

ある種の $t-(2k, k, \lambda)$ design について

阪大 数春 野田隆三郎

$v=2k$ であるような t -design つまり $t-(2k, k, \lambda)$ design について考える. ここでは次の仮定をおく.

(1) 任意の block A に対し A の補集合も block である

この時 次のことが知られている.

定理 (Alltop [1]). t が偶数, $k > t$ であれば上の (1) とみたとき $t-(2k, k, \lambda)$ design は $(t+1)$ -design である.

$t-(2k, k, \lambda)$ design の中で無限 series として知られているのはただ一つ Hadamard 3-design, つまり $3-(2k, k, \frac{1}{2}(k-2))$ design だけである. Hadamard 3-design は $t-(2k, k, \lambda)$ design の中で上の性質 (1) と次の性質で特徴づけられる

(*) 任意の complementary な block の pair A, B に対し
 $|C \cap A| = |C \cap B|$ が他の任意の block C に対してなりたつ。

そこで (*) の代りに次の条件 (2) (or (3)) を考える。

(2) 任意の complementary な block の pair A, B に対し
 $|C \cap A| = |C \cap B| \pm u \quad (u > 0)$ が他の任意の block C に対してなりたつ。

(3) 任意の complementary な block の pair A, B に対し
 $|C \cap A| = |C \cap B|$ または $|C \cap A| = |C \cap B| \pm u$ が他の任意の block C に対してなりたつ。

この時 次の定理がなりたつ。

定理1 ([2]) $t = (2k, k, \lambda)$ design ($t \geq 2$) が Γ の
 (1), (2) をみたせば $t \leq 3$ で parameter は次のように u によって
 $k = u(2u+1), \lambda = u(2u^2+u-2)$ 。

定理2 ([2]) $t = (2k, k, \lambda)$ design が Γ の (1) ³ をみたせば $t \leq 5$ であり $t \geq 4$ とすれば次のいふものがなりたつ。

(i) $5 - (12, 6, 1)$ design

(ii) $5 - \left(\frac{2}{3}u(2u+1), \frac{1}{3}u(2u+1), \frac{1}{54}u(2u^2+u-9)(2u^2+u-12)\right)$
design

(iii) $5 - (2u^2, u^2, \frac{1}{4}(u^2-3)(u^2-4))$ design

定理1で存在が知られているのは自明な $3 - (6, 3, 1)$ design だけである。また定理2で存在が知られているのは $5 - (12, 6, 1)$ design, $5 - (24, 12, 48)$ design (type (iii)) と共に自明な $4 - (8, 4, 1)$ design だけである。定理1, 2の証明は文献[2]と参照された。(type (iii))

文 献

1. W.O. Alltop, Extending t -designs, J. Combinatorial Theory A 18 (1975), 177-186
2. R. Noda, On some $t - (2k, k, \lambda)$ designs, to appear in J. Combinatorial Theory A.