

(続紙 1)

京都大学	博 士 (理 学)	氏名	馬 原 凌 河
論文題目	Extension of Additive Valuations to General Valuations on the Existence of EFX (EFX配分の存在に関する非加法的評価関数への拡張)		
(論文内容の要旨)			
本論文は、EFX配分と呼ばれる、不可分財の公平配分理論における近似的無羨望配分の存在を議論するものである。各エージェントの評価関数が加法的とは限らないいくつかのケースにおいて、離散数学的な手法を用いてEFX配分の存在を明らかにしたことが本論文の主要な貢献である。 財の公平配分は、経済学およびアルゴリズム的ゲーム理論における基本的かつ重要なトピックであり、公平性概念の提案や公平な配分の存在性、公平な配分を求めるプロトコルについて古くから研究がなされてきた。古典的な公平配分理論では、金銭や土地などに代表される可分財についての研究が中心であった。しかし、現実の問題においては、美術品の相続、公的宿舍の割当、講義の座席割当など、財の可分性が仮定できない場合が自然に生じうるため、可分財の公平配分理論が適用できない場合も多い。このような背景の下、近年では不可分財の公平配分問題が注目され、急速に研究が発展してきている。 本論文では公平性の指標として無羨望性に着目している。不可分財を配分する際には、無羨望配分の存在は必ずしも保証されないため、近似的な無羨望性を達成できるか否かが興味の対象となっている。様々な近似的な無羨望性が考えられる中で、Caragiannisらによって2016年に導入されたEFX配分は、不可分財の配分を扱う際に最も説得力のある近似的無羨望性の概念として認識され、盛んに研究がなされている。しかしながら、EFX配分が常に存在するか否かは未だに明らかになっておらず、いくつかの限定的な状況下においてのみEFX配分の存在が示されているのが現状である。 本論文の主結果は、不可分財の配分におけるEFX配分の存在を以下の3つのケースに対して示したことである。 (1) 2つの評価関数があり、各エージェントの評価関数がそのいずれかである場合。 (2) $m \leq n+3$ の場合。 (3) 高々$n-2$個の不可分財を未割当としてよい場合。 ただし、エージェント数をn、配分するアイテム数をmで表す。各結果はいずれも既存研究の結果を改善し、現在最良の結果を与えるものである。具体的には、(1)の結果は「各エージェントの評価関数がすべて同一である場合にEFX配分が存在する」というPlaut and Roughgarden (2020)の結果と「2つの加法的な評価関数があり、各エージェントの評価関数がそのいずれかである場合にEFX配分が存在する」という馬原氏自身の以前の研究成果の共通の拡張となっている。また、(2)の結果は「$m \leq n+2$であり、各評価関数が加法的であればEFX配分が存在する」というAmanatidisら(2020)の結果を強めている。(3)の結果は「高々$n-1$個の不可分財を未割当としてよい場合にはEFX配分が存在する」というChaudhuryら(2020)の結果を改善している。 本論文で示されたこれらの結果は、EFX配分がいかなる場合においても常に存在するか、という未解決問題の解決に向けた重要な一歩であり、理論的意義のあるものであると言える。			

(論文審査の結果の要旨)

上記の3つの結果はいずれも、未割当のアイテムを許すEFX配分を常に保持しながらその更新を繰り返すことで条件を満たす配分を得る、という構造的なアプローチによる。そのため、本論文の証明は、副次的にEFX配分を求めるアルゴリズムを与えている。この手法で所望の配分を得られることを示すためには、各更新で何らかのポテンシャルが改善されていることを示すのが一般的である。その際に「どのようなポテンシャルを用いるか」および「どのようにポテンシャルを改善する更新を行うか」が技術的な課題となる。

本論文では、(2)および(3)の証明において既存の辞書式ポテンシャルを用いており、(1)の証明においては新たに導入した分割辞書式最小ポテンシャルを用いている。新たなポテンシャルを導入し、その有用性を示したことは本論文の重要な技術的貢献であると言える。

ポテンシャルを改善する適切な更新方法を与えたことも、本論文の重要な貢献である。更新の正当性を示す際には、更新によって評価値が減少するエージェントの扱いが技術的に困難である。この点を克服するために、本論文では、評価値が減少しうるエージェントを事前に限定し、新たなEFX配分で出現しうるアイテム集合をすべて列挙したうえで、その中で最も良いアイテム集合をそのエージェントに配分する、という新たなアイデアを用いている。また、一度の更新において複数の配分の変換を組み合わせたことが必要な場合もあり、総じて更新方法の構成、正当性の証明のいずれも込み入った議論が必要となる。本論文ではこれらの複雑な状況を明快に議論している。

さらに、本論文では、 $n=3$ かつ $m=7$ であり既存の辞書式ポテンシャルを用いるアプローチが適用できない問題例を与えている。この例は、既存のアプローチの限界を示すものであり、より一般の場合についてEFX配分の存在を示すためには、別のアプローチが必要となることを示唆している。

以上のように本論文は、不可分財の公平配分理論において注目を集めているEFX配分の存在について新たな知見を与えるものである。得られた結果自体が理論的に重要であるだけでなく、新たに提案された証明技法は今後の研究に繋がりうるものであり、大きな意味を持つと言える。

よって、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める。また、令和5年1月16日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日： 年 月 日以降