

超幾何微分方程式系 (F) と保型関数

滋賀匠大 寺田俊明 (Toshiaki Terada)

§ 1 1変数の場合

Euler の微分方程式

$$(1.1) \quad F'' + \left[\frac{\lambda_0 - 1}{x} + \frac{\lambda_2 - 1}{x-1} \right] F' + \frac{\lambda_0(1-\lambda_1)}{x(x-1)} F = 0$$

を考える。ただし, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_\infty$ を $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_\infty = 2$ を満たす複素数として $\lambda_{ij} = \lambda_i + \lambda_j - 1$ ($0 \leq i < j \leq 2$) とする。普通は, 助変数 $\alpha = \lambda_\infty, \beta = 1 - \lambda_1, \gamma = \lambda_2 + \lambda_\infty$ が用いられている。(1.1) は Euler の積分表示をもち,

$$(1.2) \quad \omega_i(x) = \int_0^{x_i} u^{\lambda_0-1} (u-x)^{\lambda_1-1} (u-1)^{\lambda_2-1} du$$

$$(i=1, 2; x_1=x, x_2=1)$$

は解の1つの基で, 領域

$$D = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$$

上で多価正則である。Gauß の超幾何級数:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha, \nu)(\beta, \nu)}{(\gamma, \nu)(1, \nu)} x^\nu$$

$$(\text{例えば } (\alpha, \nu) = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+\nu-1))$$

$$= \frac{1}{B(\lambda_2, \lambda_\infty)} \frac{1}{1 - 1/\mu_\infty} [\mu_0(1-\mu_1)\omega_1 - (1-\mu_0\mu_1)\omega_2]$$

($B(\cdot, \cdot)$ はベータ関数, $\mu_i = \exp(2\pi\sqrt{-1}\lambda_i)$)

が $x=0$ で正則な唯一の解である。

1873年 H. Schwarz [2] は次のことを示した。

(1.3) 定理. すべての i, j ($0 \leq i < j \leq 2$) に対して,

$$\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}^{-1} := \{0\} \cup \{1/m \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

であって, しかも $\lambda_{ij} \geq 0$ ¹⁾ であるならば,

$$w = \omega(x) := \omega_1(x)/\omega_2(x)$$

の逆関数

$$x = \omega^{-1}(w)$$

は,

i) $\lambda_\infty > 0$ ならば ($1/\lambda_\infty \in \mathbb{Z}$ のとき) ²⁾ 単位円 (と同型な領域) で一価,

1) この条件は, 実際には, 何の制限にもなっていない。

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_\infty$ の置換と, 変換: $\lambda_i \mapsto (1-\lambda_i)$ ($i=0, 1, 2, \infty$) の組合せにより, $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}^{-1}$ ならば常に $\lambda_{ij} \geq 0$ であると仮定できる。

2) Kampé de Férié [6] に見られるように, この条件の下で証明されているように思われるが, 実は不用である。

ii) $\lambda_\infty = 0$ ならば Gauss 平面で一価,

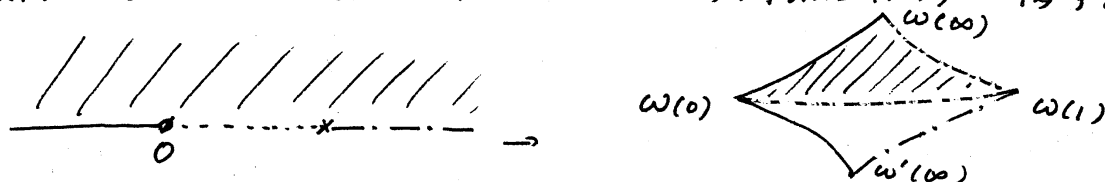
iii) $\lambda_\infty < 0$ ならば, $1/\lambda_\infty \in \mathbb{Z}$ のとき, Riemann 球で一価,
 しかも微分方程式 (1.1) のモノドロミー群により誘導される
 変換群により不変である。つまり $\omega^t(w)$ は保型関数であり,
 それぞれ i) Fuchs 関数, ii) 楕円関数 x は指数関数, iii) 多
 項式となる。基本領域は, $S_{01} = \{x=0\}$, $S_{12} = \{x=1\}$, $S_{20} = \{x=\infty\}$,
 $S_0 = \bigcup_{i,j} \{S_{ij} \mid \lambda_{ij} = 0\}$ として, $Y_0 = \mathbb{P}^1 - S_0$ とおくと, Y_0
 に同型である。従って関数体は, Y_0 がコンパクト ($S_0 = \emptyset$) な
 とき純超越的である。¹⁾

[証明の概略] $x=0$ の近傍で (1.1) は

$$x^{\lambda_{01}} f_1(x), f_2(x) \quad ^2) \quad (f_1, f_2 \text{ は } x=0 \text{ で正則, } f_i(0) \neq 0)$$

という形の解の基をもち, $x=1$, $x=\infty$ でも同様である。³⁾

$\lambda_i \in \mathbb{R}$ ($i=0,1,2$) のとき, (1.1) は $x \in \mathbb{R}$ に対して実数解の基
 をもつから, $\omega(x) = \omega_1/\omega_2$ は上半平面を w -平面上の,
 頂角がそれぞれ $\lambda_{01}\pi, \lambda_{12}\pi, \lambda_{20}\pi$ の円弧三角形に移す。



1) 楕円関数の場合でも, 関数体は楕円関数体ではなく, た
 とえば $f_0(w)$ の有理関数全体となる。

2) $\lambda_{01} \in \mathbb{Z}$ なら $\log x$ が現れることがある。詳細は [3]

3) $x=\infty$ なら解の基に $x^{-\lambda_\infty}$ を乗ずるとこの形になる。

$\omega(x)$ の実軸, たとえば $[0, 1]$ 区間を越えての解析接続に応じて, $\omega^{-1}(w)$ は対称の原理により弧 $\omega(0) \omega(1)$ を越えて接続される. よって ω^{-1} が一価であるためには $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}^{-1}$ が必要である. さらに, i) ii) iii) の条件に応じて, 対応する領域で一価となる.

§2 問題, 既知の結果

Schwarz の定理の略証には条件: $1/\lambda_\infty \in \mathbb{Z}$ は現れず, 一見不要に見えるが, 本当だろうか. もし必要とすれば $\omega^{-1}(w)$ の局所的な一価性についてなのか, それとも大局的な性質に関するものなのか. さらに, この定理の拡張としてどんなものか考えられるか. そこで次の問題を設定する.

問題 1. 条件: $1/\lambda_\infty \in \mathbb{Z}$ は何を意味するのか.

問題 2. Schwarz の結果の多変数への拡張.

問題 2 については, n 変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ に関する微分方程式系 (F_1) に限定して考える.

$$(F_1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} + \left[\sum_{0 \leq d \leq n+1, d \neq i} \frac{1-\lambda_d}{x_i-x_d} \right] \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\lambda_\infty(1-\lambda_i)}{x_i(x_i-1)} F \\ \quad + (\lambda_i-1) \sum_{1 \leq d \leq n, d \neq i} \left[\frac{1}{x_i-x_d} + \frac{1-x_i-x_d}{x_i(x_i-1)} \right] \frac{\partial F}{\partial x_d} = 0 \quad (1 \leq i \leq n) \\ (x_i-x_j) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} + (\lambda_j-1) \frac{\partial F}{\partial x_i} - (\lambda_i-1) \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq i < j \leq n) \end{array} \right.$$

λ_i ($i=0, 1, \dots, n+1, \infty$) は複素定数で $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_\infty = n+1$ である.

微分方程式系 (F_1) の性質を述べる前に定義と記号を列挙する.

$X := P^n(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, さらに $x_0 = 0$ とする. 同様に,

以下 $S_I, \hat{S}_I$ などを定義する場合を除いて常に $x_{n+1} \equiv 1$

とし, $x_1, \dots, x_n$ を非斉次座標とする.

$I := \{i_0, i_1, \dots, i_p\}$ ($i_\alpha \in \mathbb{Z}, 0 \leq i_\alpha \leq n+1, \alpha \neq \beta$ のとき $i_\alpha \neq i_\beta$, $1 \leq p \leq n$) に対して,

$$\lambda_I := \lambda_{i_0} + \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_p} - p, \quad \mu_I := \exp(2\pi\sqrt{-1}\lambda_I)$$

$$S_I := \{x \in X \mid x_{i_0} = x_{i_1} = \dots = x_{i_p}\}$$

$$D := X - \bigcup_{0 \leq i < j \leq n+1} S_{ij}$$

$\hat{X}$: 次の列によって得られる X の改変:

$$\hat{X} = X_1 \xrightarrow{\sigma_2} X_2 \xrightarrow{\sigma_3} \dots \xrightarrow{\sigma_m} X_m = X$$

ただし σ_p はすべての S_I ($I = \{i_0, i_1, \dots, i_p\}$) に沿う
大雑把に言うと

σ -process

$\hat{S}_I$: $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \dots \circ \sigma_m$ による S_I の改変

Picard-Schwarz の条件を (F_1) が満たす: すべての

$I = \{i_0, \dots, i_p\}$ に対して

$$\lambda_I \in \mathbb{Z}^{-1} := \{0\} \cup \{1/m \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

次に, どの λ_i ($0 \leq i \leq \infty$) も整数でないとの条件の下での

(F₁)の基本的性質を列挙する[3].

(2.1) (F₁)は完全積分可能, Euler型の積分表示によって解の1つの基が表せる.

$$\omega_i := \int_0^{x_i} u^{\lambda_0-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-x_n)^{\lambda_n-1} (u-1)^{\lambda_{n+1}} du \quad (1 \leq i \leq n+1)$$

(2.2) Dの基本群は, S_{ij}に関する loop を表す A_{ij} (0 ≤ i < j ≤ n+1) によって生成されるが, A_{ij}に対するモノドロミーマトリックス B_{ij}が具体的に計算されている.

(2.3) w_i = ω_i は D から Pⁿ(w₁, ..., w_{n+1}) への局所双正則な多価写像となる. それを ω とする.

(2.4) すべての λ_i (0 ≤ i ≤ ∞) が実数のとき, モノドロミーで不変な^{エルミート}行列 A := (a_{ij}) が存在する:

$$B_{ij}^* A B_{ij} = A \quad (0 \leq i, j \leq n+1)$$

特に, 0 < λ_i < 1 (0 ≤ i ≤ ∞) ならば A の signature は (n, 1) となり, 従って Riemann の不等式によって ω の像は超球

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} w_i \bar{w}_j < 0$$

に含まれる.

(2.5) (解の特異点での局所的性質) S_I (I = {i₀, i₁, ..., i_p}) の通常点 (他の S_J との共通点でない) 点の十分小さな近傍 U に対して, 下の (a) 又は (b) の形の解の基が存在する. ただし x_I は x̂ での座標系の一部で {x_I = 0} = S_I ∩ U,

f_i は U で一価正則な関数である ($I \in \{0, n+1\}$ ならば全体に $x_I^{\lambda_I}$ を乗ずる)

(a) $\lambda_I \notin \mathbb{Z}$ ならば、

$$x_I^{\lambda_I} f_1, x_I^{\lambda_I} f_2, \dots, x_I^{\lambda_I} f_p, f_{p+1}, \dots, f_{n+1}$$

(b1) $\lambda_I \in \mathbb{Z}, \lambda \geq 0$ ならば

$$x_I^{\lambda_I} f_1, \dots, x_I^{\lambda_I} f_p, x_I^{\lambda_I} f_p \log x_I + f_{p+1}, f_{p+2}, \dots, f_{n+1}$$

(b2) $\lambda_I \in \mathbb{Z}, \lambda < 0$ ならば

$$x_I^{\lambda_I} f_1, \dots, x_I^{\lambda_I} f_{p-1}, f_p, f_p \log x_I + x_I^{\lambda_I} f_{p+1}, f_{p+2}, \dots, f_{n+1}$$

さて、問題2は、 (F_1) の場合、次の命題の正否という形に変形される。

(2.6) 命題. $P^n(w_1, \dots, w_{n+1})$ (の適当な改変) 上の領域 B , D の適当な compact 化 Y , Y 上の解析集合 S_0 ($C Y - D$), $Y_0 := Y - S_0$ 上の被覆領域 Z (射影 $\pi: Z \rightarrow Y_0$ は proper, $Y_0 - D$ 上でのみ分岐する) が存在して、次の条件を満たす:

ω の逆写像 ω^{-1} は B から Z への双正則な写像に拡張される。

このとき ω^{-1} は、群 (F_1) のモノドロミー群より誘導される保型関数体を定義する。基本領域は Y_0 と同型、従って Y_0 がコンパクト又は Y_0 に擬凹状集合を付加してコンパクト化ができる場合には、その関数体は純超越的である。

次の定理は問題2の部分的な解である。

(2.7) 定理 [3]. $0 < \lambda_i < 1$ ($i=1, 2, \dots, n+1, \infty$) のとき, 命題 (2.6) が正しいための必要十分条件は, Picard-Schwarz の条件が成立することである。

(2.7) は, $n=1$ のとき Schwarz の i) と同じである。
 $n \geq 2$ のときこの条件を満たす場合は有限個しかなく, (変数 λ_i の置換を除くと) $n=2$ で 27, $n=3$ で 17, $n=4, 5$ でそれぞれ 1 つのみで $n > 5$ なら存在しない。この場合領域 B は超球: $\sum a_{ij} w_i \bar{w}_j = 0$ であり, 基本領域 Y_0 ¹⁾ は $\hat{X} - \bigcup \{ \hat{S}_j \mid \lambda_j = 0 \}$ と双有理的である。 Y_0 の有理包は Y となり, 従って関数体はすべて純超越的となる。 $n=3$ の場合でも Y_0 がコンパクトな例が 2 つある。証明は, 解の特異点での局所的性質 (2.5) および不変 Hermite 形式 A により定義される complete な Poincaré-Bergman 計量を用いての ω^{-1} の解析接続による。Deligne-Mostow [1] は代数幾何学的な別証明を与えている。

1) $n=2$ のとき, $\hat{X}$ から出発し, $\lambda_i = 0$ である $\hat{S}_i$ を除き, $\lambda_{ij} < 0$ である $\hat{S}_{ij}$ と $\lambda_{ijk} > 0$ である $\hat{S}_{ijk}$ を blow down して得られる。

§ 3. 問題の解

ここでは、命題 (2.6) が成立するための必要十分条件を述べる。これによって (F₁) に関する限り、問題 2 は解決されたことになる。なお後に見るように、問題 1 も自動的に解決されたことになる。

まず、命題 (2.6) が正しいためには Picard-Schwarz の条件が必要であることが、後出の定理 (3.2) を使って ω の局所的性質を調べることによって分る。 $n=2$ のとき、この条件が満たされるのは次の 10 個に限られる (既出の 27 個を除いて)

	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_∞	B
(1)	$3/4$	$3/4$	$3/4$	$3/4$	0	$\mathbb{C}^2$
(2)	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	$\mathbb{C} \times (\text{disk})$
(3)	$1/3$	1	1	$1/3$	$1/3$	} $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$
(4)	$1/2$	1	1	$1/3$	$1/6$	
(5)	$1/2$	1	1	$1/4$	$1/4$	
(6)	$1/2$	1	1	$1/2$	0	$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$
(7)	$1/m$	1	1	$-1/m$	1	$\begin{cases} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & (m \neq \infty) \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} & (m = \infty) \end{cases}$
(8)	$3/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	
(9)	$5/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	
(10)	$7/6$	$5/6$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	

しかし上のすべての場合に命題 (2.6) が正しい訳ではない。

(3.1) 定義. 超幾何微分方程式系 (F_1) に対して添字の集合

$I = \{i_0, i_1, \dots, i_p\}$ が非対数的とは次の 5 条件の少なくとも 1 つが成立することであり, そうでないとき対数的という。

$$(1) \quad \lambda_I \notin \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \text{すべての } i_\alpha \in I \text{ について } \lambda_{i_\alpha} \in \mathbb{Z}^+ := \{m \in \mathbb{Z}, m > 0\}$$

$$(3) \quad \text{すべての } i_\alpha \in I \text{ について } 1 - \lambda_{i_\alpha} \in \mathbb{Z}^+$$

$$(4) \quad \text{すべての } j \notin I \ (j=0, 1, \dots, n+1, \infty) \text{ について } \lambda_j \in \mathbb{Z}^+$$

$$(5) \quad \text{すべての } j \in I \ (j=0, 1, \dots, n+1, \infty) \text{ について } 1 - \lambda_j \in \mathbb{Z}^+$$

(3.2) 定理. (F_1) に対して, 命題 (2.6) が成立するための必要十分条件は, Picard-Schwarz の条件及び条件:

(*) $\lambda_I = \pm 1$ となる I が存在すれば, I は非対数的である。

が成立することである。

これは (F_1) に対する問題 2 の解決を与えるものである。

$n=2$ のとき, 既出の表の内 (8), (9), (10) については

$\lambda_{01} = 1$ であるのに I は対数的だから, ω^{-1} は一面ではな

い. (1)~(7)については, ω^{-1} は保型関数で定義する. その領域 B が表の右に記されている. (1) の Y_0 は射影空間 X そのものであり, 関数は Abel 関数となる. (2) の B は直積だが, その群はそうではない. Y_0 は X において $x_1=x_2=x_3$, $x_1=x_2=0$, $x_2=x_3=0$, $x_3=x_1=0$ で blow up し, $x_i=x_j$ ($0 \leq i < j \leq 3$) をすべて除いて得られる. (3)~(7) はすべて領域も群も 1 変数の直積であって, Schwarz の結果に含まれるのであまりおもしろくはない. (1) は吉田氏によって得られた, $\bigcup_{0 \leq i < j \leq n+1} S_{ij}$ のみで分岐する $\mathbb{P}^2$ 上の被覆領域で, 普遍被覆空間が $\mathbb{C}^2$ となるものの唯一の例である [5].

$n \geq 3$ の場合, この表の (2)~(7) で λ_3 を λ_{n+1} の値とし, さらに $\lambda_3=\lambda_4=\dots=\lambda_n=1$ とおくと Picard-Schwarz の条件と (x) を同時に満たすものの例が作れる. しかしこのとき ω^{-1} より定義される保型関数は, すべて 1 変数または 2 変数の直積となるのでつまらない. $n=3, 4, 5, 6, 7$ については上記のもの以外に Picard-Schwarz の条件を満たす場合があるが, そのいずれも (x) を満たさない. 従って, $0 < \lambda_i < 1$ ($0 \leq i \leq \infty$) でなければ本質的には $n \leq 2$ の場合しか例が存在しないことになる.

[問題1の解] $n=1$ のとき, Picard-Schwarz の条件が満たされしかも $\lambda_{ij} \geq 0$ ($0 \leq i < j \leq 2$) であるならば, 簡単な計算により, $\lambda_\infty \in \mathbb{Z}^{-1}$ と条件 (4) とは同値である.

$0 < \lambda_i < 1$ のとき $\lambda_i = \pm 1$ となることはないから $\lambda_\infty \in \mathbb{Z}^{-1}$ は不要, しかし $\lambda_\infty < 0$ の場合は必要である. もし (4) が満たされていず, $\lambda_i = \pm 1$ ならば [3] p.464 で示すように ω^{-1} が $\hat{S}_i$ の近傍の像の中で一面とならない. つまり iii) では $1/\lambda_\infty \in \mathbb{Z}$ は必要で, それは $\hat{S}_i$ での局所的な理由による.

[証明の概要] 定理 (3.2) の証明は定理 (2.7) のと本質的に同じである. 必要なことは, いづれかの λ_i が整数の場合に (F_1) の性質を詳しく調べることのみ.

(3.3) 定理.

$$\omega'_i = \frac{1}{\Gamma(\lambda_i)} \omega_i \quad (1 \leq i \leq n+1)$$

とすると, ω'_i ($1 \leq i \leq n+1$) は, $\lambda_\infty \notin \mathbb{Z}^+$ かつ $1-\lambda_0 \notin \mathbb{Z}^+$ のとき (F_1) の解の1つの基となる

(3.4) 系. $\lambda_k \notin \mathbb{Z}^+$, $1-\lambda_j \notin \mathbb{Z}^+$ とすると

$$\omega'_i = \frac{1}{\Gamma(\lambda_i)} \int_{x_j}^{x_i} u^{\lambda_0-1} (u-x_1)^{\lambda_1-1} \cdots (u-1)^{\lambda_{n+1}-1} du$$

$$(0 \leq i \leq \infty, i \neq j, k)$$

が (F_1) の基となる。¹⁾

(3.3), (3.4) によって一般の場合に ω_i を基として (F_1) のモドロー行列が具体的に計算でき, それによって次の定理を得る.

(3.5) 定理 (一般の場合の (F_1) の解の局所的性質). 定義・記号は (2.5) と同じとする. $\hat{x} \in \hat{S}_I$ が通常点のとき, $\hat{x}$ の近傍での (F_1) の解の基で次の形のものが存在する.

(a) I が非対数的ならば (2.5) の (a) と同じ.

(b) I が対数的ならば $\lambda_I \geq 0$ または $\lambda_I < 0$ に応じてそれぞれ (b1) または (b2) と同じ.

定理 (3.5) と [3] Lemme 9 によって ω^{-1} が一価となるためには Picard-Schwarz の条件と (*) が必要であることが分る. 十分であることの証明は矢張, completeかつ不変な計量を使って ω^{-1} を解析接続することによる. しかし一般には不変 Hermite 行列 A' は正則でないので, A' を λ_i の関数として,

1) $\lambda_0 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} + \lambda_\infty = n+1$ よりこのような λ_i は少なくとも 1 組存在する.

A' に λ_i の実関数を掛けておき, λ_i が問題の値に近づくときの極限をとることによって計量を作る!¹⁾

参考文献

- [1] Deligne, P., et Mostow, G.D., Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, Publ. Math. IHES. n°63. 1986, 1-89.
- [2] Schwarz, H.A., Ueber diejenigen Fällen in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt, J. r. und angew. Math. 175 (1873), 292-295
- [3] Terada, T., Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes I, ^{Math.} J. Soc. Japan, 35 (1983), 452-475
- [4] ———, Hypergeometric function F_1 and automorphic functions. preprint
- [5] Yoshida, M., Kaneko, J., and Tokunaga, S., Complex crystallographic groups II. J. Math. Soc. Japan. 34 (1982)
- [6] Kampé de Férié, Fonction hypergeometrique, Gauthier-Villars.

¹⁾ 詳細は [4] 参照.