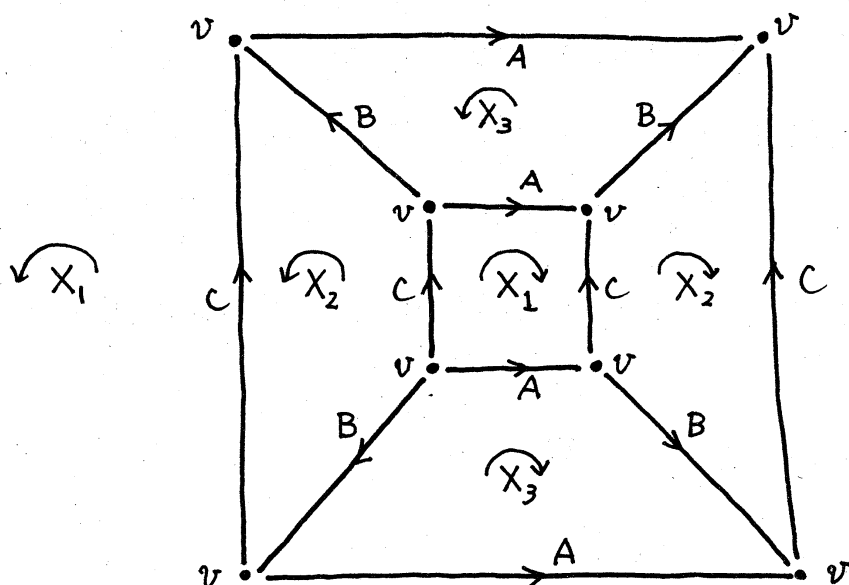


3次元多様体の多面体表示について.

慶応大.理工 石井 一平 (Ippei ISHII)

§.0. 序

任意の閉3次元多様体 M^3 は, 3次元球体 B^3 の境界 $\partial B^3 = S^2$ を適当に貼り合わせることによって得られることが知られている. 例えば, 立え体の対面どうしを貼り合わせて, 3次元トーラス $S^1 \times S^1 \times S^1$ を表示すると,



となる. ここで, 同じ名前の付いた面, 辺, 頂点は 指定

された向きに、同一視，すなわち貼り合わせる。このような表示を，“多面体表示”と呼ぶ。上の例でわかるように、 M^3 の多面体表示は、球面 S^2 上のあるグラフの面、辺、頂点の同一視を与えることによって得られる。もちろん、面、辺、頂点の同一視が、互いに整合していなければならない。（即ち、2つの面 X, Y が同一視されるならば ∂X に現われる辺達と、 ∂Y に現われる辺達は、 X, Y に指定された向きに、同一視されなければならない、等々……）。以下、多面体表示とは、球面グラフ G と、それに付随した、同一視を与える写像 $f: S^2 \rightarrow S^2/\sim$ の組 (G, f) と考える。球面の isotopy で互いに移り合うものは同じ多面体表示と見なす。従って、上の図のような表示で、一つが多面体表示が指定されている。

そこで、 $\mathcal{P}$ で多面体表示全体の集合、 $\mathcal{M}_3$ で 3次元多様体全体の集合とすると、 $g: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}_3$ が定まり、これは全射である。しかし、 $M \in \mathcal{M}_3$ に対し、 $g^{-1}(M)$ は無限個ある。そこで、次の様な標準化の問題が考えられる。

問題: $\mathcal{P}$ の部分集合 $\mathcal{P}_0$ で

$$i) \quad g(\mathcal{P}_0) = \mathcal{M}_3$$

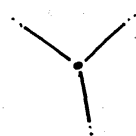
$$ii) \quad \#(g^{-1}(M) \cap \mathcal{P}_0) = \text{finite} \quad \text{for } \forall M \in \mathcal{M}_3$$

なる $\mathcal{P}_0$ を求めよ。

以下では、この標準化の試みについて述べる。

§.1. DS-diagram.

多面体表示 (G, f) が次の条件 (a) ~ (d) を満足するとき、 (G, f) は DS-diagram であるという。

(a) G は 3-regular graph (即ち、 G の各頂点では、 のようになっている。) で connected.

(b) v が G の頂点ならば、 $\#f^{-1}(f(v)) = 4$.

(c) x が G の辺の点ならば、 $\#f^{-1}(f(x)) = 3$.

(d) x が頂点でも辺の点でもなければ $\#f^{-1}(f(x)) = 2$.

[注]. 前節の例は、DS-diagram ではない。

DS-diagram 全体を $\mathcal{DS}$ と書く。明らかに、 $\emptyset \neq \mathcal{DS}$,
更に、 $\mathcal{G}(\mathcal{DS}) = \mathcal{M}_3$ ([1]) である。

(G, f) を DS-diagram とする。 G の辺の集合を $E(G)$,
頂点の集合を $V(G)$ と書く。 $e = \{E_1, E_2, \dots, E_n\} \subset E(G)$
が (G, f) の E-cycle であるとは、

(i) $f(E_i) \neq f(E_j)$ for $1 \leq i < j \leq n$

(ii) $\bigcup_{i=1}^n \bar{E}_i$ は S^2 上の Jordan 閉曲線。

(iii) X, Y が $S^2 - G$ の連結成分で $X \neq Y$, $f(X) = f(Y)$ ならば, X と Y は e で分離される。

の3条件を満たすことであるとする。 DS_E で E -cycle を持つ DS -diagram の集合を表わす。 $DS \neq DS_E$, $\mathcal{P}(DS_E) = \mathcal{M}_3$ である。 ([2])

(G, f) を E -cycle $e = \{E_1, \dots, E_n\}$ を持つ DS -diagram とする。 閉曲線 $\bigcup_{k=1}^n \overline{E_k}$ も同じ文字 e で表わす。 e は次の性質を持つ。 ($S^2 - e$ の連結成分を Σ_1, Σ_2 とする)

$$(i) \#(f^{-1}(f(v)) \cap e) = 2 \quad \text{for } \forall v \in V(G)$$

(ii) $v_1, v_2 \in e \cap V(G)$, $v_1 \neq v_2$, $f(v_1) = f(v_2)$ で v_1 から出る e 上にはない辺が Σ_1 に含まれるとすると, v_2 から出る e 上にはない辺は Σ_2 に含まれる。

$$(iii) \forall x \in e \text{ に対し } \#(f^{-1}(f(x)) \cap \Sigma_j) = 1 \quad (j=1, 2).$$

そこで $e \cap V(G)$ を, 2つの集合 A_1, A_2 に次の様に分ける。

$$v \in A_j \Leftrightarrow v \text{ から出る } e \text{ 上にはない辺は } \Sigma_j \text{ に含まれる.}$$

このとき, さらに次の性質が成り立つ。

(iv) $v \in A_1$ (or A_2), $\{x_k\}$ を片側から v に近づく点列, $\{y_k\} = \Sigma_2 \cap f^{-1}(f(x_k))$ (or $\Sigma_1 \cap f^{-1}(f(x_k))$) とすると。

次のいづれか一方が成り立つ。

$$\begin{cases} (r) & \{x_k\} \text{ が } \underline{\text{右側}} \text{ から近づくとき } y_k \rightarrow e \cap V(G) \\ (l) & \{x_k\} \text{ が } \underline{\text{左側}} \text{ から近づくとき } y_k \rightarrow e \cap V(G) \end{cases}$$

そこで、各 A_j ($j=1,2$) をそれぞれ 2つの集合 A_j^r, A_j^l に分ける。即ち、

$$v \in A_j^r \text{ (or } A_j^l) \Leftrightarrow v \in A_j \text{ が、条件 (r) (or (l)) を満足する。}$$

さらに、 $g: A_1 \rightarrow A_2$ を $g(v) = A_2 \cap f^{-1}(f(v))$ によって定める。このとき、 $(A_1^r, A_1^l; A_2^r, A_2^l; g)$ によって、(もし、これに対応する DS-diagram (G, f) が存在すれば) 一意的に (G, f) が定まることが示される。

次節では、標準的 DS-diagram の候補をこの五つ組によって記述する。

§.2. 標準的 DS-diagram の候補

[I] 松 ("特上" ともいう)

$(A_1^r, A_1^l; A_2^r, A_2^l; g)$ によって定まる (G, f) が

"松" であるとは、次の条件 (i) ~ (iii) を満たすことである。

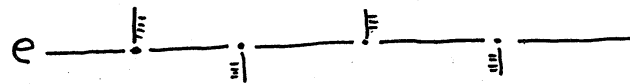
(i) $A_1^l = A_2^r = \emptyset$

(ii) A_1^r の点と A_2^l の点は e 上交互に並ぶ。

(iii) $\forall v \in A_1^r$ の左隣にある A_2^l の点は $g(v)$ ではない。

$\#A_1^r \geq 2$ のときは

この条件 (i), (ii) を次の様に図示する.



すなわち, $-!-$ (or $-i-$) は A_1 (or A_2) の点を表し.
 $-!-$ ならば A_1^r , $-!-$ ならば A_1^l の点とする.

定理 1.

M を 松 の $(A_1^r, A_1^l; A_2^r, A_2^l; g)$ によって定まる
 3-manifold とすると, 次の成り立つ.

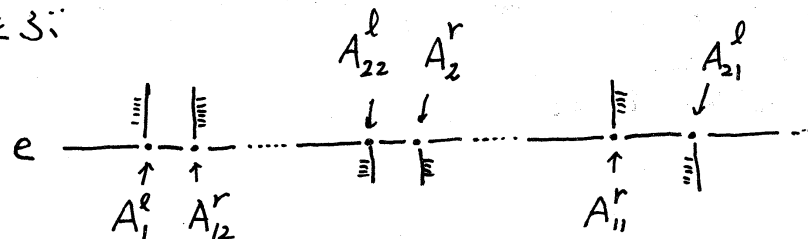
$$(i) \#A_1^r = 1 \Rightarrow M = S^3$$

$$(ii) \#A_1^r \geq 2 \Rightarrow \pi_1(M) \text{ は非自明}$$

[II] 梅 (“並” ともいう)

$(A_1^r, A_1^l; A_2^r, A_2^l; g)$ が “梅” であるとは, 次の
 条件 (i) ~ (iii) を満足することとする.

(i) $A_1^r = A_{11}^r \cup A_{12}^r$, $A_2^l = A_{21}^l \cup A_{22}^l$ とそれぞれ分類
 され, $A_{11}^r, A_{12}^r, A_1^l, A_{21}^l, A_{22}^l, A_2^r$ が e 上下図のよう
 に並ぶ:



$$(ii) \quad g(A_{11}^r) = A_{21}^l, \quad g(A_{12}^r) = A_{22}^l, \quad g(A_1^l) = A_2^r.$$

(iii) $\#A_{11}^r \geq 2$ のとき. $v \in A_{11}^r$ に対し. A_{21}^l の点のうち
で. v の左隣 の点 は $g(v)$ ではない.

定理 2.

任意の orientable closed 3-manifold は 梅 の DS-diagram
によって表示される.

[III] 竹 ("上" ともいう)

条件: 梅 + (iv)

(iv) 左端点 が A_2^r の点, 右端点 が A_2^l の点であるよう
な $e - A_2$ の任意の連結成分 γ に対し. $\Sigma_1 \cap \bar{f}^{-1}(\bar{\gamma})$
によって分けられる Σ_1 のどちらの部分 Ω に対しても
 $A_{21}^l \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$.

予想

(1) すべての orientable closed 3-manifold は 竹 の
DS-diagram で表示されるであろう.

(2) $\#A_{11}^r \geq 2$ なる 竹 の DS-diagram で表示される多様体
の基本群は 非自明 であろう.

[注意]

(1) 定理. 2. の証明の概略

E-cycle を持つ DS-diagram は non-singular flow の組合せ的表示と考えられる ([2], [3]). そこで, この non-singular flow として, fibred knot に付随したものをとると, fibre が orientable で monodromy map が orientation preserving ならば, これから得られる DS-diagram は "梅" であることが示される. 一先, orientable closed 3-manifold は, 上記のような fibred knot を持つことが知られている. このことから定理. 2. が導かれる.

(2) 定理. 1. で $\#A_1^r = 1$ の場合は, $M = S^3$ であることはよく知られている ([1]). $\#A_1^r \geq 2$ の場合の証明は, "松" の DS-diagram の持つ対称性を用いて, 組合せ群論的に行われる (Lyndon [4] の small cancellation theory に用いられる手法をまねる).

References

- [1] H. Ikeda, Acyclic closed fake surfaces, *Topology* 10('71) 9-36
- [2] I. Ishii, Flows and Spines, *Tokyo J. Math.* 9('86) 505-525
- [3] ———, Combinatorial construction ———, *Kobe J. Math.* ('86) 201-208
- [4] R.C. Lyndon & P.E. Schupp, Combinatorial group theory, Springer ('77)