

非特異点のガロア被覆となる特異点について

東北学院大学教養学部 土橋宏康 (Hiroyasu Tsuchihashi)

Y を $\mathbf{C}^n$ の原点の開近傍とし、 $\pi: X \rightarrow Y$ を Y の有限ガロア被覆とする。即ち、 π は正規解析空間 X から Y への固有有限正則写像であり、 $\text{Aut}(\pi) := \{g \in \text{Aut}(X) | \pi \circ g = \pi\}$ が π の各束 $\pi^{-1}(y)$ に推移的に作用する。さらに、 $\pi^{-1}(0)$ は一点 x_0 だけからなると仮定する。 π の分岐点集合 $\{y \in Y | \#\pi^{-1}(y) < \deg \pi\}$ の既約成分を $B_1, B_2, \dots, B_s$ とし、 π の B_j に沿っての分岐次数を r_j とする。即ち、 $r_j = \deg \pi / \max\{\#\pi^{-1}(y) | y \in B_j\}$ 。 $B_\pi := r_1 B_1 + r_2 B_2 + \dots + r_s B_s$ とする。次のような問題を考える。

問題 1 (X, x_0) はいかなる特異点か。 B_π および $\text{Gal}(X/Y) := \text{Aut}(\pi)$ から (X, x_0) の性質 (Gorenstein か等) がどれだけわかるか。

問題 2 Y の正因子 D が与えられたとき、

$$GC(Y, D) := \{B_\pi = D \text{ となる有限ガロア被覆 } \pi: X \rightarrow Y\} / \sim,$$

$$AC(Y, D) := \{B_\pi = D \text{ となる有限アーベル被覆 } \pi: X \rightarrow Y\} / \sim$$

を決定せよ。ここで、 $(\pi: X \rightarrow Y) \sim (\pi': X' \rightarrow Y)$ とは $\pi = \pi' \circ \phi$ を満たす同型写像 $\phi: X \simeq X'$ が存在することである。

1 節から 3 節で問題 1 および 2 について現在までに判ったことを解説する。問題 2 の $AC(Y, D)$ については完全に判るが、 $GC(Y, D)$ について具体的に判るのは、今のところ、 D が超平面配置のような簡単な場合 (例 4 と例 5) と 4 節で構成する (X, x_0) がトーリック特異点となるような特別な場合だけである。

1 問題 1 について

命題 1 (X, x_0) は $\mathbf{Q}$ -Gorenstein である。即ち、 $X \setminus \text{Sing}(X)$ 上いたるところ 0 にならない正則 r 重 n 形式が存在する (r は $r_1, r_2, \dots, r_s$ の最小公倍数)。また (X, x_0) が quai-Gorenstein であるための必要十分条件は $(r_1 - 1)\pi^{-1}(B_1)_{\text{red}} + (r_2 - 1)\pi^{-1}(B_2)_{\text{red}} + \dots + (r_s - 1)\pi^{-1}(B_s)_{\text{red}}$ が $X \setminus \text{Sing}(X)$ 上主因子となることである。

証明 $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ を $\mathbf{C}^n$ の座標系とし、

$$\phi = \frac{(dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n)^r}{f_1^{\frac{r}{r_1}(r_1-1)} f_2^{\frac{r}{r_2}(r_2-1)} \dots f_s^{\frac{r}{r_s}(r_s-1)}}$$

とすれば $\pi^*\phi$ は $X \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(B_\pi))$ 上いたるところ 0 にならない正則 r 重 n 形式である。ただし、 f_i は B_i の定義式である。 $\pi^{-1}(\text{Sing}(B_\pi))$ は余次元が 2 以上なので $\pi^*\phi$ は $X \setminus \text{Sing}(X)$ に自然に延長できる。次に、 ψ を $X \setminus \text{Sing}(X)$ 上いたるところ 0 にならない正則 n 形式とすると $\frac{\pi^*(dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n)}{\psi}$ は $X \setminus \text{Sing}(X)$ 上の正則関数であり、その零因子は $(r_1 - 1)\pi^{-1}(B_1)_{\text{red}} + (r_2 - 1)\pi^{-1}(B_2)_{\text{red}} + \dots + (r_s - 1)\pi^{-1}(B_s)_{\text{red}}$ に等しい。逆に、 f がそのような正則関数ならば、 $\frac{\pi^*(dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n)}{f}$ は $X \setminus \text{Sing}(X)$ 上いたるところ 0 にならない正則 n 形式である。 ■

この命題により、 (X, x_0) は小平次元が $1, \dots, n-2$ の代数多様体上の錐にはならないことがわかる。また (X, x_0) は次の 3 つの型に分けることができる。 $\mu: (\widetilde{X}, E) \rightarrow (X, x_0)$ を (X, x_0) の特異点解消とし、 ψ を $X \setminus \text{Sing}(X)$ 上いたるところ 0 にならない正則 r 重 n 形式とする。

I. $\mu^*\psi$ の E の各既約成分に沿っての 0 の位数が $-r$ より大きい。このとき、すべての正整数 m に対して $\delta_m(X, x_0) = 0$ 。

II. $\mu^*\psi$ の E の各既約成分に沿っての 0 の位数が $-r$ 以上であり、少なくとも一つの既約成分に沿ってのそれは $-r$ に等しい。このとき、すべての正整数 m に対して $\delta_m(X, x_0) = 0$ または 1 であり、ある正整数 ℓ があって $\delta_{m\ell}(X, x_0) = 1$ 。

III. E のある既約成分に沿っての $\mu^*\psi$ の 0 の位数が $-r$ より小さい。このとき、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\delta_m(X, x_0)}{m^{n-1}} > 0$ 。

$n = 2$ のとき I 型の特異点は商特異点であり [3]、II 型の特異点の例としては単純楕円型特異点、カスプ特異点およびこれらの有限群による商がある。

Y 上の正則関数 $f = \sum_{v \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n} c_v z^v$ に対して $\text{Supp}(f) = \{v \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n | c_v \neq 0\}$ とする。ただし、 $z^{(a_1, a_2, \dots, a_n)} = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \dots z_n^{a_n}$ である。また、 $\Gamma_+(f)$ を $\bigcup_{v \in \text{Supp}(f)} (v + \mathbf{R}_{\geq 0}^n)$ の凸包とする。

定義

$$\Gamma_+(B_\pi) = (1 - \frac{1}{r_1})\Gamma_+(f_1) + (1 - \frac{1}{r_2})\Gamma_+(f_2) + \dots + (1 - \frac{1}{r_s})\Gamma_+(f_s)$$

とする。ただし、 f_i は B_i の定義式である。

Δ を $\Gamma_+(B_\pi)$ の面としたとき $\Delta = \Delta(u) := \{v \in \Gamma_+(B_\pi) | \langle v, u \rangle = \min\{\langle w, u \rangle | w \in \Gamma_+(B_\pi)\}\}$ となる点 u がある。 $\Delta_j = \{v \in \Gamma_+(f_j) | \langle v, u \rangle = \min\{\langle w, u \rangle | w \in \Gamma_+(f_j)\}\}$ とすれば $\Delta = (1 - \frac{1}{r_1})\Delta_1 + (1 - \frac{1}{r_2})\Delta_2 + \dots + (1 - \frac{1}{r_s})\Delta_s$ である。

定理 2 (1) (X, x_0) が I 型特異点ならば、 ${}^t(1, 1, \dots, 1) \in \text{Int}(\Gamma_+(B_\pi))$ 。

(2) (X, x_0) が II 型特異点ならば、 ${}^t(1, 1, \dots, 1) \in \Gamma_+(B_\pi)$ 。

$f_1, f_2, \dots, f_s$ が以下の条件を満たせば逆も成り立つ。

(*) $\Gamma_+(B_\pi)$ の自分自身を除く各面 Δ に対して $f_{1\Delta} f_{2\Delta} \cdots f_{s\Delta} = 0$ が $(\mathbb{C}^\times)^n$ で正規交差となる。ただし、 $f_j = \sum_{v \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n} c_v z^v$ ならば $f_{j\Delta} = \sum_{v \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n \cap \Delta_j} c_v z^v$ 。

証明 $\Gamma_+(B_\pi)$ の双対 Newton 図形を $\Gamma^*(B_\pi)$ とする。即ち、 $\Gamma^*(B_\pi) = \{\Delta^* | \Delta \text{ は } \Gamma_+(B_\pi) \text{ の面}\}$ 。ただし、 $\Delta^* = \{u \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n | \Delta(u) \supset \Delta\}$ 。扇の細分 $(\mathbf{Z}^n, \Gamma^*(B_\pi)) \rightarrow (\mathbf{Z}^n, \{\text{faces of } \mathbf{R}_{\geq 0}^n\})$ から導かれるトーリック多様体の間の正則写像を

$$\lambda: T_{\mathbf{Z}^n \text{emb}}(\Gamma^*(B_\pi)) \rightarrow T_{\mathbf{Z}^n \text{emb}}(\{\text{faces of } \mathbf{R}_{\geq 0}^n\}) = \mathbb{C}^n$$

とし、 $\tilde{Y} = \lambda^{-1}(Y)$ とする。 $\Gamma^*(B_\pi)$ の一次元錐 $\mu = \mathbf{R}_{\geq 0} u$ (u は原始元) に対して $E_\mu = \overline{\text{orb}(\mu)}$ とする。このとき、 $\lambda^* \left(\frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_n}{z_n} \right)$ の E_μ に沿っての 0 の位数が -1 であることから、命題 1 の証明の中の ϕ の λ による引き戻し $\lambda^* \phi$ の E_μ に沿っての 0 の位数 α_μ は

$$r \left(-1 + \langle {}^t(1, 1, \dots, 1), u \rangle - \sum_{j=1}^s \left(1 - \frac{1}{r_j} \right) d_u(f_j) \right)$$

に等しい。ただし、 u は μ を張る $\mathbf{Z}^n$ の原始元であり、 $d_u(f_j) = \min\{\langle v, u \rangle | v \in \text{Supp}(f_j)\}$ である。従って、 $\Gamma^*(B_\pi)$ のすべての一次元錐 μ について $\alpha_\mu \geq -r$ ($\alpha_\mu > -r$) となる必要十分条件は、 ${}^t(1, 1, \dots, 1) \in \Gamma_+(B_\pi)$ ($\text{Int}(\Gamma_+(B_\pi))$) となることである。

一方、 $\tilde{X}$ を $X \times_Y \tilde{Y}$ の正規化とし、 $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$, $\theta: \tilde{X} \rightarrow X$ を射影とする。 $\Gamma^*(B_\pi)$ の各 1 次元錐 μ について F_μ を $\tilde{\pi}(F_\mu) = E_\mu$ となる $\tilde{X}$ の既約因子の一つとすると $\theta^* \pi^* \phi = \tilde{\pi}^* \lambda^* \phi$ の F_μ に沿っての 0 の位数 $(\alpha_\mu + r)r_\mu - r$ が $-r$ 未満 ($-r$ に等しい、 $-r$ より大きい) となるための必要十分条件は α_μ がそうなることである。ただし、 r_μ は $\tilde{\pi}$ の E_μ に沿っての分岐次数である。

次に、 $\Gamma^*(B_\pi)$ の非特異錐からなる細分の一つ Σ を選び、写像 λ の定義において $\Gamma^*(B_\pi)$ を Σ で置き換えると $\tilde{Y}$ は非特異であり、さらに (*) が満たされているとき $\lambda^{-1}(B_\pi)$ は $\lambda^{-1}(0)$ の近くで正規交差となる。このとき、 $\tilde{X}$ は必ずしも非特異ではないが商特異点しか持たない。また、 $\varpi: \bar{X} \rightarrow \tilde{X}$ を $\tilde{X}$ の特異点解消とすると、 $\lambda^{-1}(0)$ の各既約成分に沿っての $\lambda^* \phi$ の 0 の位数が $-r$ 以上 (より大きい) ならば $(\theta \circ \varpi)^{-1}(x_0)$ の各既約成分に沿っての $(\lambda \circ \tilde{\pi} \circ \varpi)^* \phi$ のそれも同様であることが容易にわかる。 ■

例 1 $s \leq n$, $f_j = z_j$ のとき ${}^t(1, 1, \dots, 1) \in \text{Int}(\Gamma_+(B_\pi))$ である。実際、このとき (X, x_0) は商特異点である。

例 2 $s = n + 1, f_j = z_j (1 \leq j \leq n), f_{n+1} = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ のとき $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_{n+1}} > 1 (= 1)$ ならば ${}^t(1, 1, \dots, 1) \in \text{Int}(\Gamma_+(B_\pi)) (\in \partial\Gamma_+(B_\pi))$ である。

例 3 f が $(2, 2, \dots, 2) \notin \Gamma_+(f)$ を満たす正則関数で $B_\pi = 2\{z_1^2 z_2^2 \cdots z_n^2 + f = 0\}$ のとき ${}^t(1, 1, \dots, 1) \in \partial\Gamma_+(B_\pi)$ である。実際に、このような分岐点集合を持つ Y のガロア被覆 X で (X, x_0) がカスプ特異点となるものが 2, 3, 4, 5 の各次元に存在する (詳しくは [2] 参照)。

2 問題 2 について

Y は単連結であると仮定し、 $D = r_1 D_1 + r_2 D_2 + \cdots + r_s D_s$ を Y 上の因子とする。ただし、 $r_1, r_2, \dots, r_s$ は 2 以上の整数であり、 $D_1, D_2, \dots, D_s$ は既約と仮定する。また、 f_j を D_j の定義式とする。このとき、

$$\{(w_1, w_2, \dots, w_s, y) \in \mathbf{C}^s \times Y \mid w_1^{r_1} - f_1(y) = \cdots = w_s^{r_s} - f_s(y) = 0\}$$

の正規化 $\tilde{Y}$ は Y のアーベル被覆であり、 $\text{Gal}(\tilde{Y}/Y) \simeq \mathbf{Z}_{r_1} \oplus \mathbf{Z}_{r_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{r_s}$ である。 $AC(Y, D)$ については次の定理から完全にわかる。

定理 3 $\pi: X \rightarrow Y$ が $B_\pi = D$ を満たすアーベル被覆ならば $\text{Gal}(\tilde{Y}/Y)$ のある部分群 H により、 $(X \rightarrow Y) \sim (\tilde{Y}/H \rightarrow Y)$ となる。

証明 $\text{Gal}(X/Y), \text{Gal}(\tilde{Y}/Y)$ は $\pi_1(Y \setminus D)$ の商群とみなせる。 D_j の回りを正方向に一回転する $\pi_1(Y \setminus D)$ の元の一つを σ_j とし ($\int_{\sigma_j} \frac{df_i}{f_i} = \delta_{ij} 2\pi\sqrt{-1}$)、商写像 $\pi_1(Y \setminus D) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{Y}/Y)$ による σ_j の像を $\tilde{\sigma}_j$ とする。このとき、 $\tilde{\sigma}_j^{r_j}$ は単位元であり、 $\text{Gal}(\tilde{Y}/Y)$ は $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_s$ で生成される。

次に、 $X \times_Y \tilde{Y}$ の既約成分の一つの正規化を $\tilde{X}$ とする。このとき、 $\text{Gal}(\tilde{X}/Y)$ は $\text{Gal}(X/Y) \oplus \text{Gal}(\tilde{Y}/Y)$ の部分群だからアーベル群である。また商写像 $\pi_1(Y \setminus D) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{X}/Y)$ による $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ の像 $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_s$ で生成される $\text{Gal}(\tilde{X}/Y)$ の部分群を F とする。このときガロア被覆 $\tilde{X}/F \rightarrow Y$ は $Y \setminus \text{Sing}(D)$ で分岐しない。ところが、 Y は非特異だからこの写像は同形写像でなければならない。即ち、 $F = \text{Gal}(\tilde{X}/Y)$ 。一方、 $\tilde{X} \rightarrow Y$ の D_j に沿った分岐次数は r_j であるから $\tilde{\sigma}_j^{r_j}$ は単位元である。従って、商写像 $\text{Gal}(\tilde{X}/Y) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{Y}/Y)$ は同型写像になるから、 $\tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ も同形写像である。また同型写像 $\text{Gal}(\tilde{X}/Y) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{Y}/Y)$ による $\text{Gal}(\tilde{X}/X)$ の像を H とすれば $\tilde{Y}/H \simeq X$ である。 ■

この定理により、 $AC(Y, D)$ は $\mathbf{Z}_{r_1} \oplus \mathbf{Z}_{r_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{r_s}$ の部分群 H で条件

$$(0, \dots, 0, a_j, 0, \dots, 0) \in H \Rightarrow a_j = 0$$

を満たすものの集合と一対一に対応することがわかる。従って、 Y 上の任意の正因子 D に対して $\#AC(Y, D) < \infty$ である。

次に、 $GC(Y, D)$ について考える。 $Y_0 = Y \setminus \text{Sing}(D)$, $\tilde{Y}_0 = \mu^{-1}(Y_0)$ とする。ただし、 $\mu: \tilde{Y} \rightarrow Y$ は自然な射影である。また、 $\lambda: \tilde{W} \rightarrow \tilde{Y}_0$ を普遍被覆とする。

定理 4 $\mu \circ \lambda: \tilde{W} \rightarrow Y_0$ はガロア被覆である。また、 $\text{Gal}(\tilde{W}/Y_0) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{Y}_0/Y_0)$ の核は $\text{Gal}(\tilde{W}/Y_0)$ の交換子群である。

証明 $\text{Gal}(\tilde{Y}/Y)$ の任意の元 g に対して $g \circ \lambda$ も $\tilde{Y}_0$ の普遍被覆であるから $\lambda \circ \tilde{g} = g \circ \lambda$ を満たす $\tilde{W}$ の自己同型 $\tilde{g}$ が存在する。従って、これらの元 $\tilde{g}$ ($g \in \text{Gal}(\tilde{Y}/Y)$) と $\pi_1(\tilde{Y}_0)$ とで生成される $\text{Aut}(\tilde{W})$ の部分群は $\mu \circ \lambda$ の束 $(\mu \circ \lambda)^{-1}(y)$ ($y \in Y_0$) に推移的に作用する。

次に、 $\text{Gal}(\tilde{W}/Y_0)$ の交換子群を H とする。 $\text{Gal}(\tilde{Y}_0/Y_0)$ はアーベル群であるから上への準同型写像 $\text{Gal}(\tilde{W}/Y_0)/H \rightarrow \text{Gal}(\tilde{Y}_0/Y_0)$ が存在する。仮にこの写像が同型写像でなければ、 H を含み $\text{Gal}(\tilde{W}/Y_0) \rightarrow \text{Gal}(\tilde{Y}_0/Y_0)$ の核に真に含まれる $\text{Gal}(\tilde{W}/Y_0)$ の指数有限な部分群 H' が存在する。このとき、 $\tilde{W}/H'$ は D_j に沿っての分岐次数が r_j である Y_0 の有限アーベル被覆であって、しかもその次数が $\deg(\mu)$ より大きい。ところが、定理 3 の証明で Y を Y_0 で置き換えれば、 $B_{\pi'} = D \setminus \text{Sing}(D) = Y_0 \cap D$ を満たす Y_0 の任意の有限アーベル被覆 π' の次数は $\deg(\mu)$ 以下であることがわかる。矛盾。■

定理 5 $B_{\pi} = D$ を満たす任意のガロア被覆 $\pi: X \rightarrow Y$ に対して $\text{Gal}(\tilde{W}/Y_0)$ の正規部分群 H と双正則写像 $\tau: \tilde{W}/H \simeq X_0 := \pi^{-1}(Y_0)$ で $\pi \circ \tau$ が $\mu \circ \lambda$ から導かれる自然な写像 $\tilde{W}/H \rightarrow Y_0$ に一致するものが存在する。

証明 W' を $\tilde{W} \times_{Y_0} X_0$ の既約成分の一つとする。このとき、 W' の正規化と射影 $W' \rightarrow \tilde{W}$ の合成写像は不分岐被覆となる。ところが、 $\tilde{W}$ は単連結であるから $W' \rightarrow \tilde{W}$ は同型写像である。次に、 $G = \{g \in \text{Gal}(\tilde{W}/Y_0) \oplus \text{Gal}(X_0/Y_0) \mid gW' = W'\}$ とし、 $\text{Gal}(\tilde{W}/Y_0) \oplus \text{Gal}(X_0/Y_0)$ の第一、第二成分への射影の G への制限をそれぞれ p_1, p_2 とする。このとき、 p_1 は同形写像であり、 p_2 は上への写像である。また、 $H = p_1^{-1}(\ker(p_2))$ とすれば、合成写像 $\tilde{W} \simeq W' \rightarrow X_0$ から導かれる写像 $\tilde{W}/H \rightarrow X_0$ は同型写像である。■

上の定理において $B_{[\tilde{W} \rightarrow Y_0]} = B_{[\tilde{W}/H \rightarrow Y_0]}$ であるから $\tilde{W} \rightarrow \tilde{W}/H$ は不分岐被覆である。従って、 $GC(Y, D)$ は $\text{Gal}(\tilde{W}/Y_0)$ の指数有限な正規部分群であって $\tilde{W}$ に固定点を持たないものの集合の部分集合とみなせる。

例 4 D を例 1 の B_π としたとき、 $\tilde{Y}_0$ は単連結であるから $GC(Y, D) = AC(Y, D)$ は有限集合である。

例 5 D を例 2 の B_π としたとき、 $\tilde{Y}$ は $w_1^{r_1} + \dots + w_n^{r_n} = w_{n+1}^{r_{n+1}}$ で定義される $\mathbf{C}^{n+1}$ の超曲面に同型である。 $n=2$ のときは、 $Y_0 = Y \setminus \{0\}$ としてよいので、 $\tilde{Y}$ が比較的簡単な特異点の場合、 $\pi_1(\tilde{Y}_0)$ 及び $Gal(\tilde{W}/Y_0)$ が計算できる。特に、 ${}^t(1, 1) \in Int(\Gamma_+(D))$ ならば、定理 2 と [3] により、 $GC(Y, D)$ に属す特異点 (X, x_0) は商特異点であるから、 $\pi_1(\tilde{Y}_0)$ は有限群になる。

(I) $(r_1, r_2, r_3) = (2, 2, \ell)$ のとき、 $Gal(\tilde{W}/Y_0)$ は

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される $GL(2, \mathbf{C})$ の部分群 G に同型である。ただし、 ρ は 1 の原始 2ℓ 乗根である。このとき、 G の交換子群は $\langle A^2 \rangle$ であり、 $\tilde{Y} \simeq \mathbf{C}^2 / \langle A^2 \rangle$ は A_ℓ 型の有理二重点である。 G の固有正規部分群 H で $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ に固定点を持たず、 G/H がアーベル群となる (即ち、商写像 $\mathbf{C}^2/H \rightarrow \mathbf{C}^2/G \simeq \mathbf{C}^2$ が $AC(\mathbf{C}^2, D)$ に属す) ものは ℓ が奇数のときは $\langle A^2 \rangle$ と (i) $H = \langle A \rangle$ だけであり、 ℓ が偶数のときは、この他には次の 4 個がある。(ii) $H = \langle A^2, A^{\frac{\ell}{2}} B^{\frac{\ell}{2}} C \rangle$, (iii) $H = \langle A^2, A^{\frac{\ell}{2}+1} B^{\frac{\ell}{2}} C \rangle$, (iv) $H = \langle A^{\frac{\ell}{2}-1} B^{\frac{\ell}{2}} \rangle$, (v) $H = \langle A, A^{\frac{\ell}{2}} B^{\frac{\ell}{2}} C \rangle$ 。 $\mathbf{C}^2/H$ は H がそれぞれ (i), (ii), (iii), (v) のとき、 $A_{2\ell}$, $D_{\frac{\ell}{2}}$, $D_{\frac{\ell}{2}}$, D_ℓ 型の有理二重点である。 H が (iv) のときは $\ell \geq 4$ ならば有理二重点ではない巡回商特異点である。 G/H がアーベル群でない G の正規部分群 H はすべて $\langle A, B \rangle$ の部分群であって、条件

$$A^a B^b \in H \Rightarrow A^{-a} B^b \in H$$

を満たす。さらに H は $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ に固定点を持たないとき、巡回群になる。

(II) $(r_1, r_2, r_3) = (2, 3, 3)$ のとき、 $Gal(\tilde{W}/Y_0)$ は

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \rho^{10} & \rho^4 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

で生成される $GL(2, \mathbf{C})$ の部分群 G に同型である。ただし、 ρ は 1 の原始 12 乗根である。このとき、 G の交換子群は $F = \langle B^2 C, BC^2 \rangle$ であり、 $\tilde{Y} \simeq \mathbf{C}^2/F$ は D_2 型の有理二重点である。これ以外の G の正規部分群で $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ に固定点を持たないものは $\langle A \rangle$, $\langle A^2 \rangle$, $\langle A^3 \rangle$, $\langle A^4 \rangle$, $\langle A^6 \rangle$, $\langle B, C \rangle$, $\langle A^2, B^2 C, BC^2 \rangle$ だけである。 $\mathbf{C}^2 / \langle B, C \rangle$ は E_6 型の有理二重点である。

(III) $(r_1, r_2, r_3) = (2, 3, 4)$ のとき、 $Gal(\tilde{W}/Y_0)$ は

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \rho^3 & 0 \\ 0 & \rho^{-3} \end{pmatrix}, C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \rho^6 \\ \rho^6 & 1 \end{pmatrix}$$

で生成される $GL(2, \mathbf{C})$ の部分群 G に同型である。ただし、 ρ は 1 の原始 24 乗根である。このとき、 G の交換子群は $F = \langle B^2, C^2, BC \rangle$ であり、 $\tilde{Y} \simeq \mathbf{C}^2/F$ は E_6 型の有理二重点である。これ以外の G の正規部分群で $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ に固定点を持たないものは $\langle A \rangle, \langle A^2 \rangle, \langle A^3 \rangle, \langle A^4 \rangle, \langle A^6 \rangle, \langle A^8 \rangle, \langle A^{12} \rangle, \langle B, C \rangle, \langle B^2, C^2 \rangle, \langle A^4, B^2, C^2 \rangle$ だけである。 $\mathbf{C}^2/\langle B, C \rangle, \mathbf{C}^2/\langle B^2, C^2 \rangle$ はそれぞれ E_7, D_2 型の有理二重点である。

例 6 $n = 2, D = \ell\{z_1 = 0\} + 2\{z_2^2 - 4z_1^a = 0\}$ (a は正整数) としたとき、 $Gal(\tilde{W}/Y_0)$ は

$$A = \begin{pmatrix} \rho^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される $GL(2, \mathbf{C})$ の部分群 G に同型である。ただし、 ρ は 1 の原始 $a\ell$ 乗根である。このとき、 G の交換子群は a が奇数 (偶数) ならば $\langle B \rangle$ ($\langle B^2 \rangle$) である。 H を G の正規部分群で $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ に固定点を持たないものとする。 $H \subset \langle A, B \rangle$ ならば、 H は巡回群である。 ℓ が奇数のときは、 $H \subset \langle A, B \rangle$ である。 ℓ が偶数で $H \not\subset \langle A, B \rangle$ のときは、 a が奇数 (偶数) ならば $H = \langle B, A^{\frac{\ell}{2}}C \rangle$ ($H = \langle B^2, A^{\frac{\ell}{2}}C \rangle, \langle B^2, A^{\frac{\ell}{2}}BC \rangle$ または $\langle B, A^{\frac{\ell}{2}}C \rangle$) である。このとき、 $\mathbf{C}^2/H$ は $D_{\frac{a\ell}{2}}$ 型または $D_{\frac{a\ell}{4}}$ 型の有理二重点である。

例 7 $D = 2\{z_1^2 z_2^2 - 4(z_1^3 + z_2^7) = 0\}$ としたとき、 $B_{\pi_j} = D$ となるガロア被覆 $\pi_j: X_j \rightarrow Y$ で X_j が自己交点数 -3 の有理曲線 j 個の輪を一点につぶして得られるカスプ特異点となるものがある (詳しくは [2] 参照)。従って、このとき $GC(Y, D)$ は無限集合であり、 $\tilde{W} \rightarrow \tilde{Y}_0$ は無限被覆である。

3 quasi-Gorenstein 性について

$\mu: \tilde{Y} \rightarrow Y$ を 2 節で構成したアーベル被覆とし、

$$\sigma_j: \tilde{Y} \ni (w_1, \dots, w_s, y) \rightarrow (w_1, \dots, w_{j-1}, \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{r_j}\right) w_j, w_{j+1}, \dots, w_s, y)$$

とすれば、 $Gal(\tilde{Y}/Y)$ は $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ で生成される。一方、

$$\phi = \frac{\mu^*(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n)}{w_1^{r_1-1} \dots w_s^{r_s-1}}$$

は $\tilde{Y} \setminus Sing(\tilde{Y})$ 上至る所 0 にならない正則 n 形式であり、 $\sigma_j^* \phi = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{r_j}\right) \phi$ である。従って、 $\chi: Gal(\tilde{W}/Y_0) \rightarrow \mathbf{Z}_r$ を $Gal(\tilde{W}/Y_0) \rightarrow Gal(\tilde{Y}_0/Y_0)$ と σ_j を

$\frac{r}{r_j}$ に移す写像 $Gal(\widetilde{Y}_0/Y_0) \rightarrow \mathbf{Z}_r$ の合成写像とすれば、次の命題が成り立つことがわかる。

命題 6 $[\pi : X \rightarrow Y] \in GC(Y, D)$ に対して $Gal(\widetilde{W}/X_0)$ が $\ker(\chi)$ に含まれれば、 X は quasi-Gorenstein である。

4 (X, x_0) がトーリック特異点となる例

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & & & \mathbf{0} \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & B_s \\ C_1 & C_2 & \dots & C_s \end{pmatrix}$$

を次の条件 (C1), (C2) を満たす $n \times m$ 行列とする ($n > m$)。

(C1) B_j は次の正方行列のいずれか。

$$\begin{aligned} M_A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & 1 & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ M_{B'} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & 1 & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ M_E &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ M_G &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ただし M_E は 6 次, 7 次, または 8 次正方行列である。

(C2) C_j は B_j が n_j 次正方行列のとき $(n-m) \times n_j$ 行列であり、非負行列 (すべての成分が 0 以上) であって零行列ではない。

α_i を I_n の i 列を A の i 列で置き換えて得られる行列とし、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ で生成される $GL(n, \mathbf{Z})$ の部分群を $G(A)$ とし、 $C(A) = \bigcup_{g \in G(A)} g\mathbf{R}_{\geq 0}^n$ とする。このとき、 $C(A)$ は凸錐となり、トーリック特異点 $X = \text{Spec} \mathbf{C}[C(A) \cap \mathbf{Z}^n]$ には $G(A)$ が自然に作用し、 $Y = X/G(A) = \text{Spec} \mathbf{C}[C(A) \cap \mathbf{Z}^n]^{G(A)}$ は非特異となる (詳しくは [1] を見よ)。 $\pi: X \rightarrow Y$ を商写像とし、 $X_0 = \pi^{-1}(Y \setminus \text{Sing}(B_\pi))$ とする。このとき、 $(B_\pi)_{\text{red}}$ は

$$\left(\sum_{g \in H} z^{gv_0} - \sum_{g \in G(A) \setminus H} z^{gv_0} \right)^2 = 0$$

で定義され、分岐指数 r_j はすべて 2 である。ただし、 $H = G(A) \cap SL(n, \mathbf{Z})$, $v_0 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_m$ である。

一方、 $\mu: \tilde{Y} \rightarrow Y$ を $D = B_\pi$ としたときの 2 節のアーベル被覆とし、 $\tilde{W}$ を $\mu^{-1}(Y \setminus \text{Sing}(B_\pi))$ の普遍被覆空間とすれば、定理 5 により $\tilde{W}$ は X_0 の普遍被覆空間でもある。また、 $X_1 = X \setminus \text{Sing}(X)$ とすれば、 $X_1 \supset X_0$ であり、 $\pi^{-1}(\text{Sing}(B_\pi)) \cap X_1 \setminus X_0$ の余次元は 2 以上であるから、 $\pi_1(X_1) = \pi_1(X_0)$ である。次に、 $C(A)$ の双対錐 $C(A)^* = \{u \in (\mathbf{R}^n)^* | \langle v, u \rangle \geq 0 \text{ for all } v \in C(A)\}$ の一次元面を張る原始元で生成される $(\mathbf{Z}^n)^*$ の部分加群を N とし、 $\tilde{X} = \text{Spec} \mathbf{C}[C(A) \cap N^*]$ とする。このとき、 $\tilde{X} \setminus \text{Sing}(\tilde{X})$ は単連結であり、商写像 $\nu: \tilde{X} \rightarrow X$ は $(\mathbf{C}^\times)^n$ および余次元 1 の軌道 $\text{orb}(\sigma)$ (σ は $C(A)^*$ の 1 次元面) で分岐しない。従って、 $\nu^{-1}(X_1)$ は X_1 の普遍被覆であり、 $\text{Gal}(\tilde{W}/Y_0)$ は $(\mathbf{Z}^n)^*/N$ と $G(A)^*$ との半直積に同形である。

ある正整数 ℓ があって、 $1 \leq i \leq \ell < j \leq m$ ならば $a_{ij} (= A \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) = a_{ji} = 0$ 即ち、 $\alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i$ であると仮定し、 G_1 (G_2) を $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ ($\alpha_{\ell+1}, \dots, \alpha_m$) で生成される $G(A)$ の部分群とすると $G(A) = G_1 \oplus G_2$ である。また、 $C_k = \bigcup_{g \in G_k} g\mathbf{R}_{\geq 0}^n$ とし、その双対錐 C_k^* の一次元面を張る原始元達で生成される $(\mathbf{Z}^n)^*$ の部分加群を N_k とすれば、 $\text{Gal}(\tilde{W}/Y_0)$ は $(\mathbf{Z}^n)^*/N_1$ と G_1^* の半直積と $(\mathbf{Z}^n)^*/N_2$ と G_2^* の半直積の直和に同形である。従って、 $s=1$ の場合に $\text{Gal}(\tilde{W}/Y_0)$ が計算できれば、一般の場合もわかる。簡単な計算により、次の定理が得られる。

定理 7 $s=1$ のとき、 N は $d_1 \mathbf{e}_1^*, \dots, d_m \mathbf{e}_m^*, \mathbf{e}_{m+1}^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$ で生成される。従って、

$$(\mathbf{Z}^n)^*/N \simeq \mathbf{Z}_{d_1} \oplus \mathbf{Z}_{d_2} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}_{d_m}$$

である。ただし、 B_1 が M_A, M_D または M_E のとき、

$$d_1 = \dots = d_m = g.c.d.\{a_{ij} | 1 \leq j \leq m < i \leq n\},$$

B_1 が M_B のとき、

$$\begin{aligned} d_1 = \cdots = d_{m-1} &= g.c.d.\{a_{ij} | 1 \leq j \leq m < i \leq n\}, \\ d_m &= g.c.d.\{2a_{ij}, a_{im} | 1 \leq j < m < i \leq n\}, \end{aligned}$$

B_1 が $M_{B'}$ のとき、

$$\begin{aligned} d_1 = \cdots = d_{m-1} &= g.c.d.\{a_{ij}, 2a_{im} | 1 \leq j < m < i \leq n\}, \\ d_m &= g.c.d.\{a_{ij} | 1 \leq j \leq m < i \leq n\}, \end{aligned}$$

B_1 が M_F のとき、

$$\begin{aligned} d_1 = d_2 &= g.c.d.\{a_{ij}, 2a_{ik} | 1 \leq j \leq 2 < k \leq 4 < i \leq n\}, \\ d_3 = d_4 &= g.c.d.\{a_{ij} | 1 \leq j \leq 4 < i \leq n\}, \end{aligned}$$

B_1 が M_G のとき、

$$d_1 = g.c.d.\{a_{i1}, 3a_{i2} | 3 \leq i \leq n\}, \quad d_2 = g.c.d.\{a_{ij} | 1 \leq j \leq 2 < i \leq n\}$$

である。また、 $Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ の交換子群による商群は B_1 が M_A , M_D または M_E のときは $\mathbf{Z}_2$, B_1 が $M_{B'}$, M_F または M_G のときは $\mathbf{Z}_2^{\oplus 2}$, B_1 が M_B のときは d_m が偶数 (奇数) ならば $\mathbf{Z}_2^{\oplus 3}$ ($\mathbf{Z}_2^{\oplus 2}$) に同型である。

例 8 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & -1 \\ b & c \end{pmatrix}$ ($a = 1, 2$ または 3 , b と c は 0 以上の整数) とする。

$Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ の位数は $a = 1, 2, 3$ のとき、それぞれ $6d_1d_2$, $8d_1d_2$, $12d_1d_2$ である。ただし、 $d_1 = g.c.d.(b, ac)$, $d_2 = g.c.d.(b, c)$ である。一方、 $(B_\pi)_{red}$ の定義式は $a = 1, 2, 3$ のときそれぞれ

$$z_1^2 z_2^2 - 4z_1^3 z_3^c - 4z_2^3 z_3^b + 18z_1 z_2 z_3^{b+c} - 27z_3^{2b+2c},$$

$$(z_1^2 - 4z_2 z_3^c) \left((z_2 + z_3^{b+c})^2 - 4z_1^2 z_3^b \right),$$

$$(z_1^2 - 4z_2^3 z_3^b + 12z_1 z_2 z_3^{b+c} + 24z_1 z_3^{2b+3c} + 36z_2 z_3^{3b+4c} + 36z_3^{4b+6c}) (z_2^2 - 4z_1 z_3^c - 12z_3^{2b+4c})$$

である。従って、 B_π の既約成分の個数は $a = 1$, $a = 2$ かつ b が奇数, $a = 2$ かつ b が偶数, $a = 3$ のとき、それぞれ $1, 2, 3, 2$ であるが、実際 $Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ の交換子群による商群はそれぞれ $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_2^{\oplus 2}$, $\mathbf{Z}_2^{\oplus 3}$, $\mathbf{Z}_2^{\oplus 2}$ に同型である。

参考文献

- [1] H. Tsuchihashi, Toric singularities which are Galois coverings of non-singular points, preprint

- [2] H. Tsuchihashi, Cusp singularities which are Galois coverings of non-singular points, preprint
- [3] K. Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities I, Math. Ann., 250 (1980), 65-94

注 1 と 2 の文献は、そのままの形で雑誌に投稿せず、この記録の内容と一緒にして一つの論文しようかと考えています。連絡して頂ければ、1 と 2 の preprint はお送りします。