

一次元写像の雑音誘起現象

Noise-induced phenomena in one-dimensional maps

佐藤譲* (北海道大学・電子科学研究所 / 理学院数学専攻)

Yuzuru Sato (RIES / Department of Mathematics, Hokkaido University)

1 背景

ノイズとはシステムの外から、または注目しているスケール外の現象からやってくる、予測不能かつ制御不能の攪乱のことをいう [9]。ノイズと決定論的ダイナミクスの相互作用によって生じる雑音誘起現象は、古くから研究されて来た問題であり、とくに決定論的ダイナミクスがカオス的、あるいは潜在的にカオス的である場合、非自明な雑音誘起現象が生じることが知られている [5][1][6]。一方この現象への理論的アプローチは困難であり、雑音付き力学系の pathwise な発展過程についての研究は少ない。ここでは加法性ノイズ存在下での一次元単峰写像の雑音誘起現象を数値的に調べて得た結果を例に取り、この問題を考える。一次元写像を f 、軌道を $\{x_n\}$ 、ノイズのリアライゼーションを $\{\xi_n\}$ ¹ としてモデルを $x_{n+1} = f(x_n) + \xi_n$ で与える。Logistic 写像 f_L と Belousov-Zhabotinsky 写像 f_{BZ} (以下 BZ 写像) を決定論的ダイナミクス f の例にとろう。

$$f_L = \mu - x^2$$

$$f_{BZ}(x) = \begin{cases} [-(0.125 - x)^{1/3} + a] \exp(-x) + b & (0 < x < 0.125) \\ [(x - 0.125)^{1/3} + a] \exp(-x) + b & (0.125 \leq x < 0.3) \\ c[10x \exp(-\frac{10}{3}x)]^{19} + b & (0.3 \leq x < 1) \end{cases}$$

*ysato@math.sci.hokudai.ac.jp

¹以下では ξ_n は $[-\sigma, \sigma]$ に一様に分布したノイズ。トーラス状相空間で白色ガウスノイズを加えた場合も、ここで考える雑音誘起現象に定性的な違いは見られなかった。

ここで $a = 0.50607357$, $c = 0.121205692$. μ , b はコントロールパラメーターである。 f_{BZ} はやや煩雑だが、BZ 反応の実験時系列から構成された写像 [8][6] をそのまま用いた。ニューロンモデルのようなより単純な興奮性の写像でも同様な雑音誘起現象が生じることが知られている [10]。

とくに典型的な雑音誘起現象として、雑音誘起カオス (Noise-induced chaos, NIC)、雑音誘起秩序 (Noise-induced order, NIO) と呼ばれる現象がある。Logistic 写像では周期 3 の窓領域 ($\mu \sim 1.755$) で雑音誘起カオスが生じ、パワースペクトルが広帯域を持つようになる、Lyapunov 指数が負から正に変化する、KS エントロピーが増加する、などの現象が生じる (図 1)。原因は窓領域に存在する測度 0 の Li-Yorke 攪拌集合 [4] がノイズによって顕在化することによるとされる [5][1]。BZ 写像のカオス領域 ($b \sim 0.023288$) では雑音誘起秩序が生じ、パワースペクトルがピークを持つ、Lyapunov 指数が正から負に変化する、KS エントロピーが減少する、などの現象が生じる (図 2)。原因は BZ 写像の非一様なマルコフ分割に対して、ノイズによる一様な粗視化が導入され、軌道の多様性が失われることによるとされる [6]。

2 数値実験

Logistic 写像、BZ 写像について、横軸をコントロールパラメーター、縦軸をノイズレベルにとって Lyapunov 指数をプロットすると、図 3 が得られる。図よりロバストな雑音誘起現象が生じていることがすぐに見て取れる。とくに BZ 写像の窓領域等では **ノイズレベルを増加させるにつれて、秩序 1 → カオス 1 → 秩序 2 → カオス 2 → … という多段階の転移が生じる**² 場合があることがわかる。つまり、雑音誘起カオスと雑音誘起秩序がノイズレベルに応じて共存する (図 4)。まず NIC が生じ、そのカオスに対してさらにノイズを強めると NIO が生じ、その秩序に対してさらにノイズを強めると NIC が生じ … という連鎖が生じている、とも解釈できる。これは新しいタイプの雑音誘起現象である。重要なのは、これらの系は決定論極限ではパラメーター全範囲においてベイスインが相空間全域である単アトラクタ系であり、複数の安定状態があらかじめ準備されている多アトラクタ系ではない、ということである。この点が、「エネルギー障壁 = 最適ノイズ閾値」として説明される確率共鳴等の雑音誘起現象とは大きく異なる。

²ここで秩序 1, 秩序 2..., カオス 1, カオス 2... はパワースペクトルのピークの位置や数により区別している。詳細は文献 [13] 参照。

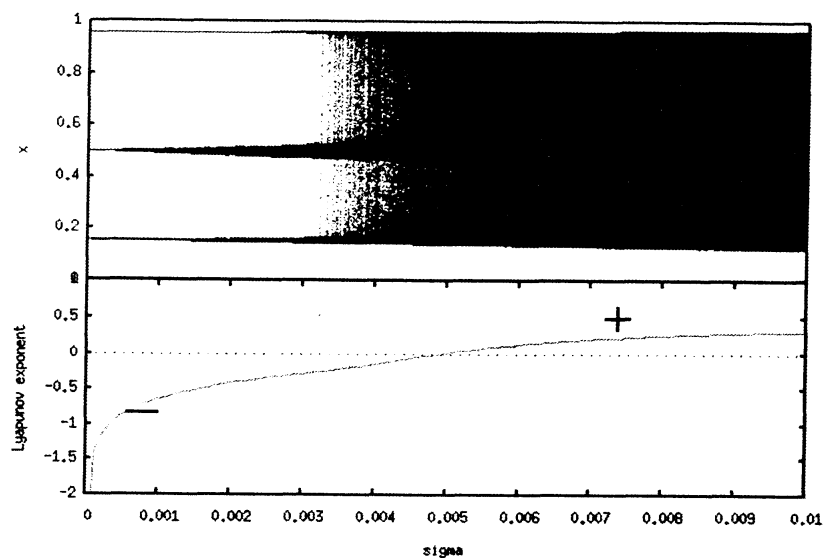


図 1: Logistic 写像の雑音誘起カオス: 横軸はノイズレベル σ 、上段縦軸は軌道 $\{x_n\}$ 。下段縦軸は Lyapunov 指数。パラメーター $\mu = 1.755$ 。

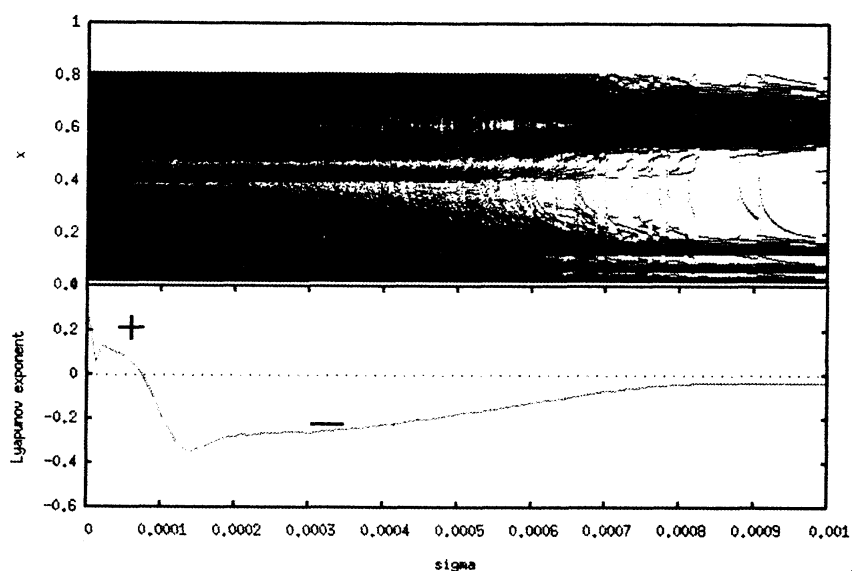


図 2: BZ 写像の雑音誘起秩序: 横軸はノイズレベル σ 、上段縦軸は軌道 $\{x_n\}$ 。下段縦軸は Lyapunov 指数。パラメーター $b = 0.023288$ 。

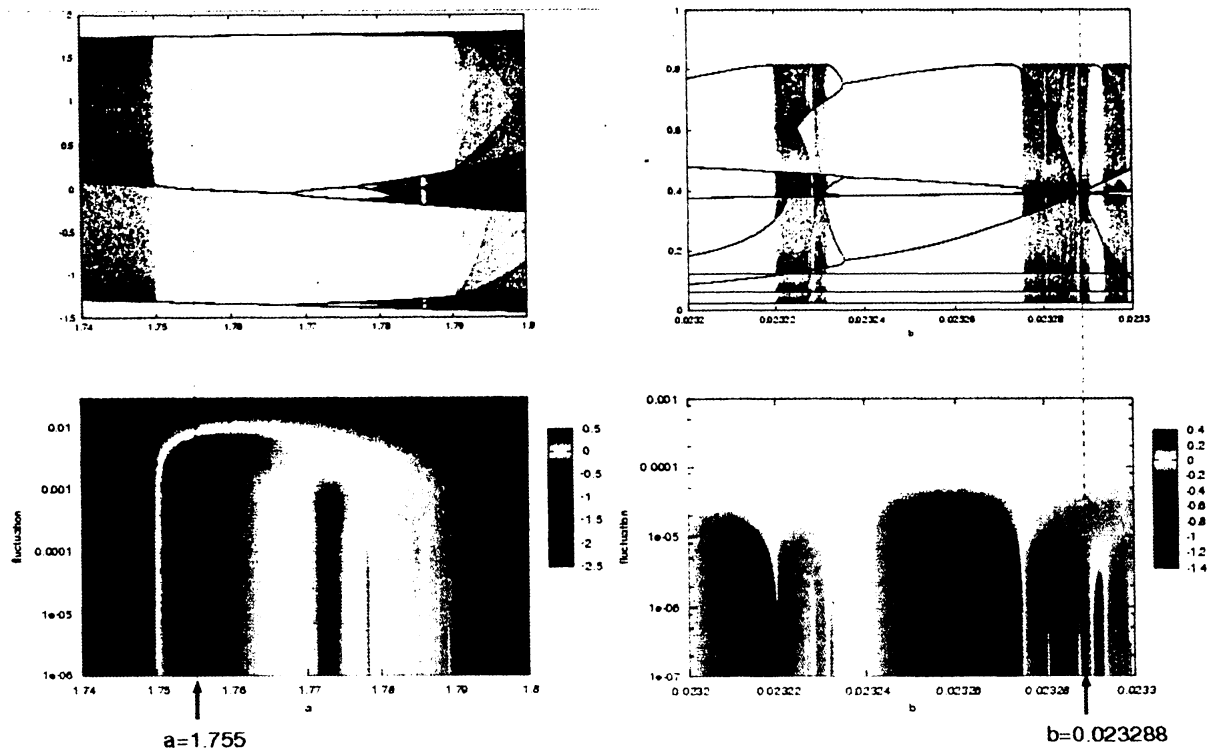


図 3: Logistic 写像 (左)、BZ 写像 (右) の雑音誘起現象: 上段は分岐図。下段は横軸をコントロールパラメーター、縦軸をノイズレベルにとって Lyapunov 指数をプロットしたダイアグラムである。青は Lyapunov 指数負、赤は Lyapunov 指数正、白は Lyapunov 指数 0 を表す。コントロールパラメーターとノイズレベルの範囲はそれぞれ $1.74 < \mu < 1.80$ 、 $10^{-6} < \sigma < 10^{-2}$ (左)、および $0.0232 < b < 0.0233$ 、 $10^{-7} < \sigma < 10^{-3}$ (右)。図は [13] より抜粋。

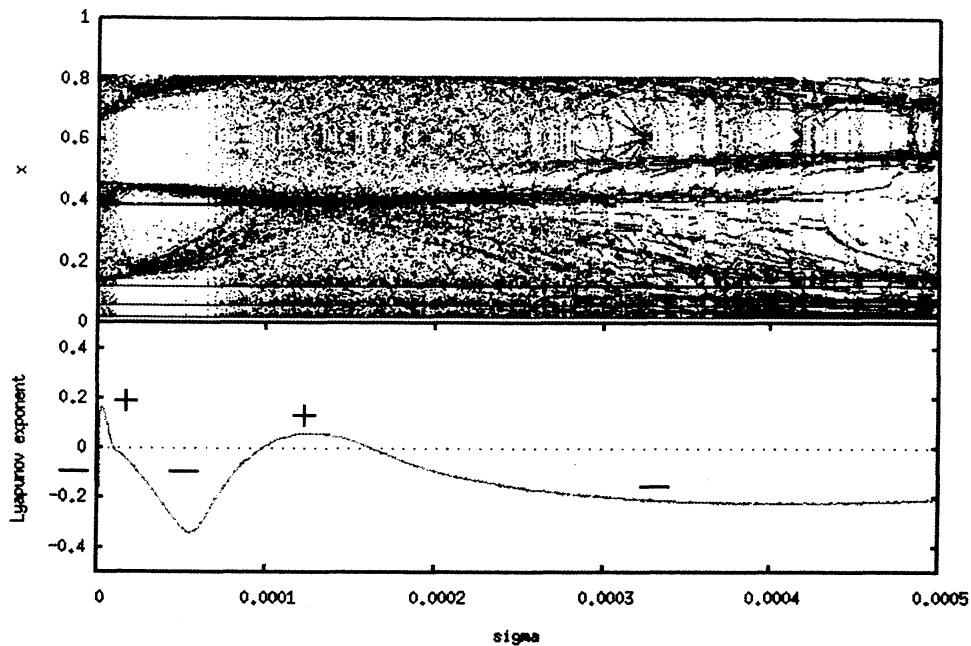


図 4: BZ 写像の複雑な雑音誘起現象: 横軸はノイズレベル σ 、上段縦軸は軌道 $\{x_n\}$ 。下段縦軸は Lyapunov 指数。パラメーター $b = 0.023228$ 。

3 まとめと展望

数値実験の解釈としては、**決定論軌道の周囲に多様な「疑似軌道」が存在し** [16]、**系にノイズが加わって因果律に厚みが生じると、この疑似軌道群の一部が観測可能となる**、というシナリオが考えられる。この場合、軌道の多様性の起源はアトラクタの外に求められ、ノイズが相空間構造の探査針として働く。

こういった複雑な雑音誘起現象は、たかだか一次元写像でロバストに観察される。決定論カオスはそもそも可算個の周期解と非可算個の非周期解を内包する構造であるが、雑音付き力学系では、決定論アトラクタの外側にも多様な非線形現象を誘発する潜在構造があることに注意しなくてはならない。ノイズ存在下で経験分布が変化し、無数にある不安定解がノイズによって紡ぎ合わされた新しい軌道となって測定にかかる、という現象が生じうるからである。このためノイズ存在下の散逸系では、ハミルトン系の解析と同様に相空間全域の構造物を詳細に解析する必要が生じる。

ノイズレベルを測定精度と読み替えると、この問題はシステムの測定に対する鋭敏性の問題となる。システムを細い探査針で測定した場合と、太い探査針で測

定した場合で、測定結果として観測される現象が質的に異なる場合がある。さらに、探査針の太さを連続的に変えるにつれて、次々に異なる現象が観測されることさえありうる。またノイズを外部入力と読み替えると、この問題はシステムの刺激応答反応の問題となる。複雑な雑音誘起現象が生じる系は「外界の揺らぎの大きさを識別する」かのように振る舞う、とも解釈できる³。

雑音誘起現象は力学系の構造安定性、確率的安定性 [17] や擬軌道追跡性とも深く関わる。関連する大自由度力学系研究としては [2][7][12] などがあがる。近年のランダム力学系理論の発展をふまえ [3][11]、この現象にどこまで理論的に迫れるか今後追求していきたい [13][14]。この現象の情報理論的な解析 [15]、制御理論的な解析 [18] により得られるであろう結果にも興味を持たれ、応用範囲は広い。

この古典的問題の再考察にあたり、有意義な議論をしていただいた K. Aihara (University of Tokyo), D. Albers (Columbia University), J. P. Crutchfield (University of California, Davis), T. Ikegami (University of Tokyo), Y. Iwata (Hokkaido University), K. Kaneko (University of Tokyo), T. Komatsuzaki (Hokkaido University), K. Matsumoto (Hokkaido University), Y. Takahashi (Kyoto University), M. Toda (Nara Women's University), I. Tsuda (Hokkaido University) の各氏に感謝します。

参考文献

- [1] J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, and B. A. Huberman, "Fluctuations and simple chaotic dynamics," *Physics Letters* **92:2**, p45-82 (1982).
- [2] J. P. Crutchfield and K. Kaneko, "Are attractors relevant to turbulence?," *Phys. Rev. Lett.*, **60**, p2715-2718 (1988).
- [3] A. Lasota and M. Mackey, "Chaos, Fractals, and Noise," Springer, (1991).
- [4] T. Y. Li and J. A. Yorke, "Period Three Implies Chaos," *The American Mathematical Monthly*, **82:10**, p985-992 (1975).

³両者は同一の系の振る舞いに対する別の解釈である。高感度センサーは外部からの測定に鋭敏である。

- [5] G. Mayer-Kress and H. Haken, "The influence of noise on the logistic model," *Journal of Statistical Physics*, **26**, p149-171 (1981).
- [6] K. Matsumoto and I. Tsuda, "Noise-induced order," *Journal of Statistical Physics*, **31**, p87-106 (1983).
- [7] T. Shibata and K. Kaneko, "Noiseless collective motion out of noisy chaos," *Phys. Rev. Lett.* **82**, p4424 - 4427 (1999).
- [8] R. H. Simoyi, A. Wolf, and H. L. Swinney, "One-Dimensional Dynamics in a Multicomponent Chemical Reaction," *Phys. Rev. Lett.*, **49**, p245-248, (1982).
- [9] 大野 克嗣、「非線形な世界」 東大出版会、(2009).
- [10] K. Aihara, private communication.
- [11] Y. Iwata and M. Denker, in preparation, (2009).
- [12] Y. Sato, M. Iima, and Y. Tasaka, "Random Dynamics from Time Serieses of Rotating Fluid," *Proceedings of JSIAM08*, p317-318, (2008).
- [13] Y. Sato and D. Albers, "Noise-induced phenomena in BZ map," in preparation, (2009).
- [14] Y. Sato and Y. Iwata, in preparation, (2009).
- [15] R. Shaw, "The Dripping Faucet as a Model Chaotic System," Aerial Press, Santa Cruz, California, (1984).
- [16] Y. Takahashi, private communication.
- [17] L. S. Young, "Stochastic stability of hyperbolic attractors," *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **6**, p311-319, (1986).
- [18] M. Yamaguti (ed.), "Towards the Harnessing of Chaos," *Proc. of the 7th Toyota Conference*, Elsevier, (1994).