

Abelian ℓ -adic representations associated with Selberg integrals II.

東京大学理学部 織田 孝幸
(Takayuki ODA)

§0.A Euler の積分, あるいは Beta 関数

$$\int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0)$$

は次のような有限体上の類似物をもつ。

p を素数とし, $q = p^f$ (f は自然数) とし, $\mathbb{F}_q$ を q 個の元からなる有限体, $\chi_1, \chi_2: \mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\mathbb{F}_q$ から $\mathbb{C}^\times$ への乗法的指標とするとき,

$$J(\chi_1, \chi_2) = \sum_{m \in \mathbb{F}_q} \chi_1(m) \chi_2(1-m) \quad (\text{但し, } \chi_i(0)=0)$$

は Jacobi の和と呼ばれる。これは Gauss の和

$$G(\chi; \psi) = - \sum_{m \in \mathbb{F}_q} \chi(m) \psi(m)$$

($\psi: \mathbb{F}_q \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{C}^\times$ は $\mathbb{F}_q$ の nontrivial additive character)

によつて

$$(-1) J(\chi_1, \chi_2) = \frac{G(\chi_1; \psi) G(\chi_2; \psi)}{G(\chi_1 \chi_2; \psi)} \quad (\text{但し, } \chi_1 \neq 1, \chi_2 \neq 1)$$

と表わされる。

この和は $q \equiv 1 \pmod{n}$ のとき, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の Fermat 曲線

$$X^n + Y^n = 1$$

の合同 zeta 関数の根として現われ, 円分体 $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/n))$ 上の Fermat 曲線 $X^n + Y^n = 1$ の abelian L -遊表現に対応する Hecke 指標 (A^0 型の量指標) に対応することはよく知られている。
(cf. [W-1], [W-2], [D-1].)

さて, Selberg は 1944 年に, 上のような積分の類似物として次のような積分公式を示した。

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 (u_1 u_2 \cdots u_N)^{\alpha-1} \{(1-u_1)(1-u_2) \cdots (1-u_N)\}^{\beta-1} |\Delta(u)|^{2\delta} du_1 \cdots du_N$$

$$= \prod_{\nu=1}^N \frac{\Gamma(\nu\delta+1) \Gamma(\alpha+(\nu-1)\delta) \Gamma(\beta+(\nu-1)\delta)}{\Gamma(\delta+1) \Gamma(\alpha+\beta+(N+\nu-2)\delta)}$$

(cf. [S-1])

この積分は Tsuchiya-Kanie [T-K] の conformal field theory における役割を果たす。また Aomoto [A-1] は de Rham cohomology の context でこういう積分の現われる理由とさげている。

さて, 1980 年ごろ Evans [E-1] はこの積分の有限体上の類似物を定義し, それを Gauss の和で書き表わす, 上の [] に積分の表示の類似の式を予想し, $N=2$ のときに初等的に証明した。以下この予想を簡単に説明しよう。

§0.B. Selberg の和と Evans の予想.

N を自然数とする。 N 変元 の Selberg 和は次のように定義さ

れる。 p を奇素数とし, $q = p^f$, $\mathbb{F}_q$ を q 個の元からなる有限体とする。 $\phi: \mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ で $\mathbb{F}_q$ の乗法的な指標で位数 2 の唯一の指標を表わす。 ϕ が q に依存していることを特に示すとき $\phi = \phi_q$ と書く。

定義 (0.1) χ_1, χ_2, χ_3 を $\mathbb{F}_q^\times$ の指標とし, $\chi_i(0) = 0$ とおく。

($i = 0, 1, \text{ or } 2$)。 このとき, χ_1, χ_2, χ_3 に対する N 次元の Selberg 和を

$$S_q^N(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \phi) = \sum_{\substack{F \in \mathbb{F}_q[T] \\ N = \deg F, F \text{ is monic}}} \chi_1((-1)^N F(0)) \chi_2(F(1)) \chi_3(\phi(D_F))$$

で定義する。

但し, ここで F は次数 N の $\mathbb{F}_q$ 係数のモノニックな多項式を動かす。 D_F は F の判別式とする。 $N=1$ のとき $D_F = 1$ と定義する。 $N=1$ のときは明らかに Jacobi 和と一致する。

上の形では Selberg 積分との類似が見にくいのので少し説明する。

$$F(T) = \prod_{i=1}^N (T - \mu_i) \quad (\mu_i \in \overline{\mathbb{F}_q}) \text{ とする。 すると}$$

$$(-1)^N F(0) = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_N, \quad F(1) = (1 - \mu_1)(1 - \mu_2) \cdots (1 - \mu_N).$$

$$D_F = \prod_{i < j} (\mu_i - \mu_j)^2,$$

となり Selberg 積分と同じ形であるのがわかる。

Evans は論文 [E-1] で上の和を定義し次の予想をした。

予想 (0-2) $\chi_1 \chi_2 \chi_3^{n-1+j} \neq 1$ かつ $0 \leq j \leq N-1$ とする j について

ついで成立すれば,

$$(-1)^N S_q^N(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \phi) = \prod_{j=0}^{N-1} \frac{G(\chi_3^{j+1}, \psi) G(\chi_1 \chi_3^j, \psi) G(\chi_2 \chi_3^j, \psi)}{G(\chi_3, \psi) G(\chi_1 \chi_2 \chi_3^{N-1+j}, \psi)}$$

が成立する。

[E-1] では上の予想は $N=2$ のとき初等的な方法で示されたが $N \geq 3$ では、特別な場合しか示されていないようである。(cf. [E-2]).

上の予想が正しいければその系として次のいえる。

予想 (0-3) (0.2) と同じ仮定のもとで,

$$(i) \quad |S_q^N(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \phi)| = q^{\frac{N}{2}}$$

(ii) m を自然数とし, $\chi_i^{(m)} = \chi_i \circ N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}$ とする。ただし, ここで $N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q} : \mathbb{F}_{q^m}^\times \rightarrow \mathbb{F}_q^\times$ はノルム写像。このとき

$$(-1)^N S_{q^m}(\chi_1^{(m)}, \chi_2^{(m)}, \chi_3^{(m)} \phi_m) = \{(-1)^N S_q(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \phi)\}^{(m)}.$$

この 1-トの目的は予想 (0-3) を示すことにある。すなわち

定理 (0-4) χ_1, χ_2, χ_3 についてもう少し強い仮定のもとで予想 (0-3) は成立する。

証明の方針は田分体上定義された N 次元代数多様体の N 次元 étale cohomology group に -1 次元の部分空間を構成し、そうして得られる abelian l -adic 表現の p に於ける Frobenius element の像が丁度求める $(-1)^N S_g^N(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \phi)$ になることを示す。すると (i) は Deligne の (Weil 予想に関する) 定理から、(ii) は l 進表現が -1 次元であることがわかる。

注意. 予想が正しいければ、 $(-1)^N S_g^N(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \phi)$ は χ_i が global なものであるとき、Jacobi の形式と同一様に A_0 型の量指標に対応していることがわかる。

$N=2$ のときは既に [0-1] に結果をまとめて発表した。

以下 N 次元射影空間 $\mathbb{P}^N$ のある Kummer covering を考え、その étale cohomology group のある subspace と -1 次元の l 進表現をつくる。途中から de Rham 版である Toudiya-Kanie の構成 (Selberg 積分の場合) と全く同様の議論になる。

§1. Kummer 拡大体

n を自然数とする。 k を標数 $\neq n$ と素な体で -1 の原始 n 乗根 ζ_n を含むものとする。 $u_1, \dots, u_N$ を k 上独立な N 個の変数と

し、 $\mathbb{K}$ 上の有理関数体 $K_1 = \mathbb{K}(u_1, u_2, \dots, u_N)$ を考える。体 K_1 のアーベル拡大 K_N を

$$K_N = K_1(\sqrt[n]{\alpha_i}, \sqrt[n]{1-u_i}, \sqrt[n]{u_i-u_j} \quad (1 \leq i, j \leq N))$$

で定める。 K_N/K_1 は Kummer 拡大でその Galois 群 $\text{Gal}(K_N/K_1)$ を A と書くと、 A は $\mu_n^{\oplus \frac{1}{2}N(N+1)}$ に同型である。但し μ_n は $\mathbb{K}$ の中の 1 の n 中根のなす群とする。

さて K_1 の $\mathbb{K}$ 上の model として、 N 次元射影空間 $\mathbb{P}^N$ をとる。そして K_N の model として、 $\mathbb{P}^N$ の K_N に於る正規閉包をとる。すると $Y'_n \rightarrow \mathbb{P}^N$ という拡大 K_N/K_1 に対する finite flat morphism を得る。 Y'_n は normal であるが、smooth でないの、少し具合が悪い。そこで、2 次元でやるときのように、 $\mathbb{P}^N$ を blow-up して $\hat{\mathbb{P}}^N$ を定義し、その正規閉包 Y_n で、 Y_n は smooth で $Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$ が finite flat となるものを次の節で考える。

§2. Terada model.

Appell の超幾何関数の monodromy の問題と関連して、Terada [T-1] は $\mathbb{P}^N$ の blow up を構成した。この構成の特別な場合を以下に復習しよう。§2 の結果はすべて [T-1] にある。

まず $N+2$ 個の数字からなる集合 $N = \{0, 1, 2, \dots, N, N+1\}$ を考える。 N の中集合 $\mathcal{P}(N)$ の部分集合 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \{I \mid I \subset N, \#I \geq 2\}$$

で定める。凡の各元 I に対し $\#I-2$ 次の射影空間 $\mathbb{P}_I$ を次のように定義する。 ($\#I=2$ のとき $\mathbb{P}_I$ は点である。)

いま $\#I$ 次の affine 空間 A^I を考え、その点の座標を $(x_{I,i})_{i \in I}$ と書く。このとき A^I の 2 点に同値関係を

$$(x_{I,i})_{i \in I} \sim (y_{I,i})_{i \in I} \iff \begin{cases} \exists a \in k^\times, \exists b \in k, \text{ s.t.} \\ y_{I,i} = a x_{I,i} + b \quad (\forall i \in I) \end{cases}$$

で定める。 A^I から対角集合 $\Delta(A_I)$ を除いた残りを上の同値関係で割って quotient をつくれば、それは $(\#I-2)$ 次の射影空間 $\mathbb{P}_I$ となる。座標 $(x_{I,i})_{i \in I}$ を $\mathbb{P}_I$ の homogeneous coordinates with displacement という。

記法. $x_I(i,j) = x_{I,i} - x_{I,j} \quad (i,j \in I, i \neq j)$ と定める。

さて $\mathbb{P}_I$ たちの積 $\prod_{I \in \pi} \mathbb{P}_I \ni ((x_{I,i})_{i \in I})_{I \in \pi}$ に関する関係式で閉部分多様体 $\hat{\mathbb{P}}^N$ を定める。

$$\hat{\mathbb{P}}^N = \left\{ \hat{x} = ((x_{I,i})_{i \in I})_{I \in \pi} \mid \begin{array}{l} x_I(i,k) x_J(j,k) = x_I(j,k) x_J(i,k) \\ \forall I \subset J \in \pi, \\ \forall i,j,k \in I \end{array} \right\}$$

命題 (2.1). $\hat{\mathbb{P}}^N$ は N 次の smooth scheme over $\mathbb{Z}$.

例. $N=2$ のとき $\hat{\mathbb{P}}^N$ は $\mathbb{P}^2$ の line configuration  の 4 つの 3 重点での blow-up に外ならない。

各 $I \in \pi - \{N\}$ に対して $\hat{\mathbb{P}}^N$ の閉部分 scheme を

$$\mathcal{D}_I = \bigcap_{I \neq J \in \pi} \bigcap_{i,j \in I} \{ \hat{x} \in \hat{\mathbb{P}}^N \mid x_J(i,j) = 0 \}$$

で定める。

命題 (2.2) 各 $\mathcal{D}_I$ は $\hat{\mathbb{P}}^N$ の irreducible smooth divisor.

$\hat{x} \in \hat{\mathbb{P}}^N$ に対して, $\mathcal{L}_{\hat{x}}$ を

$$\mathcal{L}_{\hat{x}} = \{ I \in \pi \mid \hat{x} \in \mathcal{D}_I \}$$

とおくと, $\mathcal{L}_{\hat{x}}$ は次の (AR) 条件を満たす。

Lemma (AR) 条件. $I, J \in \mathcal{L}_{\hat{x}}$ ならば, $I \cap J = \emptyset$, 又は $I \subset J$, 又は $J \subset I$.

さて次を成立させる。

命題 (2.3). (i) $\mathcal{D}_{I_1} \cap \mathcal{D}_{I_2} \cap \dots \cap \mathcal{D}_{I_k} \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{L} = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ が (AR) 条件を満たす。

(ii) $\hat{\mathcal{D}} = \bigcup_{I \in \pi - \{N\}} \mathcal{D}_I$ は $\hat{\mathbb{P}}^N$ の divisor with normal crossing.

以上より, $\hat{\mathbb{P}}^N$ の stratification を次のように定める。

① stratification of $\hat{\mathbb{P}}^N$.

記号 π の中集合 $\mathcal{P}(\pi)$ の集合集合 Σ を

$$\Sigma = \{ \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \subset \pi, \mathcal{L} \text{ は (AR) 条件を満たす} \}$$

で定める。

定義 各 $\mathcal{L} \in \Sigma$ に対し, $F_{\mathcal{L}} = \bigcap_{I \in \mathcal{L} - \{N\}} \mathcal{D}_I$ (特に $\mathcal{L} = \{N\}$

のときは, $F_{\mathcal{L}} = \hat{\mathbb{P}}^N$) と定め, $F_{\mathcal{L}}^{\circ}$ を

$$F_{\mathcal{L}}^{\circ} = F_{\mathcal{L}} - \bigcup_{\substack{\mathcal{L}' \in \Sigma \\ \mathcal{L}' \neq \mathcal{L}}} F_{\mathcal{L}'}$$

と定める。

命題 (2,4) (i) 各 $I \in \Sigma$ に対し F_L° は codimension $\#L-1$ の $\hat{\mathbb{P}}^N$ locally closed subscheme.

$$(ii) \quad \hat{\mathbb{P}}^N = \bigcup_{L \in \Sigma} F_L^\circ \quad (\text{disjoint}).$$

例 $N=2$, $F_{\{I, \infty\}}^\circ \cong \mathbb{P}^2 - \{ \text{triangle} \}$, $F_{\{I, \infty\}}^\circ \cong \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ ($\forall I \in \pi - I \neq \infty$), $F_{\{I, J, \infty\}}^\circ \cong \{ \text{line} \}$, $I \neq J$.

注意 $\hat{\mathbb{P}}^N = \bigcup_{\substack{I \in \Sigma \\ I \neq \infty}} D_I$ は次の scheme と自然に同型である。

$$U_N = \text{PGL}(1) \backslash F_{0, N+3} \mathbb{P}^1.$$

ここで $F_{0, N+3} \mathbb{P}^1$ は $(\mathbb{P}^1)^{N+3}$ の open subscheme

$$\{ (z_1, \dots, z_{N+3}) \in (\mathbb{P}^1)^{N+3} \mid z_i \neq z_j, \forall i \neq j \},$$

で $\text{PGL}(1)$ は $F_{0, N+3} \mathbb{P}^1$ に diagonally に作用する。

$N+3$ 次対称群 S_{N+3} は U_N に自然に作用し $N \geq 2$ ならばその作用

は effective で ($N=1$ のとき $S_4/V_4 \cong S_3$ として分解する...),

この作用は $\hat{\mathbb{P}}^N$ に双正則に延長でき, 上の divisor configuration

は完全に S_{N+3} -対称である。この対称性をもっと見易くするに

は D_I の index I を次のように変えればよい。 $N_\infty = N \cup \{\infty\}$ と

する。 $\#I < \frac{N+3}{2}$ のとき $\tilde{I} = I$, $\#I > \frac{N+3}{2}$ のとき, $\tilde{I} = N_\infty - I$

と置く。 $\#I = \frac{N+3}{2}$ のとき, $\tilde{I}$ は I と $N_\infty - I$ の組みを表わすと

する。こうして d_I も $d_{\tilde{I}}$ と書き直せば, $d_{\tilde{I}}$ は S_{N+3} に対して対称になっているのは明らかとなる。

$\#I \leq \frac{N+3}{2}$ は $(\mathbb{P}^1)^{N+3}$ の $O(2)$ に属する stability の条件で, 実は $\hat{\mathbb{P}}^N$ から $\mathrm{PGL}(1) \backslash (\mathbb{P}^1)^{N+3}_{\mathrm{sst}}$ に自然な写像がある。

§3. Kummer 被覆とその分岐.

$k = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{-1})$ とおく。

定義. Y_n を $\hat{\mathbb{P}}^N/\mathbb{Z}$ の K_N/K_1 に関する normal closure とする。

命題 (3.1) Y_n は $\mathbb{Z}[\sqrt[n]{-1}, \frac{1}{n}]$ の smooth proper scheme である。

$A = \mathrm{Gal}(Y_n/\hat{\mathbb{P}}^N)$ とおく。Finite flat morphism $f: Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$ の分岐を記述するため, A を次のように書く。

π の部分集合 π_2 を $\pi_2 = \{I \in \pi \mid \#I = 2\}$ で定める。

$\Delta: \mu_n \rightarrow \mu_n^{\oplus \pi_2}$ を対角写像とし, $A \cong \mu_n^{\oplus \pi_2}/\mu_n$ という同型

を以下のように定める。 $(X_i)_{i \in N} \in \mathbb{P}_N$ の homogeneous coordinates with displacement とし, $X(i, j) = X_i - X_j$ とする。 $\sigma \in A$ に対し

$$\sigma\left(n\sqrt{\frac{X(i, j)}{X(k, l)}}\right) = \frac{\zeta_{ij}}{\zeta_{kl}} n\sqrt{\frac{X(i, j)}{X(k, l)}} \quad (\zeta_{ij}, \zeta_{kl} \in \mu_n)$$

で $\mu_n^{\oplus \pi_2}$ の元 $(\zeta_{ij})_{(i, j) \in \pi_2}$ が定まる。 $(\zeta_{ij})_{(i, j) \in \pi_2}$ は mod μ_n で定まる。よって $A \cong \mu_n^{\oplus \pi_2}/\mu_n$. $\#\pi_2 = \binom{N+2}{2}$.

よって $A \cong \mu_n^{\frac{1}{2}N(N+3)}$.

Terada model は各点の local coordinates も自然な形で explicit に構成できる。これより, $f: Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$ の分岐群は

以下のように記述される。

各 $I \in \mathcal{R}_2$ に対して, $\tilde{\varphi}_I: \mu_n \rightarrow \mu_n^{\oplus n_2}$ と $\zeta \in \mu_n$ に対し $\tilde{\varphi}_I(\zeta)$ は I -成分 ζ と他の $J \in \mathcal{R}_2$ ($J \neq I$) に対して, J -成分は 1 となるように定義する。 $\varphi_I: \mu_n \rightarrow \mu_n^{\oplus n_2}/\mu_n = A$ と $\tilde{\varphi}_I$ と標準全射 $\mu_n^{\oplus n_2} \twoheadrightarrow A$ の合成で定義する。 φ_I の像を A_I と書く。 $A_I \cong \mu_n$.

命題 (3.1). 各 $I \in \mathcal{R}_2$ に対して, A_I は $f: Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$ の D_I に沿った分岐群である。

注意. D_I に沿った橋性群 A_I の位数は n で, $D_I \cong \hat{\mathbb{P}}^I \times \hat{\mathbb{P}}^{(N+1-I)}$ より, D_I での分解群を $\tilde{A}_I$ とすると, 相対位数 $f = \#(\tilde{A}_I/A_I) = n^{\binom{\#I}{2}-1} + \binom{N+1-\#I}{2}-1$. $Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$ の位数は $n^{\binom{N+2}{2}-1}$. よって $f^{-1}(D_I)$ の既約成分の個数は $g = n^{\binom{N+2}{2}-\binom{\#I}{2}-\binom{N+1-\#I}{2}}$.

Σ を $\hat{\mathbb{P}}^N$ の stratification の定義に現われた (AR) 条件をみたす集合 $\mathcal{L}$ の集合とする。 D_I ($I \in \mathcal{R}_2^*$) たちは, normal crossing で, 各 D_I は $Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$ で branch (2) ので, $\neq$ である。

定義. $A_{\mathcal{L}} = \langle A_I \mid I \in \mathcal{L} - \{N\} \rangle$ とおく。 $A_{\{N\}} = \{1\}$.

命題 (3.2). $A_{\mathcal{L}}$ は $Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$ の $F_{\mathcal{L}}$ の generic point, あるいは $F_{\mathcal{L}}^0$ での分岐群である。

注意. $f: Y_n \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$ の ramification locus $R = f^{-1}(\hat{\mathbb{P}})_{\text{red}}$ は $\mathcal{L}$ による normal crossing divisor in Y_n である。

§4. Euler 数

以下では Y_n の cohomology theory として 2 つのもの を 考 え る

(A) 係数体 $K = \mathbb{C}$ として, $k \subset \mathbb{C}$ によって Y_n を $\mathbb{C}$ 上で考 え, $Y_n(\mathbb{C})^{\text{an}}$ で $Y_n(\mathbb{C})$ に associate する複素解析多様体 と 考 え る とき, 特異 cohomology 群 $H^i(Y_n(\mathbb{C})^{\text{an}}, K)$ を 考 え る.

(B) 係数体 $K = \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ として, $Y_n \otimes_{\mathbb{F}_\ell} \overline{\mathbb{F}_\ell}$ の étale cohomology 群 $H_{\text{ét}}^i(Y_n \otimes_{\mathbb{F}_\ell} \overline{\mathbb{F}_\ell}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ を 考 え る.

いずれの場合も単に $H^i(Y_n, K)$ と cohomology 群 を 記 す. K^* に 値 を も つ A の 指標群 $A^* = \text{Hom}(A, K^*)$ を 考 え る. $\alpha \in A^*$ と 考 え る.

定義. $H^i(\alpha) := \{ \gamma \in H^i(Y_n, K) \mid g^*(\gamma) = \alpha(g)\gamma; \forall g \in A \}$

但し g^* は $g \in A \subset \text{Aut}(Y_n)$ が $H^i(Y_n, K)$ に 引 き 起 こ す 写 像.

定義. $e(\alpha) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(\alpha)$. ここで和は $i \leq 2N$.

定理 (4.1) $e(\alpha) = \sum_{\mathcal{L} \in \Sigma} e(F_{\mathcal{L}}^0) \delta(\alpha|A_{\mathcal{L}})$.

但し $\mathcal{L} \in \Sigma$ は stratification Σ の各 stratum $\mathcal{L}$ を 動 く. $F_{\mathcal{L}}^0$ は §2 で 定 義 し た. $e(F_{\mathcal{L}}^0)$ は その Euler 数. 最後 に $\delta(\alpha|A_{\mathcal{L}})$ は 次 で 与 え る.

$$\delta(\alpha|A_{\mathcal{L}}) = \begin{cases} 1, & (\alpha|_{A_{\mathcal{L}}} \text{ が 自明な指標}) ; \\ 0, & (\alpha|_{A_{\mathcal{L}}} \text{ が } A_{\mathcal{L}} \text{ の 自明でない指標}). \end{cases}$$

さて $\alpha \in A^*$ について

定義 任意の $I \in \Sigma$ に対し $S(\alpha|A_I) = 0$ である α を α generic といい、明らかなに α generic $\Leftrightarrow S(\alpha|A_I) = 0, \forall I \in \Sigma$.

系 $\alpha \in A^*$ が generic ならば, $e(\alpha) = e(F_{\{N\}}^0) = (-1)^N N!$

(定理の証明) Open immersion $i: U_N \hookrightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$ と finite morphism $f: Y_N \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^N$ の fibre V とし, i, f の Cartesian diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & U_N \\ k \downarrow & & \downarrow i \\ Y_N & \xrightarrow{f} & \hat{\mathbb{P}}^N \end{array}$$

を考える。ここから, k は open immersion, g は finite étale である。

$k_* \overline{\mathcal{O}}_V = \overline{\mathcal{O}}_U$ かつ Y_N 上では成り立つから, $f_* k_* \overline{\mathcal{O}}_V = f_* \overline{\mathcal{O}}_U = i_* g_* \overline{\mathcal{O}}_V$

さて g は étale であるから, $g_* \overline{\mathcal{O}}_V$ は smooth で, A -linearized

$$g_* \overline{\mathcal{O}}_V = \bigoplus_{\alpha \in A^*} L_\alpha$$

と α -eigen parts L_α に分解する。各 L_α は rank 1 の smooth $\overline{\mathcal{O}}_U$

sheaf on U_N である。こうして, $f_* \overline{\mathcal{O}}_V = \bigoplus_{\alpha \in A^*} i_* L_\alpha$ 。

一方 f_* は finite であるから acyclic であり $R^i f_* \overline{\mathcal{O}}_V = 0$ ($i > 0$) である

から, $H_{\text{ét}}^i(Y_N, \overline{\mathcal{O}}_V) = H_{\text{ét}}^i(\hat{\mathbb{P}}^N, f_* \overline{\mathcal{O}}_V) = \bigoplus_{\alpha \in A^*} H_{\text{ét}}^i(\hat{\mathbb{P}}^N, i_* L_\alpha)$ 。

A -module として構造比較より, $H^i(\alpha) = H_{\text{ét}}^i(\hat{\mathbb{P}}^N, i_* L_\alpha)$ かつ

各 α に対して成り立つ。 $e(\alpha) = \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, i_* L_\alpha)$ 。

さて L_α は U_N 上 smooth であるから, $\sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(U_N, L_\alpha) = e(U_N)$ 。

これより, $e(U_N) = \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, R^i i_* L_\alpha)$. 但し

$R^j i_* L_\alpha$ は L_α の derived complex. $j \geq 0$

$$e(U_N) = e(\alpha) + \sum_{j=1}^{2N} (-1)^j \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, R^j i_* L_\alpha).$$

- Euler-Poincaré 標数の加法性より,

$$\sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, R^j i_* L_\alpha) = \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha).$$

よって

$$e(U_N) = \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha).$$

ここで $R^j i_* L_\alpha$ は各 F_ℓ^0 上 smooth sheaf になることより,

$$e(U_N) = \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \cdot \text{rank} \{ (R^j i_* L_\alpha)_{x_\ell} \} e(F_\ell^0).$$

ここで, $(R^j i_* L_\alpha)_{x_\ell}$ は F_ℓ^0 のある点 x_ℓ での $R^j i_* L_\alpha$ の stalk である. この補題は易しい.

補題 $\sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \text{rank} \{ (R^j i_* L_\alpha)_x \} = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in U_N; \\ 0, & \text{if } x \notin U_N. \end{cases}$

これより, $R^j i_* L_\alpha$ について E-P 標数の加法性を使い,

$$\sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(\hat{\mathbb{P}}^N, R^j i_* L_\alpha) = \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha)$$

$$\text{よって } e(U_N) - e(\alpha) = \sum_{j=1}^{2N} (-1)^j \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{i=0}^{2N} (-1)^i \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha)$$

$$= \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{i=1}^{2N} (-1)^i \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \dim H^i(F_\ell^0, R^j i_* L_\alpha)$$

$$= \sum_{\ell \in \Sigma} \sum_{j=1}^{2N} (-1)^j \cdot \text{rank} \{ (R^j i_* L_\alpha)_{x_\ell} \} e(F_\ell^0)$$

$$= \sum_{\ell \in \Sigma} \left[\sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \operatorname{rank} \{ (R^j i_+ L_\alpha)_{x_\ell} \} e(F_\ell^0) - \operatorname{rank} (i_+ L_\alpha)_{x_\ell} e(F_\ell^0) \right]$$

$$= (-1) \sum_{\substack{\ell \in \Sigma \\ \ell \neq \{N\}}} \operatorname{rank} (i_+ L_\alpha)_{x_\ell} e(F_\ell^0) + e(U_N) - \operatorname{rank} (i_+ L_\alpha)_{x_N} e(U_N).$$

そこで、 $(i_+ L_\alpha)_{x_N}$ の rank 1 であることに注意して、

$$e(U_N) = e(\alpha) + (-1) \cdot \sum_{\substack{\ell \in \Sigma \\ \ell \neq \{N\}}} e(F_\ell^0) \operatorname{rank} (i_+ L_\alpha)_{x_\ell}.$$

つまり、
$$e(\alpha) = \sum_{\ell \in \Sigma} e(F_\ell^0) \operatorname{rank} (i_+ L_\alpha)_{x_\ell}.$$

ここで、 L_α に対応する U_N の基本群の表現を考えると、それは $H_1(U_N, \mathbb{Z})$ or $H_1^{\text{ét}}(U_N, \hat{\mathbb{Z}})$ を通って分解し、標準全射 $H_1(U_N, \mathbb{Z}) \rightarrow A$ or $H_1^{\text{ét}}(U_N, \hat{\mathbb{Z}}) \rightarrow A$ によつて、 A を通って分解し、指標 $\alpha: A \rightarrow K^*$ に対応している。よつて $(i_+ L_\alpha)_{x_\ell}$ は x_ℓ の inertia group A_ℓ により定められ、表現 α による、 A_ℓ の fixed part になる。 $\operatorname{rank} (i_+ L_\alpha)_{x_\ell} = \dim K^{\alpha(A_\ell)} = \delta(\alpha|A_\ell)$.

(証明終り)

§ 5. generic symmetric characters and abelian ℓ -adic representations

N を π の元とみる。すると $U_N = F_N^0$ は A^N の open subscheme とみなせる。 A^N の座標の置換によつて N 変対称群 S_N は A^N に作用し U_N はこの S_N の作用で安定である。しかも S_N は $S_{N+3} = \operatorname{Aut}(U_N)$ の部分群とみなせる。 S_N は U_N の $H_1(U_N, \mathbb{Z})$, あるいは $H_1^{\text{ét}}(U_N \otimes \bar{k}, \hat{\mathbb{Z}})$

に自然に作用し, A は $H_1(U_N, \mathbb{Z})/nH_1(U_N, \mathbb{Z})$ あるいは $H_1^{\text{ét}}(U_N \otimes \bar{k}, \mathbb{Z})/nH_1^{\text{ét}}(U_N \otimes \bar{k}, \mathbb{Z})$ と同一視できよから, A にも, 従って A^* にも作用する。

定義 $\alpha \in A^*$ が symmetric とは, 上の S_N の A^* の作用で α が不変に保たれているときをいう。

さて $\alpha \in A^*$ が generic であるとき $i_* L_\alpha = i_! L_\alpha$ が成り立ち, 特に $H^i(U_N, L_\alpha) = H_c^i(U_N, L_\alpha)$ は pure で, U_N affine より, α^{-1} が generic であることを使って,

$$H^i(U_N, L_\alpha) = H_c^i(U_N, L_\alpha) \cong \begin{cases} 105 & (i \neq N+1); \\ K^{\oplus N!} & (i = N+1). \end{cases}$$

さらに α が symmetric であるとき, S_N は $H^N(U_N, L_\alpha)$ に作用する。

命題 (5.1) $\alpha \in A^*$ が generic symmetric であるとき, S_N が上記で述べた $H^N(U_N, L_\alpha)$ に引き起こす表現は正則表現である。

(証明). S_N は U_N に固定点なしに作用することに着目し, Le fchet の fixed point theorem を使う。

系. 上と同じ仮定で $H^N(U_N, L_\alpha)$ の S_N -不変部分空間は一次元である。

S_N の作用が良上定義されていることを使う。でよい。

命題 (5.2) $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ とし, $K = \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ とする. $H_{\text{ét}}^N(U_N \otimes_k \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ の部分空間 $H^N(U_N, L_\alpha)^{S_N}$ は α が generic symmetric α とし $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 上-定数で $\text{Gal}(\overline{k}/k)$ の abelian ℓ -adic 表現を定める.

さて Hennart [H] は Waldschmidt の方法の p -進の類似物を考えることにより Serre の予想の証明に成功した. これにより本命題が真になる.

定理 (5.3) ℓ -進表現

$$\rho_\alpha^{S_N} : \text{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow \text{Aut } H^N(U_N, L_\alpha)^{S_N} \cong \overline{\mathbb{Q}_\ell}^*$$

は k の 量指標 (algebraic Hecke character) から得られる α と一致する.

さて $V_N = U_N/S_N$ とすると V_N は smooth affine scheme であり, L_α は étale finite morphism $U_N \rightarrow V_N$ に対して, α が symmetric α とし descent して, rank 1 の smooth $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -sheaf M_α を定める. $H_{\text{ét}}^N(U_N \otimes_k \overline{\mathbb{Q}_\ell}, L_\alpha)^{S_N} = H_c^N(U_N \otimes_k \overline{\mathbb{Q}_\ell}, L_\alpha)^{S_N} = H_c^N(V_N \otimes_k \overline{\mathbb{Q}_\ell}, M_\alpha)$ となる.

p を素数とし, $2n$ と互いに素な素数 ℓ とする. すると U_N , V_N , L_α 等は ℓ mod p で good reduction を持つこととなる. よって $\rho_\alpha^{S_N}$ という ℓ -進表現は $\mathbb{F}_\ell$ の p における $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の place $\mathfrak{p}$ があると $\mathbb{F}_\ell$ 上では不分離. よって $\mathbb{F}_\ell$ の Frobenius の像を

決めることと次の目標になる。

§6. 有限体上で.

この節では V_N 等を reduction modulo p して $\mathbb{F}_q$ 上で考える。

但し, q は p の中で p^f で $\mathbb{F}_{p^f}$ 及び $\sqrt{-1}$ を含む最小のもの。

Grothendieck - Deligne 公式 (cf. SGA 4 $\frac{1}{2}$ [D-I]) によつて, $\rho_{\alpha}^{S_N}$ による Frobenius の像の特性多項式は V_N の closed points における, M_{α} への Frobenius の作用をみれば, それを用いて書き表され, 特性多項式は exponential sum を係数とする多項式となる。

定理 (0.4) は $\alpha \in A^{\pm}$ が generic symmetric という仮定の元では Katz ([K]) の議論の類似を用いて, この closed points の Frobenius の作用を Selberg 和の各項に対応する形にちやうどいふことを見ることが証明される。

§7. 未解決の点。

l -進表現 $\rho_{\alpha}^{S_N}$ に対応する Größen character の infinite type はすでに決つてゐる。weight は N であることは, 構成より明らかであるが, infinite type を $H^2(V_N, \mathbb{C})$ の Hodge structure から決る, $H^2(V_N(\mathbb{C})^{\text{an}}, L_{\alpha})^{S_N}$ の Hodge type と一致して, ± 5 である Hodge type であることは, ρ_{α} の ± 5 は explicit に表わされることが不明である。

References

- [W-1] A.Weil:Jacobi sums as "Grösse character". Trans.Am.Math.Soc.,73 p.487-495(1952) (=全集、巻II、1952d)
- [W-2] A.Weil:Sommes de Jacobi et caractères de Hecke.
(全集、巻III、1974d、p.329-342)
- [D-1] Deligne,P.:Applications de la formule des traces aux sommes trigonometriques. SGA (du Bois-Marie) 4+1/2; Lecture Notes in Math.569, p.168-232, Springer, 1977.
- [S-1] A.Selberg:Bemerkninger om et multipelt integral.
Norske Mat.Tidsskr 26,p.71-78 (1944)
- [E-1] R.Evans:Identities for products of Gauss sums over finite fields.
Enseign.Math.,27(1981),197-209.
- [E-2] R.Evans and W.Root.:Conjectures for Selberg character sums.
J.Ramanujan Math.Soc.3(1),p.111-128 (1988).
- [O-1] Y.Oda:同じ題 I.
Contemporary Math 83, p.159-181 (1989)
- [A-1] K.Aomoto:
Journal of the Math.Soc.Japan 1984
- [T-K] A.Tsuchiya and Y.Kanie:Fock space representation of the Virasoro algebra = Intertwining operators.
Publ. RIMS, Kyoto Univ. 22,p.259-327 (1986)
- [T] T.Terada:Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes I.
Journal of the Math.Soc.Japan, p.451-476 (1983).
- [H] G.Henniart:Représentations $\mathbb{A}$ -adiques abéliennes,
in "Seminaire de Theorie des Nombres, Paris 1980-81,"
Birkhäuser Progress in Math., vol.22, 1982, pp.107-126.
- [K] N.Katz:Crystalline cohomology, Dieudonné modules and Jacobi sums.
Automorphic forms, representation theory, and arithmetic. p.165-246
(Bombay Colloquium, 1979),Springer, 1981.