

角のある領域における超函数論的境界値問題

東大 教養 金子 晃

筆者が境界値問題に到達したのは実解析解の延長の問題研究の過程で、解の障害集合への延長の不確定性を表現する手段としてであった。定数係数の場合にはこのような表現として Fourier 変換に基づく Fundamental Principle というものがあったが、変数係数の場合には非特性境界に含まれる除外集合に対して、境界値理論を適用するものが今の唯一の既成の手段である。^{*}このような観点からは境界値問題というものをかなり広汎に解釈することができるとし、今後扱うべき問題についてのある種の示唆をも得ることができるとであろう。さて今日の話題である角のある領域における境界値問題はさうはっきりした目的意識から出発したものではなく、実はある虫の良き誤解から始めたことである。これをちゃんと調べておくことは別な角における回折現象などには必要となるであろうが、ここでは問題提起程度の話しかできないことをお許し願いたい。尚角のある領域の問題については classical solution の範囲でいろいろの研究が昔からなされている。これについては [1] に詳しい文献があるのを参照されたい。

^{*} 確定特異点型の特性境界に対しては筆者の出したいくつかの解の延長定理をほぼ平行に導くことができる。田原氏の仕事 [7] を見られたい。

$p(x, D) \in \mathbb{R}^n$ の原点の近傍で定義され T : 実解析係数 m 階線型偏微分作用素とし, 単純実解析超平面 $S_k: S_k(x)=0, k=1, \dots, N$ はいずれも原点を通り, かつ $p(x, D)$ につき非特性的とする.

Ω を原点の近傍とし $\Omega_+ = \Omega \cap \bigcap_{k=1}^N \{S_k(x) > 0\}$ とおく. 又 $T: S(x) = \prod_{k=1}^N S_k(x)$ とおき, 記号節約のため $S = \bigcup_{k=1}^N S_k = \{S(x)=0\}$ とおく.

補題 1 Ω_+ における $p(x, D)u=0$ の

超函数解に対し適当な延長 $[u] \in \Gamma_{\Omega_+}(\Omega, \beta)$

をとれば

$$(1) \quad p(x, D)[u] = \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{m-1} u_{kj}(x') \delta^{(m-1-j)}(S_k(x))$$

の形になる. ここに $u_{kj}(x')$ は $S_k \cap \partial\Omega_+ \cap \Omega$ に含まれる $m-1$ 変数の超函数である.

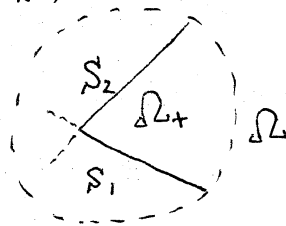
証明 $S_k \cap \partial\Omega_+ \cap \Omega$ に含まれる勝手な延長 v をとり $p(x, D)v$ の台は $\partial\Omega_+ \cap \Omega = S \cap \partial\Omega_+ \cap \Omega$ に含まれる. 超函数の flabby 性を用いてこれに対応した分解 $p(x, D)v = \sum_k w_k, \text{supp } w_k \subset S_k \cap \partial\Omega_+ \cap \Omega$ をとる. 各 S_k は非特性的だから小松-河合の理論により $p(x, D)$ を割り算できて

$$p(x, D)v_k = w_k + \sum_{j=0}^{m-1} u_{kj}(x') \delta^{(m-1-j)}(S_k(x)),$$

$$\text{supp } v_k \subset S_k \cap \partial\Omega_+ \cap \Omega$$

$$\text{supp } u_{kj} \subset S_k \cap \partial\Omega_+ \cap \Omega$$

とできる. 故に $[u] = v - \sum v_k$ という延長をとれば補題



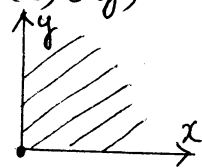
のような表現が得られた。

それではこのような表現の一意性はどうであろうか。小松河合の理論における割り算は局所的に一意であつたから、上で計算された境界値は角あるいは稜以外では一意に定まり、延長 $[u]$ もその辺では一意である。また (1) 式の右辺で与えられる様な超函数には表現のあいまいさはあるものの $\partial\Omega_+ \cap \Omega$ に含まれる超函数としては $[u]$ が決まれば決まってしまう。(後の補題3参照) しかし残念ながら肝心の延長 $[u]$ の角あるいは稜において一意でない。^{*} かなわら稜に包含されるような超函数であつて微分作用素 $p(x, D)$ を施すと (1) の右辺のような法線的に $m-1$ 階の形に書けてしまうものも存在する。これは特性方向の存在云々とは無関係な欠陥であり例えば第一象限の角において

$$(2) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta(x) \delta(y) = \delta''(y) \delta(x) + \delta''(x) \delta(y)$$

などが示す通り実にはありふれた現象である。

(この例は容易に一般化できる。付録の補題A参照)



この事情は境界を超えて distribution として prolongable な distribution 解を考えたも同じである。既に確立された distribution-hyperfunction の諸計算の両立性により、distribution で計算できたものは hyperfunction としての等式とも

^{*} 講演時には角において一意であると述べたがこれは誤解であつた。御指摘下さった相原代也に感謝する。

見なすことができるので場合によっては distribution として計算し T-方が易しいこともあり得る. この場合の結果を一応まとめておこう. 証明は distribution の場合の台の分解定理 ([6]) と割り算定理 ([4]) を用いれば前補題と全く同じである.

補題 2 $S_k: S_k=0$ は原点を通る C^∞ 級単純超曲面とし, 互いに regular な位置にあるとする. さらに $p(x, D)$ は C^∞ -係数線型微分作用素とし各 S_k は準非特性的, すなわち $p(x, D)$ を S_k の法線微分につき降幕順に整理して書いたときその最高階の係数 $\neq 0^*$ とする. Ω, Ω_+ は上と同様とするとき Ω_+ における $p(x, D)u=0$ の distribution 解を distribution として Ω へ prolongable なものに対し, 台が $\overline{\Omega}_+$ に含まれる適当な延長 $[u]$ をとれば

$$(3) \quad p(x, D)[u] = \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{\mu_k-1} u_{kj}(x') \delta^{(\mu_k-1-j)}(S_k(x))$$

の形になる. ここに μ_k は $p(x, D)$ の S_k の法線微分に関する階数である.

再び超函数の場合にもとる. 今度は Ω を二つずつ互いに法線交差する単純解析的超曲面 $S_k: S_k(x)=0$ により囲まれた角のある有界領域とする. 正確に云えば $\Omega = \bigcap \{S_k(x) > 0\}$. このとき $\partial\Omega = S \cap \overline{\Omega}$ となる. 今のところ標準的延長 $[u]$ を定める処法が見当たらないので境界だけに台が含まれるような広義の解も仲間に入れてしまふ. $v \in \mathcal{D}[\overline{\Omega}]$ である.

* 0 は正でない函数

$$S(x)^m p(x, D) v = 0$$

の解であるものをすべて方程式 $p(x, D) u = 0$ の解と同等に扱うことにし, この全体を $\hat{\beta}^p(\Omega)$ と書く. 角が無い場合には標準的延長により $\hat{\beta}^p(\Omega) \cong \beta^p(\Omega)$ となるわけである. これは明に $\beta[\bar{\Omega}]$ の閉部分空間である.

補題 3 $\beta^{(m)}[\partial\Omega] = \{ u \in \beta[\partial\Omega]; u = \sum_k \sum_{j=0}^{m-1} u_{kj}(x') \delta^{(m-1-j)}(S_k(x)) \text{ の形に書けるもの } \}$ とおくと, これは $\beta[\partial\Omega]$ および $\beta[\bar{\Omega}]$ の閉部分空間で, $\text{Ker } S(x)^m$ と一致する.

証明 $S(x)^m$ は $\beta[\partial\Omega] \rightarrow \beta[\partial\Omega]$ あるいは $\beta[\bar{\Omega}] \rightarrow \beta[\bar{\Omega}]$ の連続写像 T から, この kernel は閉である. 上のような表現を持つ元が kernel に入るとは明かに逆に $S(x)^m u = 0$ とすれば, まず $S_1(x) = 0$ の上で $x_1^m u = 0$ の解の構造から

$\prod_{k \geq 2} S_k(x)^m u = \sum_{j=0}^{m-1} u_{1j}(x') \delta^{(m-1-j)}(S_1(x))$ と書ける. $u_{1j}(x')$ を $S_2(x)^m$ で割り算^{*}し T ものを改めて $u_{ij}(x')$ と書けば

$$S_2(x)^m \left\{ \prod_{k \geq 3} S_k(x)^m u - \sum_{j=0}^{m-1} u_{1j}(x') \delta^{(m-1-j)}(S_1(x)) \right\} = 0$$

を得, 以下帰納的にこれを続けてゆけば上のような表現に到達する. 証了.

一般にコンパクトな台を持つ超函数の空間が Frechet になることを用いて $u_\ell \rightarrow u$ in $\beta[L]$ から $v_\ell \rightarrow v$ in $\beta[L]$ を満たす割り算 $x_1^m v_\ell = u_\ell$ の解を見出せることに注意すれば,

^{*} これは法交差の仮定より $S(x_1)^m S(x_2)^m$ が局所的に $x_1^m x_2^m$ と見なせるので可能である.

次のこともわかる。

補題 4 $u_\ell \rightarrow u$ in $\beta^{(m)}[\partial\Omega]$ のとき $u_\ell = \sum_k \sum_{j=0}^{m-1} u_{kj}^{(\ell)}(x') \delta^{(m-1-j)}(S_k(x))$, $u = \sum_k \sum_{j=0}^{m-1} u_{kj}(x') \delta^{(m-1-j)}(S_k(x))$ の表現を適当にとれば $u_{kj}^{(\ell)}(x') \rightarrow u_{kj}(x')$ in $\beta[S_k \cap \partial\Omega]$ とできる。

証明 $u_\ell \rightarrow u$ より $\prod_{k \geq 2} S_k(x)^m u_\ell \rightarrow \prod_{k \geq 2} S_k(x)^m u$. したがって $\sum_{j=0}^{m-1} \prod_{k \geq 2} S_k(x)^m u_{ij}^{(\ell)}(x') \delta^{(m-1-j)}(S_i(x)) \rightarrow \sum_{j=0}^{m-1} \prod_{k \geq 2} S_k(x)^m u_{ij}(x') \delta^{(m-1-j)}(S_i(x))$.
これより $\prod_{k \geq 2} S_k(x)^m u_{ij}^{(\ell)}(x') \rightarrow \prod_{k \geq 2} S_k(x)^m u_{ij}(x')$, $j=0, \dots, m-1$ が従う。($S_i(x)^p$, $p=0, 1, 2, \dots, m-1$ を掛け x_1 につき積分すればよい.)
これから上の注意により $\prod_{k \geq 2} S_k(x)^m = 0$ の上で係数を適当に修正すれば $u_{ij}^{(\ell)}(x') \rightarrow u_{ij}(x')$ $j=0, \dots, m-1$ が云える。この修正は $\prod_{k \geq 2} S_k(x)^m$ の kernel の範囲内での他の項へ繰りこむことかでき、*) 結局

$$\sum_{k \geq 2} \sum_{j=0}^{m-1} u_{kj}^{(\ell)}(x') \delta^{(m-1-j)}(S_k(x)) \rightarrow \sum_{k \geq 2} \sum_{j=0}^{m-1} u_{kj}(x') \delta^{(m-1-j)}(S_k(x))$$

が云える帰納的に持ち込める。証了

上の補題の主張において $\beta[\partial\Omega]$ は $\beta[\bar{\Omega}]$ の閉部分空間ではなく dense に入っていること、また $T: u_\ell, u \in \beta[\partial\Omega]$ が $u_\ell \rightarrow u$ in $\beta[\bar{\Omega}]$ でも $u_\ell \rightarrow u$ in $\beta[\partial\Omega]$ とは限らぬことに注意せよ。(後者の反例は [3] にある。) 同様の補題は distribution に対しても成り立つことは良く知られている。この場合は位相が局所化可能なもので何も不思議なことはいない。

*) すなわち、方程式で割るのではなくとも書き換えたものが再び法線的に $m-1$ 階以下となる

$u \in \hat{\beta}^p(\Omega)$ とすれば定義により $\forall u \stackrel{\text{def}}{=} p(x, D)u \in \beta^{(m)}[\partial\Omega]$ となる. この元 (あるいはその係数) を広義の解 u の境界値と呼ぼう. これで境界値問題の定式化だけはやす. さて

$\sigma_0(\bar{\Omega}) = \{ f \in \sigma(\bar{\Omega}); \partial\Omega \text{ 上の } m \text{ 個の境界値がすべて } 0 \}$ とおこう. これは容易にわかるように $S(x)^m \sigma(\bar{\Omega}) = \sigma_0(\bar{\Omega})$ であり, $\sigma(\bar{\Omega})$ の閉部分空間となる. 同様に $\sigma_0(\partial\Omega) = S(x)^m \sigma(\partial\Omega)$ とおこう.

補題 5 $(\beta^{(m)}[\partial\Omega])' \cong \sigma(\bar{\Omega})/\sigma_0(\bar{\Omega}) \cong \sigma(\partial\Omega)/\sigma_0(\partial\Omega)$

証明

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \beta^{(m)}[\partial\Omega] & \longrightarrow & \beta[\partial\Omega] & \xrightarrow{S(x)^m} & \beta[\partial\Omega] \longrightarrow 0 \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 0 & \longleftarrow & \sigma(\bar{\Omega})/\sigma_0(\bar{\Omega}) & \longleftarrow & \sigma(\partial\Omega) & \xleftarrow{S(x)^m} & \sigma(\partial\Omega) \longleftarrow 0 \end{array}$$

という双対列をおびこの $\partial\Omega$ を $\bar{\Omega}$ に変え T ものから直ちに得られる. (前補題により項 $\beta^{(m)}[\partial\Omega]$ は取り替えなくても良いことに注意せよ.) なお後半の同型は $O/S(x)^m O$ という連接層と Malgrange の定理 (σ -係数コホモロジーの消滅) から直接出る.

命題 6 $p(x, D)$ を m 階楕円型作用素とすると $t_{p(x, D)} \sigma_0(\bar{\Omega}) \subset \sigma(\bar{\Omega})$ は閉部分空間となり, 次の双対性が成り立つ.

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} \hat{\beta}^p(\Omega) & \longleftrightarrow & \sigma(\bar{\Omega})/t_{p(x, D)} \sigma_0(\bar{\Omega}) \\ \gamma \downarrow & & \uparrow t_{\gamma} \\ \beta^{(m)}[\partial\Omega] & \longleftrightarrow & \sigma(\partial\Omega)/\sigma_0(\partial\Omega) \end{array}$$

($\varphi \in \mathcal{O}(\partial\Omega)$ に対し補題5の第2の同型で φ に対応する元 $\psi \in \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ をとると $\tau_p \varphi = \tau_p(\alpha, D)\psi$ である.)

証明 $f \in \hat{\beta}^p(\Omega)$ に対し $\psi = S(\alpha)^m \varphi \in \mathcal{O}_0(\bar{\Omega})$ をとれば

$$\langle f, \tau_p(\alpha, D)\psi \rangle = \langle p(\alpha, D)f, \psi \rangle = \langle S(\alpha)^m p(\alpha, D)f, \varphi \rangle = 0$$

故に $\tau_p(\alpha, D)\mathcal{O}_0(\bar{\Omega}) \subset \hat{\beta}^p(\Omega)^\perp$ かつ $\hat{\beta}^p(\Omega) \subset (\tau_p(\alpha, D)\mathcal{O}_0(\bar{\Omega}))^\perp$ が成り立つ. 最後の式の逆向きの包含関係を示そう.

$f \in \beta[\bar{\Omega}]$ に対し任意の $\psi = S(\alpha)^m \varphi \in \mathcal{O}_0(\bar{\Omega})$ について

$$\langle f, \tau_p(\alpha, D)\psi \rangle = 0 \text{ とすれば上の計算から } \langle S(\alpha)^m p(\alpha, D)f, \varphi \rangle = 0 \text{ となる. } \varphi \in \mathcal{O}(\bar{\Omega}) \text{ は任意だからこれより } S(\alpha)^m p(\alpha, D)f = 0, \text{ すなわち } f \in \hat{\beta}^p(\Omega).$$

$\tau_p(\alpha, D)\mathcal{O}_0(\bar{\Omega})$ が $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ の中で閉じていることを示せばよい.

これは $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ が DFS 空間である点列で調べればよい. $\psi_\ell \in \mathcal{O}_0(\bar{\Omega})$ に対し $\tau_p(\alpha, D)\psi_\ell \rightarrow \varphi$ と $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ において収束し $T=0$ せば, χ_Ω を集合 Ω の定義関数とすれば境界条件より $\tau_p(\alpha, D)(\chi_\Omega \psi_\ell) = \chi_\Omega \tau_p(\alpha, D)\psi_\ell$ であり $\chi_\Omega \varphi$ は例えは $L^2(\Omega)$ で収束する. τ_p は楕円型だから Malgrange の不等式 ([5]) により $\chi_\ell \psi_\ell \rightarrow \exists u \in \mathcal{O}[\bar{\Omega}]$ とする. すなわち

$$\tau_p(\alpha, D)u = \chi_\Omega \varphi$$

を満たす元 $u \in \beta[\bar{\Omega}]$ が見出された. 内部正則性により u は

$$\begin{cases} \tau_p(\alpha, D)\psi = \varphi \\ \left| \left(\frac{\partial}{\partial \nu_k} \right)^j \psi \right|_{S_k} = 0, \quad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

なる境界値問題の解 ($\psi = Y(S_k(x))$ を乗じ $T = 0$ の) と一致して
いる. 境界値 0 のおよび右辺の φ は $S_k = 0$ に沿って $\partial\Omega$ の外
まで少し意味を持つから, この解 u もどこまで実解析的に延
びなければならぬ. すなわち $\psi \in \mathcal{O}_0(\bar{\Omega})$ となる. 証了

境界付近では楕円性の仮定無しに次が成り立つ.

命題 7 $t_p(x, D) \mathcal{O}_0(\partial\Omega) \subset \mathcal{O}(\partial\Omega)$ は閉部分空間となり次
の双対性が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} \hat{\beta}^p(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega] & \longleftrightarrow & \mathcal{O}(\partial\Omega) / t_p(x, D) \mathcal{O}_0(\partial\Omega) \\ \gamma \downarrow & & \gamma \uparrow \\ \beta^{(m)}[\partial\Omega] & \longleftrightarrow & \mathcal{O}(\partial\Omega) / \mathcal{O}_0(\partial\Omega) \end{array}$$

証明 $\varphi_k \in \mathcal{O}(\partial\Omega)$ とし $t_p(x, D)(S(x)^m \varphi_k) \rightarrow \psi$ in $\mathcal{O}(\partial\Omega)$ と
せよ. Cauchy-Kowalevsky の定理による解の連続性により
列 ψ_k は $\mathcal{O}(S_1 \cap \partial\Omega)$ において $\prod_{k \geq 2} S_k(x)^m \varphi_k$ は $t_p(x, D)(S_1(x)^m \chi)$
 $= \psi$ の解 χ に収束する. このことから χ は $\prod_{k \geq 2} S_k(x)^m$ で割り切
れ, φ_k は $\mathcal{O}(S_1 \cap \partial\Omega)$ において $t_p(x, D) S_1(x)^m \varphi = \psi$ (存在す
るとすれば) 一意な解 $\varphi = \chi / \prod_{k \geq 2} S_k(x)^m$ に収束しなければなら
ない. 他の方面についても同様だから $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{O}(\partial\Omega)$ かつ
 $t_p(x, D)(S(x)^m \varphi) = \psi$ となる. 証了

系 8 $p(D)$ を (楕円型に限らず) 定数係数作用素とし Ω
は凸とする. このとき $t_p(D) \mathcal{O}_0(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ は閉となり命
題 6 と同じ双対性が成り立つ.

証明 $\psi_\ell \in \mathcal{O}_0(\Omega)$ に対し ${}^t p(D)\psi_\ell \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ とせよ.
 命題 6 と同様 Malgrange の不等式を用いて $\chi_\Omega \psi_\ell \rightarrow \exists u$
 in $\mathcal{D}'[\bar{\Omega}]$ が結論される. 一方命題 7 より $\psi_\ell \rightarrow \exists \psi$ in $\mathcal{O}_0(\partial\Omega)$
 従って $\partial\Omega$ のある近傍で $\mathcal{D}'$ の意味で $\chi_\Omega \psi_\ell \rightarrow \chi_\Omega \psi$ となる.
 $\mathcal{D}'$ の収束は局所的だから, この近傍で $\chi_\Omega \psi = u$. すなわ
 ち u は $\partial\Omega$ の近傍では $\mathcal{O}_0(\partial\Omega)$ の元として analytic に外へ
 延びるであろうものである. 一方 Ω の内部では $p(D)u = \varphi$. 故
 に定数係数方程式に対する解析性伝播定理より u は内部でも
 実解析的となる. 証了

注意 $\hat{\beta}^p(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega]$ は広義の解のうちで台が $\partial\Omega$ に含ま
 れるものな本當に「まるな」ものの全体である.(角が無いと
 きは Cauchy-Kowalevsky より ${}^t p(x, D)\mathcal{O}_0(\partial\Omega) = \mathcal{O}(\partial\Omega)$, 従
 って $\hat{\beta}^p(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega] = 0$ という訳である. 逆に付録の補題 A に
 より角があれば常に $\hat{\beta}^p(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega] \neq 0$ だから角の付近では
 Cauchy-Kowalevsky が成り立たぬこととなる.) $\hat{\beta}^p(\Omega) \cap$
 $\beta[\partial\Omega]$ は $\hat{\beta}^p(\Omega)$ の中で位相的に閉じておらず, そうかといって
 dense とも限らぬであろう (付録補題 C 参照).

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} \hat{\beta}^p(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega] & \longleftrightarrow & \mathcal{O}(\partial\Omega) / {}^t p(x, D)\mathcal{O}_0(\partial\Omega) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \hat{\beta}^p(\Omega) & \longleftrightarrow & \mathcal{O}(\bar{\Omega}) / {}^t p(x, D)\mathcal{O}_0(\bar{\Omega}) \end{array}$$

という双対性があるが右側の写像は一般には全射でなく $\neq T$:

1対1でも無い。

注意 prolongeable distribution の解についても同様の双対性を考えることが出来る。Cauchy-Kowalevsky が使えないので $t_p(x, D) \mathcal{E}_0(\bar{\Omega})$ が閉部分空間になるかどうかはわからないが $\hat{\mathcal{O}}'(\Omega) \cong [\mathcal{E}(\bar{\Omega}) / t_p(x, D) \mathcal{E}_0(\bar{\Omega})]'$ は同様にして示される。

今の $\mathcal{P}\mathcal{I}$ は以上の一般論を展開する用意が無いので

Laplacian Δ に対し Dirichlet 問題がどうなるか実験的に考察してみよう。 $m=2$ である。

$$\hat{\beta}_{\text{Dir}}^{\Delta}(\Omega) = \{u \in \hat{\beta}^{\Delta}(\Omega); S(x) \Delta u = 0\}$$

$$\sigma_{\text{Dir}}(\bar{\Omega}) = \{\varphi \in \sigma(\bar{\Omega}); \varphi|_{\partial\Omega} = 0\} = S(x) \sigma(\bar{\Omega})$$

と置く。Dir は Dirichlet 条件のつもりである。実際 $u \in \hat{\beta}_{\text{Dir}}^{\Delta}(\Omega)$ の境界値 $\gamma u = \Delta u$ は法線微分 0 階の data しか無い。次の補題は命題 6 の前半と同様を示される。

補題 9 $\hat{\beta}_{\text{Dir}}^{\Delta}(\Omega) = [\Delta \sigma_{\text{Dir}}(\bar{\Omega})]^{\perp}$

$\perp$ は $\beta[\bar{\Omega}]$ と $\sigma(\bar{\Omega})$ の双対性の意味での直交補空間である。

補題 10
$$\begin{array}{ccc} \Delta \sigma_{\text{Dir}}(\bar{\Omega}) / \Delta \sigma_0(\bar{\Omega}) & \xrightarrow{\sim} & \sigma(\partial\Omega) / \bigcup_{\psi} S(x) \sigma(\partial\Omega) \\ \downarrow \Delta \psi & \longrightarrow & \{ \psi / S(x) \bmod S(x) \sigma(\partial\Omega) \} \end{array}$$

従って $\Delta \sigma_{\text{Dir}}(\bar{\Omega})$ も $\sigma(\bar{\Omega})$ の閉部分空間となる。

証明 7.7 同型。

$$(6) \quad S(x) \sigma(\partial\Omega) / S(x)^2 \sigma(\partial\Omega) \xleftarrow{\sim_{S(x)}} \sigma(\partial\Omega) / S(x) \sigma(\partial\Omega) \xleftarrow{\sim} \sigma(\bar{\Omega}) / S(x) \sigma(\bar{\Omega})$$

に注意せよ。(補題5参照) これから $\varphi \in \sigma(\partial\Omega)$ に対応する同型で対応する元 $\psi \in \sigma(\bar{\Omega})$ をとれば $\Delta\psi$ が連続な逐字像であることが容易にわかる. 故に左辺の商空間は完備DFS空間となるから分子は閉である. 証了

以上を総合すると

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \subset & \hat{\beta}_{\text{Dir}}^{\Delta}(\Omega) & \subset & \hat{\beta}^{\Delta}(\Omega) & \subset & \beta[\bar{\Omega}] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \sigma(\bar{\Omega}) & \supset & \Delta\sigma_{\text{Dir}}(\bar{\Omega}) & \supset & \Delta\sigma_0(\bar{\Omega}) & \supset & 0 \end{array}$$

という直交補空間の対応が得られる. 今角の無い場合の真似をして

$$(8) \quad \beta(\partial\Omega) = \beta^{(1)}[\partial\Omega], \quad \sigma(\partial\Omega) = \sigma(\partial\Omega) / S(\alpha) \sigma(\partial\Omega)$$

と書くことにすれば, 結局次の定理が得られる.

定理 11

$$\begin{array}{ccc} \hat{\beta}^{\Delta}(\Omega) / \hat{\beta}_{\text{Dir}}^{\Delta}(\Omega) & \longleftrightarrow & \Delta\sigma_{\text{Dir}}(\bar{\Omega}) / \Delta\sigma_0(\bar{\Omega}) \\ \gamma_0 = S(\alpha)\Delta \downarrow ? & & \nu \downarrow ? \\ \beta(\partial\Omega) & \longleftrightarrow & \sigma(\partial\Omega) \\ \text{Dirichlet data} & & \text{Neumann data} \end{array}$$

という双対図式が得られる. 特に広義解に対応する Dirichlet 問題は常に可解である.

証明 念のため形式的な双対性が対応していることを確かめよう. $u \in \beta^{\Delta}(\Omega)$ と $\varphi = \Delta\psi \in \Delta\sigma_{\text{Dir}}(\bar{\Omega})$ に対応し

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \Delta\psi \rangle = \langle \Delta u, \psi \rangle = \langle S(\alpha)\Delta u, \frac{\psi}{S(\alpha)} \rangle$$

さて, 図式において上の行の双対性は図式(7)から出る. また

下の行の双射性は補題 5 1-5 一般に命, 2 いる. 故に $\mathcal{V}$ が同型なことから Dirichlet data をとる写像 $\gamma_0 = S(\alpha)\Delta$ も同型なことがわかる. これは Dirichlet 問題が常に可解なことを示している.

最後に Dirichlet 問題の解の一意性を調べておこう.

命題 12 $\Delta\sigma_{\text{Dir}}(\partial\Omega) = \Delta(S(\alpha)\sigma(\partial\Omega))$ は $\sigma(\partial\Omega)$ の閉部分空間となり次の双射性が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} \hat{\beta}_{\text{Dir}}^{\Delta}(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega] & \longleftrightarrow & \sigma(\partial\Omega) / \Delta\sigma_{\text{Dir}}(\partial\Omega) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \hat{\beta}_{\text{Dir}}^{\Delta}(\Omega) & \longleftrightarrow & \sigma(\bar{\Omega}) / \Delta\sigma_{\text{Dir}}(\bar{\Omega}) \end{array}$$

従って次は同値となる.

a) $\hat{\beta}_{\text{Dir}}^{\Delta}(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega] \neq 0$

b) 境界の近傍における Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \gamma \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

は必ずしも角において実解析的となる解を持つらない. (古典解の存在は明かなのでこのことは角において古典解の σ -正則性が必ずしも従わぬことを意味する.)

証明は補題 9, 10, 定理 11 と同様である. さて Ω が $\mathbb{R}^2$ の凸多角形の場合を考えよう. 付録の補題 B, E によれば

$$\hat{\beta}_{\text{Dir}}^{\Delta}(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega] = 0 \iff \Omega \text{ の内角はどれも } \pi \text{ の有理数倍でない.}$$

しかしこのとき上の命題から局所的な Dirichlet 問題の解の σ -正則性 へ従うということもできる。(解が一意的ではないから。) 付録の補題 D の証明中の例を見よ。

定理 13 $\mathbb{R}^2$ の凸多角形 Ω における Laplacian Δ に対する超函数的 Dirichlet 問題は常に一意である。

証明 Ω が π の有理数倍に等しい内角の角を持つとは $\hat{\beta}_{\text{Dir}}^{\Delta}(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega] \neq 0$ よりもちろん $\hat{\beta}_{\text{Dir}}^{\Delta}(\Omega) \neq 0$. 一方 Ω が π/m の形以外の角を持つとは付録の補題 D より $\hat{\beta}_{\text{Dir}}^{\Delta}(\Omega)$ の双対 $\sigma(\partial\Omega)/\Delta\sigma_{\text{Dir}}(\partial\Omega) \neq 0$ となる。(この場合一意性をくわしていう解はあまり自明とは云えない。) これですべての場合が尽きれている。

付録

本文中に書くには幼稚すぎる計算をいくつかやっておこう。

補題 A $\partial\Omega$ が角を持つとき, 常に $\hat{\beta}^p(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega] \neq \emptyset$ である。

証明 適当な座標変換で $\partial\Omega$ は $x_1 = x_2 = 0$ という稜を含むとしよう。 $p(x, D)$ に関して $x_1 = 0$ も $x_2 = 0$ も非特異的だから

$$p(x, D) = D_1^m + a(x)D_2^m + \dots \quad a(x) \neq 0$$

という形をしていふと仮定できる。 $x'' = (x_3, \dots, x_n)$ とおこう。

$\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x'')$ による作用素を施せば

$$p(x, D)\delta(x) = (a(x)\delta^{(m)}(x_2)\delta(x''))\delta(x_1) + (\delta^{(m)}(x_1)\delta(x''))\delta(x_2) + \dots$$

となる。 $\dots$ は $\delta(x_1), \delta(x_2)$ のどちらに関しても階数 $m-1$ 以下の部分である。 可なり稜に台を持つ δ 函数は常に $\hat{\beta}^p(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega]$ の自明でない元である, 証了

次にこのような解のうちで Dirichlet 条件を満たすものがあるかどうか調べよう。 簡単のため第一象限の角について 2次元の定数係数 2階同次方程式を考える。 可なり 2次元 Laplacian を凸多角形上で考え, その角が直角になるよう affine 座標変換してものを考える。

補題 B $\mathbb{R}^2$ の原点に台を持つ超函数 (又は distribution) u で

$$xy(D_x^2 + \lambda D_x D_y + \mu D_y^2)u = 0$$

を満たすものが存在するにためには λ^2/μ が次のようにして定まる離散値 α_k のいずれかと一致することが必要かつ十分である: $f_0(\alpha) = \alpha$, $f_1(\alpha) = \alpha(\alpha-1)$, $f_2(\alpha) = \alpha^2(\alpha-2)$, 一般に漸化式

$$(9) \quad f_n(\alpha) = \alpha(f_{n-1}(\alpha) - f_{n-2}(\alpha))$$

で定まる多項式 f_n の零点を $\{\alpha_k\}$ とする.

証明 $u(x) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{j,k} D_x^j D_y^k (\delta(x)\delta(y))$ の形を仮定して方程式に代入し $\delta(x)$ 又は $\delta(y)$ がくり出せる項以外はすべて消えるという条件を課せば

$$(10) \quad \begin{cases} \lambda a_{0,0} = 0 \\ a_{j,1} + \lambda a_{j+1,0} = 0 & j \geq 0 \\ \lambda a_{0,k+1} + \mu a_{1,k} = 0 & k \geq 0 \\ a_{j,k+2} + \lambda a_{j+1,k+1} + \mu a_{j+2,k} = 0 & j, k \geq 0 \end{cases}$$

が得られる. 方程式が同次なのでこれらの条件は各斜線 $j+k = \text{const}$ 上で独立に考えることができる, 従って収束の問題は関与せず有限階の部分の係数条件として上の値が得られる.

上の漸化式は Sturm 列と似た性質を持つことから根はすべて実根で $[0, 4[$ の間に収まっていることがわかる. なお座標変換すれば上の λ^2/μ の値 α_k は Laplacian を $\cos^2 \theta = \alpha_k/4$ なる角度 θ の角で考えられていることに相当する. 後に吟味するように (補題 E) この角は実は円周等分点に対応する

ことが解る. 従って上の離散値は $[0, 4[$ 内に稠密に分布している.

次に特別な角についてこのような角解がどのくらいあるか調べておこう.

補題 C Ω を正方形 $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ とする. $\hat{\beta}^\Delta(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega]$ は $\hat{\beta}^\Delta(\Omega)$ の中で稠密でも閉じてもいない. また $\hat{\beta}_{\text{Dir}}^\Delta(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega]$ も $\hat{\beta}_{\text{Dir}}^\Delta(\Omega)$ の中で同様の状況にある.

証明 公式

$$\begin{aligned} \Delta \left(\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{j,k} D_x^j D_y^k (\delta(x)\delta(y)) \right) &= \left(\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{j,k} D_x^{j+2} D_y^k + \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{j,k} D_x^j D_y^{k+2} \right) \delta(x)\delta(y) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,0} D_x^{j+2} \delta(x)\delta(y) + \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,1} D_x^{j+2} \delta(x)\delta'(y) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k} D_y^{k+2} \delta(y)\delta(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{1,k} D_y^{k+2} \delta(y)\delta'(x) \\ &\quad + \sum_{j,k=0}^{\infty} (a_{j,k+2} + a_{j+2,k}) D_x^{j+2} D_y^{k+2} \delta(x)\delta(y) \end{aligned}$$

より $a_{j,k+2} + a_{j+2,k} = 0$ とおいて原点に台を持つ $\hat{\beta}^\Delta(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega]$ の元の構造が確定する. このとき右辺, 亦即ち“境界値”は

$$\begin{aligned} (11) \quad & \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,0} D_x^{j+2} \delta(x) \right) \delta(y) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{j,1} D_x^{j+2} \delta(x) \right) \delta'(y) \\ & + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k,0} (-1)^k D_y^{2k+2} \delta(y) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1,1} (-1)^k D_y^{2k+3} \delta(y) \right) \delta(x) \\ & + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1,0} (-1)^k D_y^{2k+2} \delta(y) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2,1} (-1)^k D_y^{2k+3} \delta(y) \right) \delta'(x) \end{aligned}$$

となる. これは $\delta(x)\delta(y)$, $\delta'(x)\delta(y)$, $\delta(x)\delta'(y)$, $\delta'(x)\delta'(y)$ 等の項が存在しないことに注意せよ. 故に例えば Dirichlet 問題

$$xy \Delta u = \delta(x)\delta(y)$$

の一般化された解 $v \in \hat{\beta}^\Delta(\Omega)$ をとれば (これは定理 11.1 により存在する), v は上のよう形の解の列 $u_\varepsilon \in \beta[\bar{\Omega}]$ により近似することができよう. 実際, もし $u_\varepsilon \rightarrow v$ ならば $\Delta u_\varepsilon \rightarrow \Delta v$ in $\beta[\bar{\Omega}]$ ならばあるが

$$0 = \langle \Delta u_\varepsilon, xy \rangle \longrightarrow \langle \Delta v, xy \rangle = 1$$

となり矛盾を生じる.

次に $f(x)$ を線分 $[0, 1]$ 上の超函数で台が内点を含み, かつ $\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1,1}^{(k)} D_x^{4j+3} \delta(x)$ の形の原点に台を持つ超函数の列により $\beta[0, 1]$ に近いことができるようなものとする. (このような f の存在は後で論ずる.) このとき $a_{j,0}^{(k)} \equiv 0$ とおき, また $a_{j,1}^{(k)}$ の残りの係数も 0 とおけば, 表現 (11) 式から結局原点のみ に台を持つ $\hat{\beta}_{\text{Dir}}^\Delta(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega]$ の元の列 u_ε を

$$\Delta u_\varepsilon \longrightarrow f(x) \delta'(y) + f(y) \delta'(x) \text{ in } \beta[\bar{\Omega}]$$

となるものが得られることがわかる. Malgrange の不等式により $\beta[\bar{\Omega}]$ に近い $u_\varepsilon \rightarrow v$ となり v は Dirichlet 問題

$$\Delta v = f(x) \delta'(y) + f(y) \delta'(x)$$

の一般化された解となる. v は境界の滑らかな部分において 0 でない境界値を持つというので, その付近で $v \neq 0$. 従って一致の定理により $\text{supp } v = \bar{\Omega}$. これは $\hat{\beta}_{\text{Dir}}^\Delta(\Omega) \cap \beta[\partial\Omega]$ から $\hat{\beta}_{\text{Dir}}^\Delta(\Omega)$ の中で閉じていないことを示している.

最後に f の存在を示してあげる. $\sum_{j=0}^{\infty} a_j D_x^{4j+k} \delta(x)$ の形の元

の全体を作る $\beta[0]$ の部分空間を $E_k, k=0,1,2,3$ とおく. 我々が注目しているのは $E_3 \ominus \mathbb{C}\delta'''(x)$ である.

$$(12) \quad \beta[0] = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$$

という代数的分解が成立している. これは実は位相的分解であることを示そう. そうすれば右辺の閉包を $\beta[0, 1/2]$ の中で考えると, $\beta[0]$ は $\beta[0, 1/2]$ の中で稠密だから

$$\overline{\beta[0, 1/2]} = \overline{E_0} \oplus \overline{E_1} \oplus \overline{E_2} \oplus \overline{E_3}$$

という代数的分解を得, ある E_k はこの閉包操作により $\beta[0, 1/2]$ の元を無限次元獲得することになる. $k=3$ ならそのまず, $k \leq 3$ ならそれを $3-k$ 回微分したものの $x=0$ が原点の外に $0 < x \leq 1/2$ の部分にしみ出るものが含まれているはずであり, それの初項 $\mathbb{C}\delta'''(x)$ を取り去り, T ものを $f(x)$ とすればよい.

さて, (12) が位相的分解であることの証明は, 例えは $u \in \beta[0]$ の分解成分 u_0 が u に

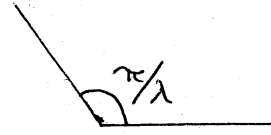
$$\begin{array}{ccc} \beta[0] & \longrightarrow & \beta[0] \\ \downarrow & & \downarrow \\ u(x) & \longmapsto & \frac{u(x) + u(-x)}{2} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} \beta[0] & \longrightarrow & \beta[0] \\ \downarrow & & \downarrow \\ u(x) & \longmapsto & \frac{u(x) + iu(ix)}{2} \end{array}$$

という連続写像を引続き施すことにより得られることに注意すれば得られる. (ix のような代入が可能なのは u の台が原点に含まれているからである.)

補題 D $\mathbb{R}^2$ の凸多角形 Ω が $\pi/n, n=2,3,\dots$ 以外の内角の

角を持つとは, $\Delta \mathcal{O}_{\text{Dir}}(\bar{\Omega}) \subsetneq \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ となっている.

証明 内角 π/λ の角について



$u = \text{Im } z^\lambda$ は Dirichlet 条件を満たす

$\Delta u = 0$ の局所的な解となっている. λ が正整数でなければ

この解は角について一般に $\mathcal{E}_{\frac{1}{2}}^2$ の正則性しかない. (これは一般論を下から評価している: Ibuki [2] を見よ.) この解の $\partial\Omega$

への Dirichlet data は局所的に $\mathcal{O}(\partial\Omega)$ の元からの Dirichlet data から来ているので, 補題 5 により同じ data を実現する

$\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ の元 φ が存在する. $\psi = \Delta(u - \varphi) = -\Delta\varphi$ とおけば

$\psi \in \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ であり $v = u - \varphi$ は境界値問題

$$\begin{cases} \Delta v = \psi \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

の古典解になっている. 最大値原理により古典解は一系である

からこの問題には他の解は存在しない. 故に ψ は

$\mathcal{O}(\bar{\Omega}) / \Delta \mathcal{O}_{\text{Dir}}(\bar{\Omega})$ の自明でない元を与える. 証了

上の補題における例外角の場合には同次 Dirichlet 問題の古典解の角における局所的 $\mathcal{O}$ -正則性が成り立つことが等角写像を用いて容易に確かめられる. しかるに

補題 E $\theta = \pi/n$, $n=2, 3, \dots$ に対し $\alpha = 4\cos^2\theta$ は

補題 B で与えられる離散値に属する. ($4\cos^2\pi/n$ は $q_{n-2}(\alpha)=0$

の最大根である.) 実は一般に $q_{n-2}(\alpha)=0$ の根 α_k に対し

$\alpha_k = 4 \cos^2 \theta$ を定まる角 θ により、円周の n 等分点を示し
てゐる。

証明 公式

$$\cos n\theta = 2 \cos(n-1)\theta \cos \theta - \cos(n-2)\theta$$

を用いて $\cos n\theta$ を $\cos \theta$ の多項式で表わす函数の漸化式を
作り、これを用いて $\alpha = 4 \cos^2 k\theta / (n+2) = 2(\cos 2k\theta / (n+2) + 1)$,
 $k=1, 2, \dots$ を零点とする多項式 $Y_n(\alpha)$ を求めよう。

$$Y_0(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha(\alpha-4), \quad Y_1(\alpha) = \frac{1}{2} (\alpha-4)(\alpha-1)^2$$

一般に

$$(13) \quad Y_n(\alpha) = (\alpha-2)Y_{n-1}(\alpha) - Y_{n-2}(\alpha) + (\alpha-4)$$

が成り立つ。 $\frac{2\alpha^{n+1}}{\alpha-4} Y_n(\alpha) = f_n(\alpha)^2$ を示そう。 そのために
 $S_n(\alpha) = \frac{2\alpha^{n+1}}{\alpha-4} Y_n(\alpha)$ が満たす漸化式を求めよう。

$$(14) \quad S_n(\alpha) = \alpha(\alpha-2)S_{n-1}(\alpha) - \alpha^2 S_{n-2}(\alpha) + 2\alpha^{n+1}$$

さて $f_n(\alpha)$ の正の漸化式 (9) から一般項が

$$f_n(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \alpha}} \right) \left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \alpha} \right)^n + \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \alpha}} \right) \left(\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \alpha} \right)^n$$

と求まるので、これから $f_n(\alpha)^2$ を計算して (14) に代入すれば等
式が確かめられる。 証了。

文献

- [1] Grisvard, P.: Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain, Numerical Solution of Partial Differential Equations III, Synspade 1975, Academic Press 1976, pp.207-274.
- [2] Ibuki, K.: Dirichlet problem for elliptic equations of the second order in a singular domain of R^2 , J. Math. Kyoto Univ. 14-1(1974), 55-71.
- [3] Kaneko, A.: Remarks on hyperfunctions with analytic parameters, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec.IA, 22(1975), 371-407.
- [4] Kaneko, A.: Note on regular fundamental solutions and some other topics, Sûrikaiseki-Kenkyûsho Kôkyûroku 281, 1976, pp. 200-210.
- [5] Malgrange, B.: Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolutions, Ann. Inst. Fourier 6(1955), 271-355.
- [6] Malgrange, B.: Ideals of Differentiable Functions, Tata Institute, 1965.
- [7] Tahara, T.: Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, Japan J. Math., to appear.