

CG アニメーションによる孤立波の Mach 反射

岐阜大工 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)

岐阜大工 松田博文 (MATSUDA Hirofumi)

1. 前書き

有限で一様な水深を持つ水の表面においては、無限に長い直線状の波峰を有し、それと垂直方向に一定速度で定常的に伝播するような孤立波解が可能である。[†] 波高が小さい場合、これはよく知られた K-dV 方程式の 1-ソリトン解を横方向に一様に延長したものに对应している。現実的には沖合いから押し寄せる津波のように、その波長、波峰長さともに、水深に比べて非常に長いような波のモデルとなっている。このような孤立波が、不透過性の鉛直壁（たとえば防波堤）に斜めに入射する際に、時として「Mach 反射」と呼ばれる異常な反射形態が生じることが知られている。本研究においては全非線形な水面波動方程式の数値シミュレーションによりその現象を再現し、その結果を CG（コンピュータグラフィックス）によってアニメーション化した。

実際の発表においてはそのアニメーションビデオを紹介することが主眼であったが、講究録においてそれを再現することは不可能であるので、ここでは「Mach 反射」という特異な現象を簡潔に紹介するにとどめる事とする。

2. 弱非線形長波方程式 (Boussinesq 方程式)

水は非粘性、非圧縮性、またその運動は渦なし（ポテンシャル流れ）であるとする時、水の運動を支配する方程式および底、自由表面での境界条件は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\beta \nabla^2 \phi + \phi_{zz} &= 0 \quad (0 < z < 1 + \alpha \eta), \\ \phi_z &= 0 \quad (z = 0), \\ \eta_t + \alpha \nabla \phi \cdot \nabla \eta - \frac{1}{\beta} \phi_z &= 0, \quad (z = 1 + \alpha \eta) \\ \phi_t + \frac{\alpha}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{\alpha}{2\beta} \phi_z^2 + \eta &= 0, \quad (z = 1 + \alpha \eta)\end{aligned}$$

ここで速度ポテンシャル $\phi(x, y, z, t)$ や水面変位 $\eta(x, y, t)$ は代表的な波高 a 、波長 l および水深 h を用いて無次元化されている。また ∇ は 2 次元のグラディエントオペレータ

[†] もちろん孤立しているのは伝播方向についてのみであり、波峰方向には無限に続いているのであるが、ここではこう呼んでも誤解の恐れはないであろう。

$(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ であり、 α, β はそれぞれ $\alpha = a/h, \beta = (h/l)^2$ と定義されている。 x, y は水平方向の直交座標、 z は鉛直上向きの座標を表す。

以下では弱い非線形性と弱い分散性がバランスするような弱非線形長波を考えることとし、 $O(\alpha) \sim O(\beta) \ll 1$ と仮定する。この仮定のもとでは、底 ($z = 0$) での速度ポテンシャル $f(x, y, t)$ は Boussinesq 方程式

$$f_{tt} - \nabla^2 f = -\alpha \left\{ \frac{1}{2} f_t^2 + (\nabla f)^2 \right\}_t + \frac{\beta}{3} f_{ttt} + O(\alpha^2)$$

に従い、また η は f から

$$\eta = -f_t - \frac{1}{2} \alpha (\nabla f)^2 + \frac{1}{2} \beta f_{ttt} + O(\alpha^2)$$

によって与えられる (例えば Whitham 1974, §13.11)。

3. 2つの孤立波の弱い相互作用 (Miles 1977a)

伝播方向が異なり互いに交差する2つの孤立波を考える。各々の孤立波は最低次では K-dV 方程式にしたがって独立に伝播し、その間の相互作用は高次の効果と仮定する。これは底での速度ポテンシャル f を

$$f(\xi_1, \xi_2, \tau) = F_1(\xi_1, \tau) + F_2(\xi_2, \tau) + \alpha F_{12}(\xi_1, \xi_2, \tau)$$

のように仮定することに対応する。ここで第1、第2の孤立波の伝播方向が x 軸となす角をそれぞれ ψ_1, ψ_2 とすると、

$$\xi_i = \vec{n}_i \cdot \vec{x} - t, \quad \vec{n}_i = \{\cos \psi_i, \sin \psi_i\}, \quad \tau = \alpha t$$

であり、また F_i ($i = 1, 2$) はそれぞれ K-dV 方程式

$$2\alpha F_\tau + 3\alpha F F_\xi + \frac{1}{3} \beta F_{\xi\xi\xi} = O(\alpha^2).$$

を満足する。特に F_i ($i = 1, 2$) が K-dV 方程式の孤立波解の場合、 f に対応する水面変位 η は

$$\eta = N_1(\xi_1 + \chi_2) + N_2(\xi_2 + \chi_1) + \alpha I(\kappa) N_1 N_2 + O(\alpha^2)$$

で与えられる。ここで N_1, N_2 は相手の存在のために $O(\alpha)$ の位相のずれ χ_2, χ_1 を生じた孤立波解の水面波形、また I は「相互作用パラメタ (interaction parameter)」、 κ は「斜め度 (obliquity)」と呼ばれる量でそれぞれ

$$I(\kappa) = \frac{3}{2} \kappa^{-1} - 3 + 2\kappa, \quad \kappa = \frac{1}{2} (1 - \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = \sin^2 \frac{\psi_1 - \psi_2}{2}$$

と定義される。

上の解で、特に $N_1 = N_2$, $\psi_2 = -\psi_1 = \psi$ (この時 $\kappa = \sin^2 \psi$) とすると、対称性から x -軸上で不透過条件を満足し、したがって孤立波が入射角 ψ で x 軸に沿った固体壁に斜めに入射する場合の解を与える。この解によると (有次元な) 壁での波高 (runup) は、入射波高が a の時 $2a + I(\kappa)a^2/h$ で与えられる。

相互作用パラメタ $I(\kappa)$ の表現には κ のマイナス 1 乗が入っており、 $\kappa = O(\alpha) \ll 1$ 程度に 2 つの孤立波の伝搬方向が近づいてくると $\alpha I(\kappa) \sim O(1)$ となり、相互作用は高次効果であると仮定する上記のような取り扱いには破綻することに注意する。

4. 2 つの孤立波の強い相互作用 (Miles 1977a,b)

$\kappa = O(\alpha) \ll 1$ の場合、2 つの孤立波の伝搬方向はほぼ等しいので、その方向に x 軸、それと垂直方向に y 軸を取るものとする。この時 $\kappa = O(\alpha)$ は、 y 軸方向の変化が x 軸方向の変化に比べて $O(\sqrt{\alpha})$ だけ小さい、すなわち $\partial/\partial y \sim \sqrt{\alpha} \times \partial/\partial x$ を意味している。これは K-dV 方程式に弱い横方向の変化を取り込むために導出された Kadomtsev-Petviashvili 方程式 (K-P 方程式: Kadomtsev & Petviashvili 1970) におけるスケーリングと一致しており、したがってこのような状況における 2 つの孤立波の相互作用は K-P 方程式 (有次元)

$$\left[\eta_t + \sqrt{gh} \eta_x + \frac{3}{2} \frac{\sqrt{gh}}{h} \eta \eta_x + \frac{\sqrt{gh}}{6} h^2 \eta_{xxx} \right]_x + \frac{\sqrt{gh}}{2} \eta_{yy} = 0$$

によって記述できると考えられる。K-P 方程式は K-dV 方程式同様のいわゆるソリトン方程式であり、例えば広田の方法などによってその N-ソリトン解を知ることができる (Satsuma 1976)。

今 K-P 方程式で $g = h = 1$ と規格化し、 $\eta = 4(\ln w)_{xx}/3$ とおくと、 w に対する双一次形式

$$\left[D_x \left(D_t + D_x + \frac{1}{6} D_x^3 \right) + \frac{1}{2} D_y^2 \right] w \cdot w = 0$$

を得る。ここで D_x, D_t などは広田によって導入された演算子である。[†] 1-ソリトン解に対応する w は

$$w = 1 + \exp(2\theta), \quad \theta = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = kx + ly - \omega t$$

となる。ただし k, l, ω は「K-P ソリトンの分散関係」

$$D(\vec{k}, \omega) = -4k \left(\omega - k - \frac{2}{3} k^3 - \frac{l^2}{2k} \right) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \omega = k \left(1 + \frac{2}{3} k^2 + \frac{l^2}{2k^2} \right)$$

[†] D 演算子の定義、様々な性質については例えば Hirota & Satsuma (1976) を参照。

を満たすものとする。この解に対する実際の水面変位 η は

$$\eta = \frac{4}{3} (\ln f)_{xx} = \frac{4k^2}{3} \operatorname{sech}^2 \theta$$

となり、波高 a は x -軸方向の「波数」 k により $a = 4k^2/3$ と与えられる。

一方2つの孤立波の斜め相互作用を表現する2-ソリトン解は

$$\begin{aligned} w &= 1 + \exp(2\theta_1) + \exp(2\theta_2) + A \exp(2\theta_1) \exp(2\theta_2), \\ \theta_i &= \vec{k}_i \cdot \vec{x} - \omega_i t, \quad D(\vec{k}_i, \omega_i) = 0, \\ A &= -\frac{D(\vec{k}_1 - \vec{k}_2, \omega_1 - \omega_2)}{D(\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \omega_1 + \omega_2)} = -\frac{4(k_1 - k_2)^2 - (\tan \psi_1 - \tan \psi_2)^2}{4(k_1 + k_2)^2 - (\tan \psi_1 - \tan \psi_2)^2} \end{aligned}$$

で与えられる ($\psi_i = l_i/k_i$; $i = 1, 2$)。この解によると

$$2|k_1 - k_2| < |\tan \psi_1 - \tan \psi_2| < 2|k_1 + k_2|$$

の時 A は負になる。これは f が0や負になる、すなわち η が発散してしまう点のあることを意味し、物理的に許されない解となる。前節と同様に $k_1 = k_2 = k$, $\psi_2 = -\psi_1 = \psi$ とおいて、上の結果を固体壁での反射の問題に適用すると、 $|\tan \psi| < 2|k|$ 、すなわち $|\tan \psi| < \sqrt{3a}$ の場合には、「反射角=入射角」「反射波高=入射波高」が成り立つ通常の反射形態は実現不可能であることになる。

K-P 方程式の2-ソリトン解が表現する水面のパターンを実際に描いてみると、 $0 < A < \infty$ の場合には予想されるように、波数 $\vec{k}_1, \vec{k}_2$ の2つの孤立波が交差するX-字型のパターンが見られるが、 $A = 0$, $A = \infty$ においてはかわりにY-字型パターンが出現する。 $A = 0$, $A = \infty$ はそれぞれ $D(\vec{k}_1 - \vec{k}_2, \omega_1 - \omega_2) = 0$, $D(\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \omega_1 + \omega_2) = 0$ に対応しており、この場合には孤立波 $(\vec{k}_1, \omega_1)$ と孤立波 $(\vec{k}_2, \omega_2)$ との「共鳴」により第3の孤立波 $(\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2, \omega_1 \pm \omega_2)$ が生み出されたと考えることができる。線形な（すなわち無限小振幅の）水面重力波に対しては、3波共鳴条件を満たすような3波の組は存在しないことがよく知られているが、それにもかかわらずソリトンという非線形な波動モード間の相互作用に対しては、3波共鳴現象が存在しうるのは非常に興味深い。なおこのソリトン共鳴の可能性はK-P方程式の η_{yy} 項の前の符号に依存している。

5. Miles の描いた Mach 反射のシナリオ

Wiegel (1964) その他の実験的研究により、孤立波の鉛直壁への斜め入射に関しては以下のような事実が知られていた。

- 十分小さな入射角に対しては「反射角＝入射角」「反射波高＝入射波高」が成り立つ通常の反射のかわりに、気体力学における衝撃波の Mach 反射に似た Y 字型の形状を持つ反射が実現する。
- 入射波と反射波の交点は一定の速度で壁から遠ざかり、壁との間には壁に垂直な波峰を持つ第 3 の孤立波 (Mach stem) が出現する。
- 反射波の波高は入射角の減少に伴い、0 まで減少する。

Miles はこれらの既知の実験事実と、K-P 方程式の 2-ソリトン解に見られるソリトン共鳴及びそれが生み出す Y 字型パターンを関連づけ、以下のように推論した。すなわち、我々がコントロールできるのは入射波、すなわちその波高 a_I 及び入射角 ψ_I だけである。入射角 ψ_I が臨界値 $\sqrt{3a_I}$ 以下の場合には、もはや通常の反射形態は不可能であり、その領域では常に入射孤立波との間でソリトン共鳴条件が満たされるように、反射波及び第 3 の孤立波 (Mach stem) が調節されるのであると。[†]

Miles の理論によると、仮に入射波高 a_I を一定に保ち、入射角 ψ_I をだんだん小さくして行く時、反射形態の変化は次の 3 段階を経ることになる。

1. $\kappa (= \sin^2 \psi) \sim O(1)$: Boussinesq 方程式に基づく「弱い相互作用」の理論が適用可能。 $a_R = a_I$, $\psi_R = \psi_I$ なる通常の反射が実現する (regular non-grazing reflection; weak interaction)。
2. $\kappa \sim O(\alpha)$, but $\psi_I > \sqrt{3a_I}$: K-P 方程式の正則な 2-ソリトン解 ($0 < A < \infty$) が適用可能。 $a_R = a_I$, $\psi_R = \psi_I$ なる通常の反射が実現する (regular grazing reflection; strong non-resonant interaction)。
3. $\kappa \sim O(\alpha)$, and $\psi_I < \sqrt{3a_I}$: K-P 方程式のソリトン共鳴に対応する解 ($A = \infty$) が適用可能。反射波と Mach Stem は入射波との間の共鳴条件から決定される (Mach reflection; strong resonant interaction)。

反射形態を特徴づける様々な量に対する Miles 理論の予測をまとめると以下のようになる。

- $\epsilon \equiv \psi_I / \sqrt{3a_I}$ と定義する時、

$$\begin{cases} \epsilon < 1 & \text{Mach 反射} \\ \epsilon > 1 & \text{通常反射} \end{cases}$$

[†] a_I , ψ_I を与え、さらに $\psi_3 = 0$ (すなわち Mach Stem は壁に垂直) を要求したとき、共鳴条件は反射波高 a_R 、反射角 ψ_R 及び Mach Stem の波高 a_M を一意的に決定する。

- Mach stem の波高 a_M :

$$\frac{a_M}{a_I} = \begin{cases} (1 + \epsilon)^2 & \text{Mach 反射} \\ 4 / [1 + \sqrt{(1 - 1/\epsilon^2)}] & \text{通常反射 (grazing)} \\ 2 + [3 / (2 \sin^2 \psi_I) - 3 + 2 \sin^2 \psi_I] a_I & \text{通常反射 (non-grazing)} \end{cases}$$

- 反射波高 a_R :

$$\frac{a_R}{a_I} = \begin{cases} \epsilon^2 & \text{Mach 反射} \\ 1 & \text{通常反射} \end{cases}$$

- 反射角 ψ_R :

$$\psi_R = \begin{cases} \sqrt{3a_I} & \text{Mach 反射} \\ \psi_I & \text{通常反射} \end{cases}$$

この結果によると Mach 反射においては、反射波高は入射角の減少に伴い 0 にまで減少すること、反射角が入射波の波高のみに依存し、入射角には依らないことなど、さまざまな奇妙なことが起こることになる。そんな中で工学上特に重要と思われるのは、Mach Stem の波高、すなわち鉛直壁における水面の高さが、Mach 反射と通常反射のちょうど境目 ($\epsilon = 1$) においては、入射波高の実に 4 倍にもなるという予測である。これは通常の反射パターンを仮定した線形理論に基づく予測の 2 倍にもなる。さらに、これはあまり意識されておらず、意外と受けとめられる向きも多いのではないと思われるが、斜めではなく壁に向かってまっすぐに入射してくる場合の壁への最大這いあがり η_{max} (maximum runup) は、 $0 \leq a_I \leq 0.5$ の範囲なら a_I の 2.5 倍以下、 $a_I = 0.7$ という巨大な孤立波に対してもやっと 3.3 倍程度にしかない。もし Miles の理論が正しければ、防波堤における越波の危険性は、直角入射よりもむしろ斜め入射の方が大きいのである。

6. 数値シミュレーションとそのアニメーション化

数値シミュレーションにおいても、水は非粘性、非圧縮性、またその運動は渦なしであり、したがって速度場は速度ポテンシャルの勾配で表現されるものと仮定している。このような状況の下で 3 次元的な水の運動を時間的に追跡する数値的手法として、ここでは Dommermuth & Yue (1987) によって開発された「高次スペクトル法」を用いた。また無限にのびた波峰を持つ孤立波を有限な数値領域内で扱うためには、境界条件にも若干の工夫が必要となる。これら数値計算の詳細については、筆者の一人によりすでに論文発表されているので、そちらを参照されたい (Tanaka 1993)。

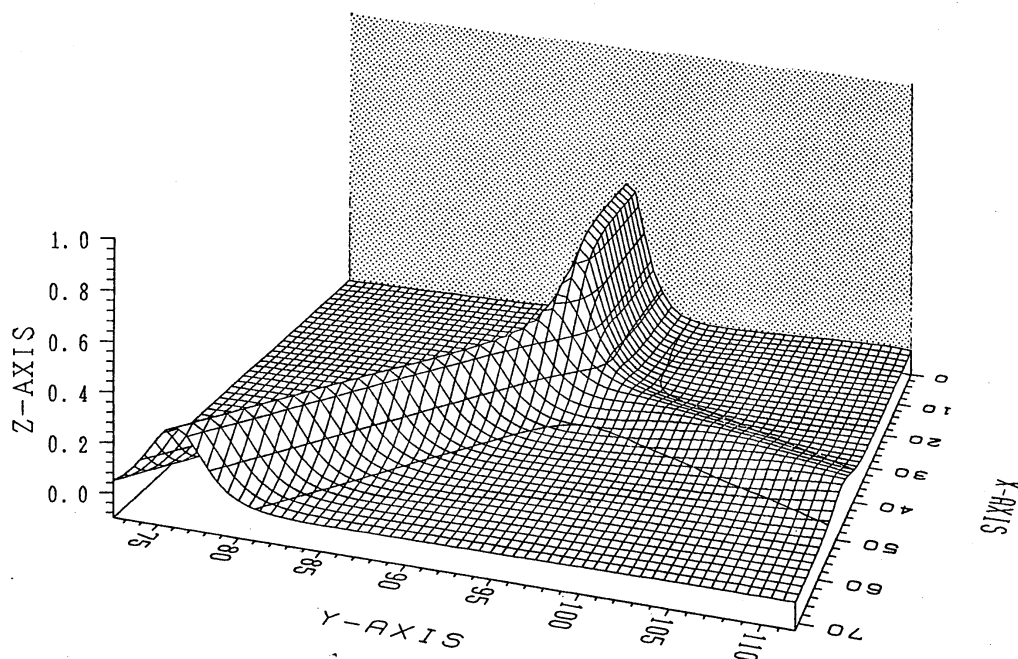


図1：Mach 反射の場合の水面波形 ($a_I = 0.3$, $\psi_I = 20^\circ$, $t = 170$)

入射波高 a_I は 0.3 と固定し、さまざまな入射角 ψ_I について計算を行ったが、今回はその中で通常反射が起こる例として $\psi_I = 60^\circ$ (Case1)、Mach 反射が起こる例として $\psi_I = 20^\circ$ (Case2) の 2 ケースについてアニメーション化を行った。参考のために Case 2 の $t = 170$ における壁近傍での水面波形の鳥瞰図を図 1 に示す。どちらのケースにおいても計算領域には 128×512 の格子点が含まれるが、描画時間を短縮するために、そのうちの特に重要な部分（面積にして約 5 分の 1）のみを切り取ってアニメーション化した。アニメーション化にあたっては、本学地域共同センターの Reality Engine 搭載の Silicon Graphics 社 Iris Crimzon を使用した。当初はメインメモリの制限から、一度にすべての時刻の水面データを読み込むことができず、一画面描くたびに次の時刻の波形データをハードディスクからロードするというやり方をしていたが、これでは描画に時間がかかりすぎ、コマ撮りを覚悟していた。しかし波形データを、数値シミュレーションから得られた浮動小数点データそのままとして扱うのではなく、全時間発展中に現れる水面変位の最大値と最小値の間を 256 等分し、各メッシュ点における水面変動をこの 256 段階のどの段階に入るかによって、0 から 255 までの 1 ビット変数に置き換えるという方法でデータ量の削減を図り、これにより最終時刻までのすべての時刻の波形データを一度にメインメモリに

取り込む事ができるようになり、リアルタイムのアニメーションが可能となった。このような曲折を経ながら最終的に、上記2つの典型的なケースについて、様々な方向から見た水面変動を描画し、約8分間のアニメーションビデオを作成することができた。

数値実験から得られた結果を要約すると以下ようになる。

- Case2 のように入射角の十分小さいケースにおいては、確かに Mach 反射特有の Y 字型パターンが実現する。
- $a_I = 0.3$ の場合、通常反射から Mach 反射への移行は $\psi_I \approx 37.8^\circ$ で起こる。
- $a_I = 0.3$ の場合、いかなる入射角においても Miles 理論が予測するような入射波の壁での4倍増幅は観測されなかった。それでも Mach 反射と通常反射の境目近傍である $\psi_I = 35^\circ$ においては、3.2 倍程度という大きな増幅が観測された。[†]
- 数値的に実現した Mach 反射を Miles 理論の予測と定量的に比較すると常に、反射角は小さめに、反射波高は大きめに、Mach stem は低くて短めにずれていることが分かる。また通常反射から Mach 反射への移行は、入射角が理論的な臨界入射角よりかなり小さくなってからしか起こらない。これらの事実は、「最低次の非線形効果のみを考慮した Miles 理論では考慮されていないより高次の非線形効果は、全般的に Mach 反射を起こりにくくする、またたとえ起こったとしても、そのパターンを通常反射のそれに近づけるように働く傾向がある」と要約することができる。

謝辞

今回のアニメーション化に当たっては、岐阜大学工学部電子情報工学科の小鹿丈夫教授並びにその研究室の方々には懇切丁寧なご指導を頂いたこと、心より感謝いたします。

参考文献

- [1] Whitham, G.B. (1974): *Linear and Nonlinear Waves* John Wiley & Sons, 1974.
- [2] Miles, J.W. (1977a): Obliquely interacting solitary waves. *J. Fluid Mech.* 79, 157–169.
- [3] Miles, J.W. (1977b): Resonantly interacting solitary waves. *J. Fluid Mech.* 79, 171–179.

[†] $a_I = 0.3$ の場合、直角入射における壁への最大這い上がりは入射波高の 2.2 倍に過ぎない。

- [4] Kadomtsev, B.B. and Petviashvili, V.I. (1970): On the stability of solitary waves in weakly dispersing media. *Sov. Phys. Dokl.* 15, 539–541.
- [5] Satsuma, J. (1976): N-soliton solution of the two-dimensional Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Soc. Jpn.* 40, 286–290.
- [6] Hirota, R. & Satsuma, J. (1976): A variety of nonlinear network equations generated from the Bäcklund transformation for the Toda Lattice. *Suppl. Prog. Theor. Phys.* 59, 64–100.
- [7] Wiegel, R.L. (1964): Water wave equivalent of Mach reflection. *Proc. 9th Conf. Coastal Engng.*, ASCE, chap. 6, 82–102.
- [8] Dommermuth, D.G. and Yue, D.K.P. (1987) : A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.* 184, 267–288.
- [9] Tanaka, M. (1993): Mach reflection of a large-amplitude solitary wave. *J. Fluid Mech.* 248, 637–661.