

初等函数による積分表示 と最大過剰決定の差分系 及び漸近展開

東大 教養 青本和彦

§ 1. 存在定理

$A_i(x)$ ($x \in \mathbb{C}^n$) ($1 \leq i \leq n$) を
 $GL(m, \mathbb{C})$ に値をとる $\mathbb{C}^n$ 上の有理行列
函数連とする. 我々は次の問題を考える:
[問題 I] $\mathbb{C}^n$ 上の有理型 $GL(m, \mathbb{C})$ -値
函数 $\Phi(x)$ で

(1, 1) $\Phi(x + e_i) = A_i(x) \Phi(x)$
を満たすものをある標準的な方法で
求めること. 但し $e_i = (0, \dots, 0, \underset{(i\text{番目})}{1}, 0, \dots, 0)$
とする.

まず $A_i(x)$ は辻褄条件

(1, 2) $A_j(x + e_i) A_i(x) = A_i(x + e_j) A_j(x)$
($1 \leq i, j \leq n$) を満たさなくてはならぬ.

$n=1$ の場合 $A_1(x)$ が一般な G である
決まった漸近展開を持つ (1, 1) の解
 $\Phi(x)$ が存在することは G.D. Birkhoff によって

証明されている. 我々はこれを $n \geq 2$ の場合に拡張し その際 起る 問題 実 に 言及する.

まず 存在定理について.

仮定 I $x_1 = \infty$ において 各 $A_i(x)$ を

$$(1.3) \quad A_i(x) = A_i^{(0)}(x')x_1^{\mu_i} + A_i^{(1)}(x')x_1^{\mu_i-1} + \dots$$

($1 \leq i \leq n$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$) とするとき

x' を x'_0 の近傍で

$$i) \det A_i^{(0)}(x') \neq 0 \quad (n \geq i \geq 1)$$

$$ii) A_i^{(0)}(x') \quad (i \geq 2) \text{ は 常数 } (= A_i^{(0)} \text{ とおく})$$

$$iii) A_1^{(0)}(x') \text{ の 固有値 } \rho_1(x'), \dots, \rho_n(x')$$

は 互いに 相異なる とする.

この時

定理 I. 形式級数 $S(x)$

$$(1.4) \quad S(x) = \left(1 + \frac{S^{(1)}(x')}{x_1} + \frac{S^{(2)}(x')}{x_1^2} + \dots \right)$$

($S^{(i)}(x')$ は x' の有理式) が存在して 変換

$$(1.5) \quad \Phi(x) = S(x) \Psi(x)$$

により (1.1) が

$$(1.6) \quad \Phi(x + e_i) = B_i(x) \Phi(x)$$

に移ったとすれば $B_i(x)$ は

$$(1,7) \quad \begin{cases} B_1(x) = x_1^{\mu_1} \left(A_1^{(0)} + \frac{A_1^{(1)}(x)}{x_1} \right) \\ B_i(x) = x_1^{\mu_i} \left(A_i^{(0)} + \frac{B_i^{(1)}(x)}{x_1} + \dots \right) \end{cases}$$

($i \geq 2$)

の形を持つ. ここに $A_1^{(0)} = A_1^{(0)}(x')$ は x' に
依らないことが証明され, 又

$$(1,8) \quad A_1^{(1)}(x') = \sum_{i=2}^n \mu_i x_i A_1^{(0)} + A_1^{(1)}$$

($A_1^{(1)}$ 常数行列) の形に書ける. さらに

$A_1^{(0)}, A_1^{(1)}, A_i^{(0)}, B_i^{(1)}(x'), \dots$ は互いに可換
で同時に対角化される. $A_1, B_i^{(1)}(x'), B_i^{(2)}(x'), \dots$
等はすべて 一意的に定まる.

系. 方程式 (1,4) は 形式解

$$(1,9) \quad \Phi(x) = \left(1 + \frac{S^{(1)}(x')}{x_1} + \frac{S^{(2)}(x')}{x_1^2} + \dots \right) (A_1^{(0)})^{x_1} (A_2^{(0)})^{x_2} \dots (A_n^{(0)})^{x_n} \\ \cdot x_1^{\mu_1 x_1} \cdot x_1^{(A_1^{(0)})^{-1} A_1^{(1)} + \sum_{j=2}^n \mu_j x_j}$$

を持つ. しかも, このような形のものは唯一つ
しかない. 但し $S^{(j)}(x')$ の対角成分はすべて 0 とする.

G.D. Birkhoff によれば" 仮定 I. のもとに
(1,9) を漸近展開 ($x_1 \rightarrow \infty$) とみて持つ
ような 解が" 唯一つ 存在する. 今

$$(1,10) \quad T_d(x) = \left(1 + \frac{S_1^{(d)}(x)}{x_1} + \dots + \frac{S_d^{(d)}(x)}{x_1^d}\right) A_0^{x_1} x_1^{\sum_{j=1}^d M_j x_j + \frac{1}{d} A_1^{(d)}}$$

と置き d を十分大にとれば" 上記の 解は

$$(1,11) \quad \Phi(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} A_1(x) A_1(x-e_1) \dots A_1(x-\nu e_1) T_d(x-\nu e_1)$$

によって得られる. 但し ここで $\Phi(x)$ は $GL(m, \mathbb{C})$ -値
ではなく $GL(m, \mathbb{C})/\mathcal{H}$ -値 ($\mathcal{H}$ は $GL(m, \mathbb{C})$ の

最大 冪等部分群) とする. $GL(m, \mathbb{C})$ -値と
するためには G.D. Birkhoff にならば (1,11) を
修正しなければならない.

注意 1. (1,11) において $\Phi(x)$ を $GL(m, \mathbb{C})/\mathcal{L}$ -値
($\mathcal{L}$ は $\mathcal{H}$ を含むある Borel 部分群) とするときは
 $T_d(x-\nu e_1)$ は 不要. すなわち

$$(1,11)' \quad \Phi(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} A_1(x) A_1(x-e_1) \dots A_1(x-\nu e_1)$$

これはつまり、連分展開を一般化したものである。古典的には $m=2$ だから $GL(2, \mathbb{C})/\mathbb{P}^1$ は $\mathbb{P}^1$ であり $\Phi(x)$ は有理型函数を表わす。

§2. 遷移問題

$\{A_i(x)\}$ は $(1, 2)$ を満たすとき 1つの 'cocycle' すなわち $H^1(\mathbb{Z}^n, GL(m, \mathbb{C}(x)))$ の元を決める。ところで $H^1(\mathbb{Z}^n, GL(m, \mathbb{C}(x)))$ に $GL(n, \mathbb{Z})$ が作用している。今 1つの cocycle $\{A_i(x)\}$ に対して ある元 $\sigma \in GL(n, \mathbb{Z})$ が存在して $\sigma^* \{A_i(x)\}$ が仮定 $(1, 1)$ を満たしているとしよう。このとき

$$(2, 1) \quad y_i = \sigma(x)_i = \sum_{j=1}^n \xi_{ij} x_j \quad (x \in \mathbb{C}^n)$$

とすれば $\sigma(x)_1 = 0$ は $\sum_{j=1}^n \xi_{1j} x_j = 0 \quad (i \geq 2)$ に等しいから $\sigma(x)$ x_1 軸 $\mathbb{L}_1$ は σ^{-1} に

より ある方向を持った直線 $\mathbb{L}_1$ (x_1 軸) へ移される。

故に $(1, 11)$ は $\mathbb{L}_2$ 方向に 漸近展開 $(1, 9)$ を持った $(1, 1)$ の解を標準的な方法で

与えることになる。ところで 2つの方向 L_1 と L_2 に対して 対応する 漸近展開 を (1.9) の形に与えたものを 各々 Φ_{L_1} 及び Φ_{L_2} とする：

$$(2.2) \quad \Phi_{L_1} \sim \left(1 + \frac{S^{(1)}(x')}{x_1} + \frac{S^{(2)}(x')}{x_1^2} + \dots\right) \cdot (A_1^{(0)})^{x_1} \cdots (A_n^{(0)})^{x_n} \\ \cdot x_1^{\mu_1 x_1} x_1^{(A_1^{(0)})^{-1} A_1^{(1)}} + \sum_{j=2}^n \mu_j x_j$$

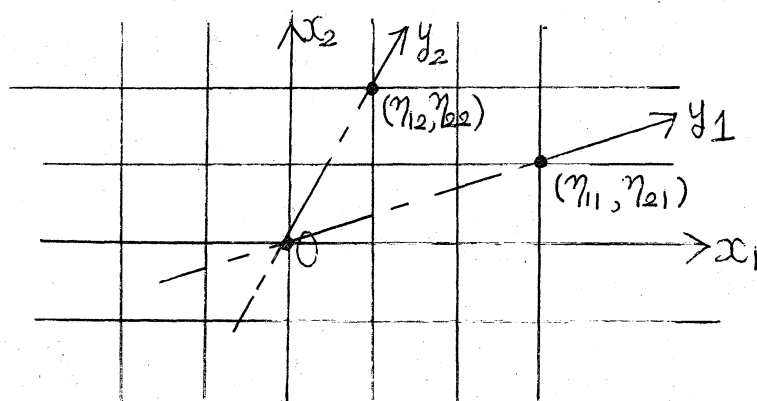
$$(2.3) \quad \Phi_{L_2} \sim \left(1 + \frac{S^*(y')}{y_1} + \frac{S^{(2)*}(y')}{y_1^2} + \dots\right) (A_1^{*(0)})^{y_1} \cdots (A_n^{*(0)})^{y_n} \\ \cdot y_1^{\mu_1^* y_1} y_1^{(A_1^{*(0)})^{-1} A_1^{*(1)}} + \sum_{j=2}^n \mu_j^* y_j$$

(2.1) を 逆に として

$$(2.4) \quad x_i = \sum_{j=1}^n \eta_{ij} y_j$$

とすれば (1.2) を考慮して 次の関係が得られる：
(簡単のために $(\eta_{1i}, \dots, \eta_{ni})$ はすべて正として)

$$(2.5) \quad A_i^*(y) = A_n \left(\sum_{j=1}^{n-1} \eta_{ji} e_j + (\eta_{ji} - 1) e_n + x \right) \cdot \\ \cdots \cdot A_n \left(\sum_{j=1}^{n-1} \eta_{ji} e_j + x \right) \cdot A_{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-2} \eta_{ji} e_j + (\eta_{n-1,i} - 1) e_{n-1} + x \right) \cdot \\ \cdots \cdot A_1 ((\eta_{1i} - 1) e_1 + x) \cdots A_1(x)$$



(1,1) によれば $GL(n, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$ - 値の函数として

$$(2.6) \quad \Phi(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} A_1(x) A_1(x-e_1) \cdots A_1(x-\nu e_1) T_d(x-\nu e_1) =$$

$$= \lim_{\nu \rightarrow \infty} T_d(x) T_d(x-e_1)^{-1} A_1(x-e_1) T_d(x-e_1)^{-1} \cdots T_d(x-\nu e_1)^{-1} A_1(x-\nu e_1) T_d(x-\nu e_1)$$

$$\cdot T_d(x-2e_2)^{-1} \cdots T_d(x-(\nu-1)e_1)^{-1} A_1(x-\nu e_1) T_d(x-\nu e_1)$$

とすると

$$(2.7) \quad T_d(x+e_1)^{-1} A_1(x) T_d(x) = \left(1 + \frac{\Xi_d(x)}{x_1^d}\right)$$

とすると

$$(2.8) \quad \Xi_d(x) = \frac{\Xi_d(x)}{x_1^{d+1}} \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)^{-\sum_{j=1}^n \mu_j x_j} \frac{A_1^{(0)}}{A_1^{(1)}} \cdot x_1$$

$$\cdot U_d(x) (A_1^{(0)})^{x_1} x_1 (A_1^{(0)})^{-1} A_1^{(1)} \quad \text{且つ } U_d(x)$$

は x の有理函数で $x_1 \rightarrow \infty$ のとき 有界

(G. D. Birkhoff [7] *Lezioni Complete I* p250)

すなわち $U_d(x)$ は

$$\begin{aligned}
 (2,9) \quad & (A_1^{(0)} - (1 + \frac{1}{x_1}) \sum_{j=2}^n \mu_j x_j + (A_1^{(0)})^{-1} A_1^{(1)}) = \\
 & = A_1^{(0)} + \frac{A_1^{(0)} \sum_{j=2}^n \mu_j x_j + A_1^{(1)}}{x_1} + \frac{A_1^{(2)}(x_2)}{x_1^2} + \dots + \frac{A_1^{(d)}(x_d)}{x_1^d} + \\
 & + \frac{R_d(x)}{x_1^{d+1}} \quad \text{とおくとき}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2,10) \quad & A(x) T_d(x) = T_d(x_{d+1}, x') \left(A_1^{(0)} + \frac{A_1^{(0)} \sum_{j=2}^n \mu_j x_j + A_1^{(1)}}{x_1} + \right. \\
 & \left. + \frac{A_1^{(2)}(x_2)}{x_1^2} + \dots + \frac{A_1^{(d)}(x_d)}{x_1^d} + \frac{U_d(x)}{x_1^{d+1}} \right)
 \end{aligned}$$

により定義される。無限級数 (2,6) の1列目は

$$(2,11) \quad \begin{cases} d \geq \max_{1 \leq i, j \leq n} \left(\operatorname{Re} \left(\frac{\sigma_j}{\rho_j} - \frac{\sigma_i}{\rho_i} \right) + \varepsilon \right) \quad \text{且つ} \\ \Omega: |U_d(x)| \left| \left(1 + \frac{1}{x_1} \right) - \sum_{j=2}^n \mu_j x_j - (A_1^{(0)})^{-1} A_1^{(1)} \right| < M \end{cases}$$

(M const) の下に一様絶対収束する。

(G. D. Birkhoff [7] p482 Th I) 但しここで

$A_1^{(0)}$ は対角形とし その対角成分

$$(2,9) \quad \begin{cases} A_1^{(0)} = \text{Diag}[l_1, l_2, \dots, l_n] \\ A_1^{(1)} = \text{Diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n] \end{cases}$$

且つ $|l_1| > |l_2| > \dots > |l_n| > 0$ とする. 同じく $GL(n, \mathbb{C})$ -値 さらに $GL(n, \mathbb{C})$ -値としても成立しよう.
さて 関係 (2,4) によつて $y_1 \rightarrow \infty$ としたとき 対応

する x かつ Ω に 属しているならば (2,6), (2,7), (2,8)

から $\Phi_{L_1}(x)$ は

$$(2,10) \quad \Phi_{L_1}(x) \sim \left\{ 1 + \frac{S^{(1)}(x)}{x_1} + \dots + \frac{S^{(d)}(x)}{x_1^d} \right\} \cdot \\ \cdot (A_1^{(0)})^{\sum \eta_{ij} y_j} \dots (A_n^{(0)})^{\sum \eta_{nj} y_j} \cdot \left(\sum_1^n \eta_{ij} y_j \right)^{\sum_1^n \sum_1^n \mu_k \eta_{kj} y_j}$$

・ (有界函数)

である. この中で y_1 により

$$(2,11) \quad \left(\sum_1^n \eta_{ij} y_j \right)^{\sum_1^n \sum_1^n \mu_k \eta_{kj} y_j} \sim y_1^{\sum_1^n \sum_1^n \mu_k \eta_{kj} y_j} \cdot \\ \cdot \left(\eta_{11} + \sum_2^n \eta_{ij} \frac{y_j}{y_1} \right)^{\sum_1^n \sum_1^n \mu_k \eta_{kj} y_j}, \quad (y_1 \rightarrow \infty)$$

である. 一方 (2,6) より $A_i^*(y)$ の y_1 についての
次数 $\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*$ は も L_1, L_2 方向が一般
ならば

$$(2,13) \quad \mu_i^* = \sum_{j=1}^n \mu_j \eta_{ji}$$

故に (2,10) と (2,3) との比較により $\Phi_{L_1} \Phi_{L_2}^{-1}$ は $x \in \Omega$, $\sigma(x) = y$ 且 $|y| \rightarrow \infty$ のとき 高々 exponential の 程度に 増大 する のみである.

$$(2,14) \quad \Phi_{L_1} = P_{L_1 L_2}(x) \Phi_{L_2}$$

と置けば $P_{L_1 L_2}(x)$ は 周期的 で 且つ exponential の 程度の 増大 度 である から $P_{L_1 L_2}(x)$ は $e^{2\pi i \sqrt{A} x_1}, \dots, e^{2\pi i \sqrt{A} x_n}$ の 有理式 である.

定理 II. 遷移行列 $P_{L_1 L_2}(x)$ は x が $|x_1| \rightarrow \infty$ 又は $|y_1| \rightarrow \infty$ のとき Ω に 属し 且つ 両方向が 一般の方向ならば $e^{2\pi i \sqrt{A} x_1}, \dots, e^{2\pi i \sqrt{A} x_n}$ の 有理式 になる.

我々の問題は この $P_{L_1 L_2}(x)$ が どういう 風 に 決定 される か である.

問題 II. $P_{L_1 L_2}(x)$ を 決定 すること.

§ 3. 例

1) $m=1$ の 場合は $H^1(\mathbb{Z}^n, GL(1, \mathbb{C}(x)))$ の 構造 は 佐藤 幹夫 氏 によつて 完全に 決定 されており 又 遷移問題 も Γ 函数の Gauss の 恒等式 から 完全に 解 かれる. すなわち $\Phi(x)$ は

exponential 有理式の因子を除いて 次の形の
ものに限られる:

$$(3.1) \quad \Phi(x) = \prod_{k=1}^l \Gamma\left(\sum_1^n m_j^{(k)} x_j + \alpha^{(k)}\right)$$

ここに $m_j^{(k)} \in \mathbb{Z}$, $\alpha^{(k)} \in \mathbb{C}$. 今 $m_1^{(k)}$ がすべて
正とすれば $\Phi(x)$ は $x_1 = \infty$ の方向に無限乗積
を持つ (すなわち仮定 I がみたされる):

$$(3.2) \quad \Phi(x) = \prod_{k=1}^l \prod_{\nu=1}^{\infty} A_1(x - \nu e_1) \cdots A_1(x - \nu e_l) \cdot \\ \cdot \left(\sum_1^n m_j^{(k)} x_j + \alpha^{(k)} - m_1^{(k)} \nu \right)^{\sum_1^n m_j^{(k)} x_j + \alpha^{(k)} - m_1^{(k)} \nu - \frac{1}{2}} \cdot \\ \cdot e^{-\left(\sum_1^n m_j^{(k)} x_j + \alpha^{(k)} - m_1^{(k)} \nu \right) \sqrt{2\pi}},$$

ここで $A_1(x) = \prod_{\nu=0}^{m_1^{(k)}} \left(\sum_1^n m_j^{(k)} x_j + \alpha^{(k)} + \nu \right)$. これらの
結果は $\Gamma(x)$ の無限積展開を使うのみで得て
くる. 次に $m_1^{(k)}$ のうちに負のものがあるときは
 Γ -函数 についての Gauss の公式

$$(3.3) \quad \Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

を使えば

$$(3.4) \quad \Phi(x) = P(x) \cdot \prod_{k=1}^{l_1} \Gamma\left(\sum_1^n m_j^{(k)} x_j + \alpha^{(k)}\right) \cdot \prod_{k=l_1+1}^l \Gamma\left(1 - \alpha^{(k)} - \sum_1^n m_j^{(k)} x_j\right)^{-1}$$

但し $m_1^{(1)} > 0, \dots, m_1^{(l)} > 0, m_1^{(l+1)} < 0, \dots, m_1^{(n)} < 0$

とする. $P(x)$ は $\sin$ を使って簡単に書ける.

この例では本質的に異なる方向は 2^l 個

存在しそれは $x \in \mathbb{R}^n$ にかざると各 k について

$$(3.5) \quad \sum_{j=1}^n m_j^{(n)} x_j + \alpha^{(n)} > 0 \quad \text{又は} \quad \sum_{j=1}^n m_j^{(n)} x_j + \alpha^{(n)} < 0$$

によって決まる.

例 2. Mellin-佐藤の超幾何函数

例 1. によって定義される函数を $\tilde{\varphi}(s)$ $s \in \mathbb{C}^n$

とするとき この逆 Mellin 変換

$$(3.6) \quad \varphi(x) = \int \tilde{\varphi}(s) x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n} ds_1 \dots ds_n$$

は Mellin-佐藤の超幾何函数と呼ばれる.

$\varphi(x)$ をパラメーター $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(l)}$ の函数とみると

$\mathbb{C}^l$ 上一価有理型である. 今作用素

$$(3.7) \quad X_j \varphi(x; \alpha) = \varphi(x; \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(j)}+1, \dots, \alpha^{(l)}) - \alpha^{(j)} \varphi(x; \alpha)$$

と $(l-n)$ 個の 1 次独立な線型関係

$$(3.8) \quad \sum_{j=1}^l \lambda_j^{(h)} m_{\alpha}^{(j)} = 0 \quad (1 \leq h \leq l-n, 1 \leq k \leq n)$$

を決めておけば 函数 φ は 線型 差分系

$$(3.9) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(k)} X_j \varphi = 0 \quad (1 \leq k \leq l-n), \\ x_1^{-t_1} \cdots x_n^{-t_n} \varphi = \\ = \prod_{j=1}^l (X_j + \alpha_j) \cdots (X_j + \alpha_j + (\sum_{k=1}^n m_{jk}^{(j)} t_k) - 1) \varphi, \end{array} \right.$$

$(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$, を満たす. これは最大過剰決定系である.

問題 III. (3.9) によって決まる 差分系 について 定理 I 及び 系 が 成立するか? 又 その時の 遷移行列は?

例 4. Pochhammer 函数

例 3. の 特別な場合として 次の 積分表示 を 考える:

$$(3.10) \quad \varphi(x; \lambda) = \int (x - \alpha_1)^{\lambda_1} (x - \alpha_2)^{\lambda_2} \cdots (x - \alpha_m)^{\lambda_m} dx.$$

この場合 積分は 超コホモロジー として 考える.

すると

$$(3.11) \quad \varphi_j(x; \lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_m) = \int \frac{\prod_{i=1}^m (x - \alpha_i)^{\lambda_i}}{x - \alpha_j} dx$$

とよくと

$$(3.12) \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n \lambda_j \varphi_j = 0, \\ \left(\varphi_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \dots, \lambda_m), \dots, \varphi_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \dots, \lambda_m) \right) = \end{array} \right.$$

$$= (\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \dots, \varphi_m(\lambda)) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha_i - \alpha_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_i)(\alpha_1 - \alpha_i)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & -\frac{1}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} & & \frac{\lambda_{i-1}}{(1-\lambda_i)(\alpha_{i-1} - \alpha_i)} & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_i - \alpha_1} & \dots & \frac{1}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} & , \frac{-1}{1-\lambda_i} \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{\alpha_j - \alpha_i} & , \frac{1}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} & \dots & \frac{1}{\alpha_i - \alpha_m} \\ 0 & \dots & & \frac{\lambda_{i+1}}{(1-\lambda_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i)} & , -\frac{1}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & \frac{\lambda_m}{(1-\lambda_i)(\alpha_m - \alpha_i)} & 0 & \dots & -\frac{1}{\alpha_i - \alpha_m} \end{pmatrix}$$

$\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m$ を基底にとってみると (3.12) から得られる (1.1) は仮定 I を満たす事が証明出来る。

次に $\varphi(\alpha; \lambda)$ の $\lambda = \infty$ における漸近展開

を Deluge の鞍点法で求めてみる。そのために

$$\lambda_j = n_j t + \lambda_j^{(0)} \quad (n_j \in \mathbb{Z}) \text{ において } t \rightarrow +\infty$$

における漸近展開を求める. α_j はすべて実で
 $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$ とする.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int \prod_1^m (x - \alpha_j)^{\lambda_j} dx = \\ &= \int \prod_1^m (x - \alpha_j)^{\lambda_j^{(0)}} \cdot e^{t f(x)} dx \end{aligned}$$

(3.13) 但し $f(x) = \log \prod_1^m (x - \alpha_j)^{n_j}$;

$\operatorname{Re} f(x)$ の危実点 a は $df(a) = 0$ から求め
 られる. 上下 α_j はすべて実で $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$ とする.

1) かつ $n_j > 0$ の場合

$$(3.14) \quad \frac{df(x)}{dx} = \sum_1^m \frac{n_j}{x - \alpha_j} = 0$$

の根はすべて実でそれを $a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1}$ と
 すれば

$$(3.15) \quad \alpha_1 < a_1 < \alpha_2 < \dots < a_{m-1} < \alpha_m.$$

各区間 $I_i: \alpha_{i-1} < x < \alpha_i$ で $\operatorname{Re} f(x)$ は $x = a_i$
 で最大であり 従って $\operatorname{Im} f(x)$ は 0 である.

故に $t \rightarrow +\infty$ のとき

$$(3.16) \quad \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \prod_1^m (x - \alpha_j)^{\lambda_j} dx \sim \prod_1^m (a_i - \alpha_j)^{\lambda_j} \left\{ \frac{\pi}{\sum_1^m \frac{n_j t}{(a_i - \alpha_j)^2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

但し $Y = \prod_{j=1}^m (x - \alpha_j)^{\lambda_j}$ は $x > \alpha_m$ で実数値で

上半平面から Γ_i に解析接続した分岐
をとるものとする. このサイクル (相対サイクルであるが
 $x \rightarrow +\infty$ のとき Y は $x = \alpha_{i-1}$ 及び α_i で 0 になる
から構わない) を $\mathcal{C}_i$ とおくことにする. 次に

ii) $n_1 > 0, n_2 > 0, \dots, n_r > 0, n_{r+1} < 0,$
 $\dots, n_m < 0$ 且つ $\sum_{j=1}^m n_j > 0$,

$r \geq \left[\frac{m}{2}\right] + 1$ の場合を考える. i) と同じく
簡単のために (3.14) の根 ~~は~~ すべて 実と仮定
する. このとき鞍点 α_i を通る $\text{grad Ref}(x)$ の
カ線に沿って積分路 $\mathcal{C}_i$ をとる. しかも
 $\mathcal{C}_i$ 上では $\text{Ref}(x)$ が α_i で最大値を
とるように $\mathcal{C}_i$ を選ぶ ことが出来る. $\mathcal{C}_i$ 上
では $\text{Im} f(x)$ は一定であるから Delyle の鞍点法
が利用出来る. 今自然数の列 $p_1, p_2, \dots$
 $\dots, p_{m-r}$ を p_j が $\sum_{j=p_j+1}^m n_j < -(j-1)$ を満たす最小のものと

選ぶ. すると

$$(3.17) \quad 1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{m-r} \leq r$$

且つ

サイクルとして

$$(3.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 \sim \sigma_1, \tau_2 \sim \sigma_2, \dots, \tau_{r-1} \sim \sigma_{r-1} \\ \tau_j \sim (e^{-2\pi i \lambda_{j+1}} - 1) \sigma_j + (e^{-2\pi i (\lambda_{j+1} + \lambda_j)} - 1) \sigma_{j-1} + \dots \\ \dots + (e^{-2\pi i (\lambda_{j+1} + \dots + \lambda_{p_{m-j}+1})} - 1) \sigma_{p_{m-j}} \end{array} \right. , \\ (r+1 \leq j \leq m-1)$$

いて 積分

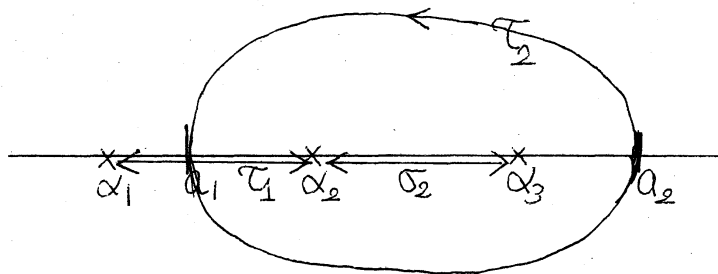
$$(3.19) \quad \varphi_k^*(\lambda) = \int_{\tau_k} \prod (x - \alpha_j)^{\lambda_j} dx$$

の 漸近展開は

$$(3.20) \quad \varphi_k^* \sim \prod_1^m |a_k - \alpha_j|^{\lambda_j} \left\{ \frac{\pi}{t \sum_1^m \frac{n_j}{(a_k - \alpha_j)^2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

($1 \leq k \leq m$) で与えられ 2つの方向 i) と ii) 間の遷移行列 $P_{L_1 L_2}$ は (3.18) で与えられる. このように $P_{L_1 L_2}$ を求めることが 純粹に位相幾何の問題に還元される. 最後に $n_1=2$, $n_2=1$, $n_3=-1$ の場合のサイクル τ_1, τ_2 の大体の図を示す.

$$\frac{df}{dx} = \frac{2}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} - \frac{1}{x-\alpha_3}$$

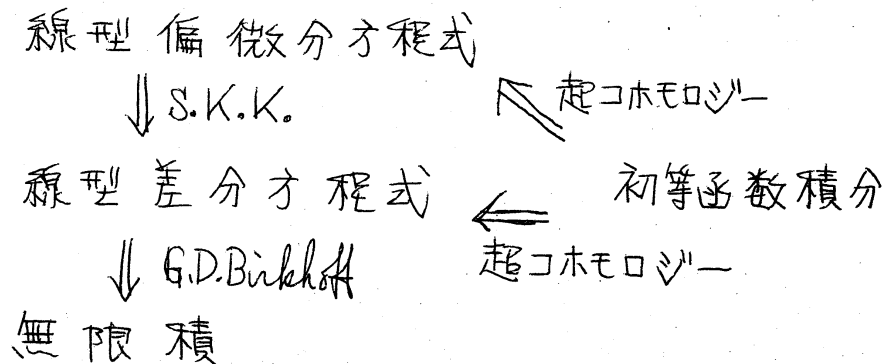


$$(3.21) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \tau_1 \\ \tau_2 = (e^{-2\pi i \lambda_2} - 1) \sigma_2 + (e^{-2\pi i (\lambda_2 + \lambda_1)} - 1) \sigma_1 \end{cases}$$

§4. おしやべり

近年 線型 偏微分方程式 には 佐藤・河合・柏原氏等によつて 著しい 発展がみられ、非可換 module としての代数解析的構造が明らかにされつつある[3][5]等。この S.K.K. 理論の中で 最大過剰決定系 となる場合が多変数函数の立場からは 特に興味深く、上記の考察にもかかわりがある。代数幾何では 最大過剰決定系のことを Gauss-Mannin connection と呼ぶ。そのコホモロジーの研究が P. Deligne, Katz, Griffiths 等によつて行われている。上記の初等積分などはこれらの言葉を使って表わされる。

我々の図式は次のようなものである。



先に佐藤 幹夫氏による $\mathcal{D}$ -函数 のみたる 擬微分
方程式系 や 方程式 $(1,1)$ のかわりに $(\mathbb{C}^*)^n$ 上
で $(1,1)$ の類いの方程式

$$\Phi\left(\sum_{j=1}^m g_{ij}^{(v)} x_j\right) = A_v(x, g) \Phi(x) \quad (1 \leq v \leq n)$$

を考えることにより得られる 函数はどんなものかも
興味深い 題材 と思われる。

文献

- [1] 青本 ; 多価函数積分における松島、村上型
定理 , 数理研報告162, '72.
- [2] — ; 多価函数積分における漸化公式
と連分展開の一般化 , 数理研報告168, '72.
- [3] 柏原 : 微分方程式の局所理論

数学振興会セミナー, '70.

[4] 佐藤 : 概均質空間の特異軌道と
超幾何函数 (東大講義録 '70).

[5] S.K.K. : 擬微分作用素の局所理論
(Springer Lec. Notes, to appear).

[6] P. Deligne : Equations différentielles à Points
Réguliers Singuliers (Springer Lec. Notes, 163)

[7] G.D. Birkhoff : Difference equations
Oeuvres Complètes I ;

[8] Watson : Theory of Bessel functions.

1973年4月5日

訂正お願い

京都大学数理解析研究所講究録 175 「解析的常微分方程式の大域的研究」 論文中の41頁10行目を下記のように訂正したい旨、著者に依頼がありましたので、御訂正をお願いいたします。

京都大学数理解析研究所

$$\Phi\left(\sum_{j=1}^n q_{ij}^{(\nu)} x_j\right) = A_{\nu}(\chi, q) \Phi(\chi) \quad (1 \leq \nu \leq n)$$

$$\longrightarrow \Phi(q_{i1} x_1, \dots, q_{in} x_n) = A_i(\chi, q) \Phi(\chi) \quad (1 \leq i \leq n)$$