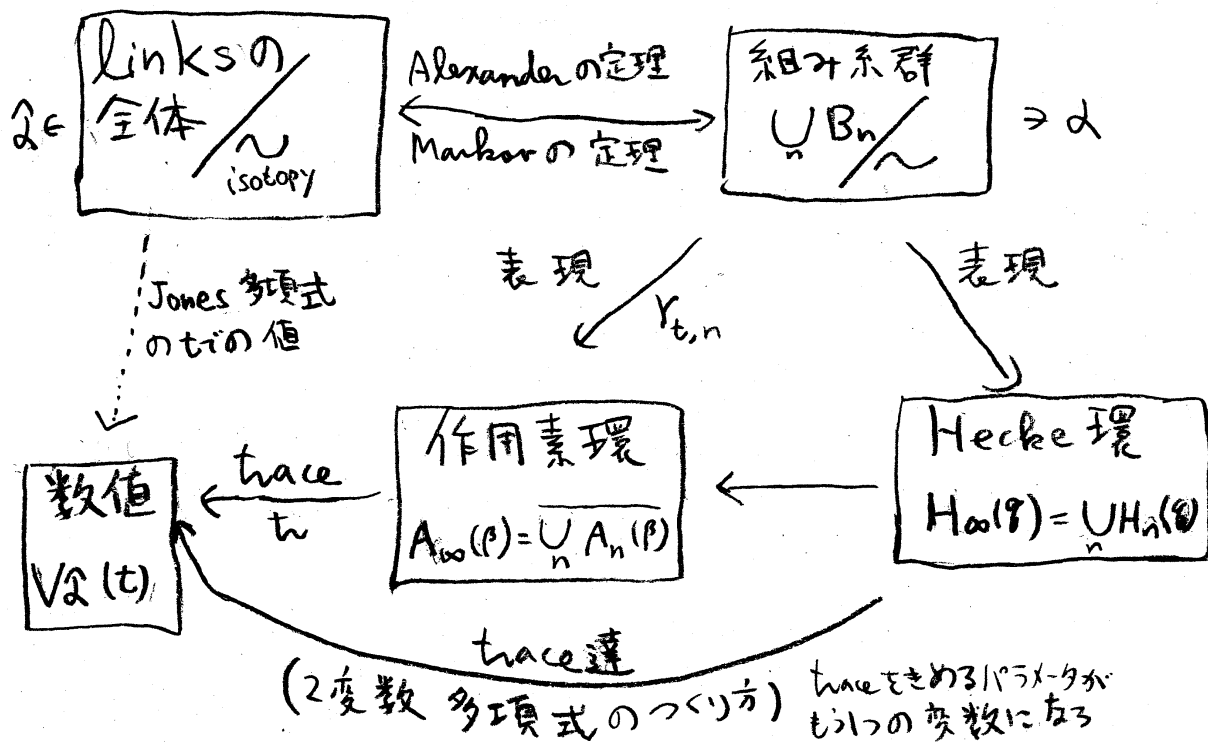
	作用素環 $A_{n-1}(\beta)$	組み系群 B_n	Hecke 環 $H_{n-1}(\beta)$
生成元	$e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$	$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$	$g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$
関係式	① $e_i^2 = e_i = e_i^*$ (射影) ② $e_i e_{i \pm 1} e_i = \tau e_i$ (τ は指数) ③ $e_i e_j = e_j e_i$ ($ i-j \geq 2$ の時)	② $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ ③ $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ ($ i-j \geq 2$ の時)	① $g_i^2 = (\beta-1)g_i + \beta$ ② $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$ ③ $g_i g_j = g_j g_i$ ($ i-j \geq 2$ の時)

① 関係式の ①は Conway relation というものに対応している。

② 上で $\beta = \frac{1}{\tau}$ は、因子環の指数と解釈されるパラメータであり、Jones 多項式の変数 t とは $\tau = \frac{t}{(1+t)^2} = \beta^{-1}$ の式で

結ばれるはずであり, さらに Hecke 環のパラメータ q とは $t = q$ として結ばれている。

さて, 組み系群 B_n の元 α の上下を結びつけると link $\hat{\alpha}$ ができる。Alexander の定理より任意の link はこのようにして実現できる。2つの link $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ がいつ同値になるかは, Markov の定理によって与えられており, それを利用して, link $\hat{\alpha}$ の新しい不変量 Jones 多項式 $V_{\hat{\alpha}}(t)$ は次の図式によって定義される:



$$V_{\hat{\alpha}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{-(t+1)}{\sqrt{t}} \right)^{n-1} t^{e(\alpha)/2} t_n(r_{t,n}(\alpha))$$

この Jones 多項式は以前から知られていた Alexander 多項式では区別できなかった多くの knots や links を区別して非常に強力であることがわかる。その間もなく今度は、上の Alexander 多項式と Jones 多項式を統合してさらに強力な 2 変数多項式が、何人もの数学者たちによって独立にえられた [1]。その後も日本人を含めて多くの研究者によって発展を続けているのであるが、以下では作用素環からの起源を明らかにすることに主眼をおくことにする。

① 作用素環

作用素環とは、具体的には、ヒルベルト空間上の有界作用素達のつくる、ある位相について閉じた C^* 環のことである。特に $C_0(X)$ 位相について閉じた C^* 環と弱(作用素)位相について閉じた von Neumann 環が主な対象である。可換な 単位元をもつ(もたない) C^* 環はコンパクト T_2 空間 X 上の連続関数環 $C(X)$ に(局所コンパクト T_2 空間 X 上の無限遠点で 0 である連続関数環 $C_0(X)$ に)同型であるという Gelfand-Naimark の定理をよりどころとして、 C^* 環を非可換位相幾何もしくは $\llcorner \text{pointless geometry} \llcorner$ の視点でとらえることは今まで非常に生産的であった。同様に 可換な von Neumann 環は測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の本質的有界関数環 $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$

に同型であることより, von Neumann 環を非可換積分論の立場から攻略することは豊かであった。作用素環の一般論については [6], [7], [8] を参照してもらうことにする。

Def A が (抽象的な) C^* 環とは

- $\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} A \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上の algebra である} \\ \textcircled{2} A \text{ 上に involution } A \ni a \mapsto a^* \in A \text{ がある :} \\ \quad (\textcircled{i}) (a^*)^* = a, \quad (\textcircled{ii}) (a+b)^* = a^* + b^*, \quad (\textcircled{iii}) (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^* \quad (\textcircled{iv}) (ab)^* = b^* a^* \\ \textcircled{3} A \text{ 上に } \|\cdot\| \text{ があり, それに関して } A \text{ は完備} \\ \textcircled{4} \|ab\| \leq \|a\| \|b\| \quad (a, b \in A) \\ \textcircled{5} (C^* \text{ 条件}) \|a^* a\| = \|a\|^2 \quad (a \in A) \end{array} \right.$

例 次の A は C^* 環である

- ① $A = \mathbb{C}$
- ② $A = M_n(\mathbb{C})$: $\mathbb{C}$ 上の $n \times n$ 行列全体, つまり行列環
- ③ $A = M_3(\mathbb{C}) \oplus M_5(\mathbb{C}) \oplus M_8(\mathbb{C})$: 一般に行列環の直和
- ④ $A = B(H)$: Hilbert 空間 H 上の有界作用素全体
- ⑤ $A = K(H)$: Hilbert 空間 H 上のコンパクト作用素全体
- ⑥ $A = C(X)$: コンパクト空間 X 上の連続関数全体
- ⑦ $A = C_0(X)$: 局所コンパクト空間 X 上の連続関数で $\infty \rightarrow 0$ に収束するもの
- ⑧ $A \subset B(H)$: $\|\cdot\|$ が $\|\cdot\|_2$ に相対的に閉じた $B(H)$ の $*$ 部分環
- ⑨ Wedderburn の定理より, 有限次元 C^* 環は ③ の型に同型になる

Def Hilbert 空間 H 上の有界作用素全体 $B(H)$ に 弱(作用素)位相 を次で与える : $x_n, x \in B(H)$ として

$x_n \rightarrow x$: 弱作用素位相で収束する

$$\Leftrightarrow \forall \xi, \eta \in H \quad (x_n \xi | \eta) \rightarrow (x \xi | \eta)$$

(つまり, 無限行列 x_n, x の各行列成分ごとに収束すると思えばよい)

Def $A \subset B(H)$ が von Neumann 環 (W^* 環ともいう)

$\Leftrightarrow A$ は C^* 環でかつ弱(作用素)位相で閉じている.

例 次の A は von Neumann 環である

① $A = B(H)$.

② $A = M_4(\mathbb{C}) \oplus M_7(\mathbb{C}) \oplus M_8(\mathbb{C})$: 一般に行列環の直和

③ $A = \{M_f \in B(L^2(X, \mu)) \mid f \in L^\infty(X, \mu)\} \cong L^\infty(X, \mu)$:

$L^\infty(X, \mu)$ の元 f のかけ算作用素 M_f 全体 ($M_f(\xi) = f \cdot \xi, \xi \in L^2(X)$)

Def von Neumann 環 A が 因子環 (factor)

$\Leftrightarrow A$ の center $Z(A) \cong \mathbb{C}$

任意の von Neumann 環は因子環の(連続)直和に分解できるので, 因子環とは, 有限群論における単純群のようなものである。しかし有限単純群とは違い, 因子環の完全分類は現在でも難しく手がつかない状態である。因子環は大まかには, その中の射影元の構造により, I 型 (I_{fin} 型と I_∞ 型), II 型 (II_{fin} 型と II_∞ 型) と III 型とに分けられる。

Def von Neumann 環 M が II₁ 型因子環 とは

Def ① M は無限次元の因子環であり

② M 上に唯一つ trace が存在する。つまり

$\exists! \tau: M \rightarrow \mathbb{C} : \text{linear map}$

s.t. $\tau(ab) = \tau(ba) \quad (\forall a, b \in M), \quad \tau(1) = 1$

—口で言っ て II₁ 型因子環 とは 連続次元をもつ行列環 のようなもの」である。実際 $n \times n$ 行列環 M_n において、その射影元 P (i.e. $P = P^* = P^2$) の trace をとった値 $\text{Tr}(P)$ を調べると、それは P の値域に対応するベクトル空間の次元がでてくる。つまり、
 $\{\text{Tr}(P) \mid P \in M_n, P \text{ は射影元}\} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. さて $\text{Tr}(1) = n$ なので $\tau(x) = \frac{1}{n} \text{Tr}(x)$ において正規化しておくと、それは
 $\{\tau(P) \mid P \in M_n, P \text{ は射影元}\} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$ と離散的な値が次元に応じてでてくる。さて行列環 M_n の代わりに II₁ 型 factor M についてもその「次元の分布」を調べてみよう。すると、驚くべきことに $\{\tau(P) \mid P \in M, P \text{ は射影元}\} = [0, 1]$ と 0 と 1 の間の数がベッタリと出てくるのである。これからも II₁-型因子環とは 連続次元をもつ「行列環」 と思ってよい。

例 $A_n = M_{2^n} = M_2 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_2$ (n 回) とおき $A_n \rightarrow A_{n+1}$ を $x \mapsto x \otimes 1$ でうめこむ。 $M = \overline{\bigcup_n A_n}$ ^{弱位相} は II₁ 型因子環。

② 部分因子環の指数

II型因子環 M を1つ固定しよう。その部分因子環 $N \subset M$ を共役を除いて分類せよという問題に V. Jones はとりくみ、その不変量として指数 $[M:N]$ の概念を導入した。群の場合に例えてみれば、 $\mathbb{Z}$ の2つの部分群 $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ と $3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ を区別するのに、その指数 (index) を比べるよい。実際 $[\mathbb{Z}:2\mathbb{Z}] = 2$ で $[\mathbb{Z}:3\mathbb{Z}] = 3$ である。これは余りにも簡単な例だが、V. Jones は同じようなことを II 型因子環に対して試みたのである [2]。

[Def] Hilbert 空間 H 上の II 型因子環 M の部分因子環 N に対してその 指数 $[M:N]$ を次で定義する

$$[M:N] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dim_N(H)}{\dim_M(H)}, \quad \text{ただし } \dim_M(H) = \frac{\text{tr}_M([M'] \text{ に対する射影元})}{\text{tr}_{M'}([M] \text{ に対する射影元})}$$

ここで上の値は $\xi \in H$ ($\xi \neq 0$) のとり方にはよらない。また $M' = \{x \in B(H) \mid \forall y \in M \text{ } xy = yx\}$ もまた因子環になる。(実は ∞ になる時があるためもう少し条件がいるが、省く)。
 12で言う $[M:N]$ とは「 M の中に N がいくつ分入っているか」ということである。

[例] (これは II 型因子環ではないのだが)、

$$[M_6 : M_2] = \frac{\dim M_6}{\dim M_2} = \frac{36}{4} = 9 \text{ となる}$$

さて、指数 $[M:N]$ は 射影元の trace をとるので、その値が連続になって当然ではある。しかし驚くべきことに指数の値の分布には gap があることがわかったのである。実際、 $\beta=4$ を境として離散部分と連続部分に分かれる。

Theorem 1 (V. Jones) II₁ 型因子環 M に対して、部分因子環 $N \subset M$ の指数 $[M:N]$ のとり得る値は

$$\{4\omega^2 \frac{\pi}{n} \mid n=3, 4, 5, \dots\} \cup \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 4\} \cup \{\infty\}$$

に限る。さらにもし M が AF 型 (つまり有限次元環で近似可能) なら、そのすべての値を実現する N が存在する。

ここで $4\omega^2 \frac{\pi}{n}$ という不思議な数の出現する内在的な理由は明らかでなく、謎のままである。さて V. Jones が上の Theorem 1 を証明した方法は、次のようである。Von Neumann 環を非可換積分論の立場から捉えることで、 $E_N: M \rightarrow N$ という条件付期待値が、確率論の時と同じように、存在する。

それは $\tau_n(E_N(m)n) = \tau_n(mn) \quad (\forall m \in M, \forall n \in N)$ をみたす M から N の上の線型写像であり、 $E_N^2 = E_N$ となる。

Von Neumann 環 M 上に内積を $(x|y) = \tau(y^*x)$ で入れ、 $\|x\|_2 = \sqrt{(x|x)}$ で M を完備化して得た Hilbert 空間を $L^2(M)$ とかく。 $M \subset L^2(M)$ として埋めこむことで、上の E_N は $e_N: L^2(M) \rightarrow L^2(N) \subset L^2(M)$ という射影元に拡張できる。

M と e_N から生成される $L^2(M)$ 上の von Neumann 環 $\langle M, e_N \rangle$ とかくとこれはまた因子環になる。さて今度は $M \in \langle M, e_N \rangle$ の部分因子環とみなすことで、上の手続きをもう一度くり返すことができる：ある射影元 $e_M: L^2(\langle M, e_N \rangle) \rightarrow L^2(M)$ が存在して、 $N \subset M \subset \langle M, e_N \rangle \subset \langle M, e_N, e_M \rangle$ 。この構成を無限にくり返すことで、次のような因子環の無限塔ができる： $(e_N = e_1, e_M = e_2, \dots)$ とおく）

$N \subset M \subset \langle M, e_1 \rangle \subset \langle M, e_1, e_2 \rangle \subset \langle M, e_1, e_2, e_3 \rangle \subset \dots$
 さてここで M を「約すると」

$$\langle 1 \rangle \subset \langle 1, e_1 \rangle \subset \langle 1, e_1, e_2 \rangle \subset \langle 1, e_1, e_2, e_3 \rangle \subset \dots$$

と射影元から生成された von Neumann algebras

$$A_n(\beta) = \langle 1, e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$$

ができる。ここで $\beta = [M:N] = \frac{1}{\tau}$ とおく。さて

$A_\infty(\beta)$ を 1 と $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ で生成された von Neumann algebra とすると、 $A_\infty(\beta)$ は II₁-factor でありその上の trace を τ とかく。この時次が成立する：

- $e_i e_{i+1} e_i = \tau e_i$
- $e_i e_j = e_j e_i \quad (|i-j| \geq 2)$
- $\tau(w e_{n+1}) = \tau \cdot \tau(w) \quad \text{if } w \text{ が } e_1, \dots, e_n \text{ の有限積}$

以上が作用素環における起源である。

References

- [1] P. Freyd, D. Yetter; J. Hoste; W.B.R. Lickorish, K. Millett; and A. Ocneanu, A new polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 239-246.
- [2] V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1-25.
- [3] V. Jones, Braid groups, Hecke algebras and type II₁ factors, Proc. Japan-U.S. Conf. 1983 (to appear).
- [4] V. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 103-112.
- [5] T. Kobayashi, 絡み目理論の新しい不変量—作用素環に由来する Jones 多項式とその一般化—, 数学 (to appear)
- [6] M. Takesaki, Theory of Operator Algebras I, Springer (1979).
- [7] M. Takesaki, 作用素環の構造, 岩波書店 (1983).
- [8] H. Umegaki, M. Ohya and F. Hiai, 作用素代数入門, 共立出版, (1985).