

連立非線形方程式の一解法

— 悪条件である出発値 —

日本大学生産工学部

平野 菅保 (Sugayasu Hirano)

日本大学大学院生産工学研究科 管 正志 (Masashi Suga)

1. はじめに

連立非線形方程式の代表的な解法の一つに、多変数のニュートン・ラフソン法(以下、ニュートン法と呼ぶ)が用いられる。また、ニュートン法では出発値の設定が必要であるが、その出発値としては、求めたい単根の近くに出発値を設定するのが好ましいが、場合によっては以下のように設定してしまうこともある。

a-① 解と解とのほぼ中間に出発値を設定したとき

a-② 解が集まっている中心付近に出発値を設定したとき

上記のような出発値を設定したときにニュートン法で解くと、以下のような現象が起こることがある。

b-① 出発値から近い求めたい解を通り越して出発値から離れた解に収束する

b-② ヤコビアン行列が特異になり、ニュートン法では求めることができない

つまり、b-①, b-②となるような出発値は”悪条件である出発値”である。

その原因としては、主に次に述べる最大影響項の無視が考えられる。

そこで、最大影響項について定義する。

〔定義〕 最大影響項とは、連立非線形方程式をテーラー展開した式に、数値計算で求めた補正値を代入して、各式の絶対値最大の項をそれぞれの式の”最大影響項”と定義する。

b-①, b-②となる悪条件である出発値から数値計算を行い、各段階の各式の最大影響項を調べると、その最大影響項がテーラー展開の2次以上の項に存在する。

また、その悪条件である出発値と求めたい解との差を補正値として、最大影響項を調べると、数値計算のとき得られた最大影響項と同様に、テーラー展開の2次以上の項に存在する。

つまり、ニュートン法は、連立非線形方程式をテーラー展開の2次以上の項が無視できるとした計算方法であるが、悪条件である出発値のときは2次以上の項が無視できない。言い

換えれば、テーラー展開に2次以上の項に最大影響項が存在するためである。

その結果として、ニュートン法を用いて計算すると、近似解が'飛ぶ'を起こし、求めたい近くの解を通り越して離れた解に収束する場合、近似解が振動して解に収束しない場合がある。また、ヤコビアン行列が特異になりニュートン法で求めることのできないときもある。

このように、2次以上の項が無視できないにもかかわらず、1次の項までを用いて計算するところにニュートン法の欠点があると考えられる。

そこで、本論文では連立非線形方程式の解法として、テーラー展開の3次以上の項には最大影響項が存在しないものとして、2次の項までテーラー展開し、それらの現象の大部分を解決し、常に最大影響項を考慮しながら出発値に近い解に収束させる方法について述べる。

なお、数値例で用いる連立非線形方程式は連立代数方程式であり、解は単根に限定した。また、使用計算機は東芝製TOSBAC UX-300, 16進6桁の単精度複素数計算で行った。

2. 解法

$$\text{連立非線形方程式 } F_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.1)$$

として、 $x_j (j=1, \dots, n)$ の点で、2次の項までテーラー展開し、3次以上の項を無視すると、

$$F_i(x_1+dx_1, \dots, x_n+dx_n) \approx \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} \left[\sum_{j=1}^n dx_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right]^k F_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (2.2) \\ (i=1, \dots, n)$$

式(2.2)の0次の項を右辺に移項すると、

$$\sum_{k=1}^2 \frac{1}{k!} \left[\sum_{j=1}^n dx_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right]^k F_i(x_1, \dots, x_n) = -F_i(x_1, \dots, x_n) \quad (2.3) \\ (i=1, \dots, n)$$

[計算手順]

- 0° $t=0$ として、任意の出発値 $x_j^{(0)} (j=1, \dots, n)$ を設定する。
- 1° 反復 t 回目の近似解 $x_j = x_j^{(t)} (j=1, \dots, n)$ を式(2.3)に代入する。
- 2° 後述する枢軸選択法を用いて、条件①～③を満たしたガウスの消去法で補正值 $dx_j (j=1, \dots, n)$ を求める。
- 3° 以下の式(2.4)より近似解 $x_j^{(t+1)} (j=1, \dots, n)$ を求め、以下の条件 a を満たせば、7°へ、満たさなければ、最後の枢軸要素を係数に持つ変数の補正值を零として4°へいく。

4' 式(2.4)より近似解 $x_j^{(t+1)}$ ($j=1, \dots, n$) を求め直し、条件 a を満たせば、7' へ、満たさなければ、 $\mu = 1$ において 5' へいく。

5' 減速を行う。

[減速]

$\mu := \frac{\mu}{2}$ として、補正值 $dx_j := \mu dx_j$ ($j=1, \dots, n$) を求め直す。

6' 式(2.4)より近似解 $x_j^{(t+1)}$ ($j=1, \dots, n$) を求め直し、条件 a を満たせば、7' へ、満たさなければ 5' へいく。

但し、指定された回数以上の減速を行っても条件 a を満たさないならば、そのときの補正值は採用しない。

7' 求まった近似解 $x_j^{(t+1)}$ ($j=1, \dots, n$) を新たな出発値に設定し、 $t := t + 1$ として 1' へいく。

なお、以下の条件 b の収束判定条件を満たせば、解に収束し、完了する。

$$x_j^{(t+1)} := x_j^{(t)} + dx_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{条件 a: } \sum_{i=1}^n |F_i(x_1^{(t+1)}, \dots, x_n^{(t+1)})| < \sum_{i=1}^n |F_i(x_1^{(t)}, \dots, x_n^{(t)})| \\ \text{条件 b: } \sum_{i=1}^n \left| \frac{F_i(x_1^{(t+1)}, \dots, x_n^{(t+1)})}{\text{方程式 } F_i \text{ の各項の絶対値の最大の項}} \right| \leq p^{-m+1} \end{array} \right.$$

但し、p 進 m 桁計算とする。

[枢軸選択法]

ガウスの消去法の前進消去第 m 段目 ($m=1, \dots, n$) について述べる。

1' 各式の 0 次の項の絶対値の最大 ($|b_{imax}^{(m)}|$) の行を求め、その行を枢軸行 (imax) とする。

但し、m 段目以前の枢軸要素になった行は再び枢軸行とはしない。

2' その枢軸行で各項ごとに仮補正值を求める。

なお、係数が零のときは、仮補正值は求めない。

◎ dx_j の項 ($j=1, \dots, n$) のとき

$$dx_{(j,0)} = \frac{-b_{imax}^{(m)}}{a_{imax,j,0}^{(m)}} \quad (2.5)$$

◎ $dx_{j1} dx_{j2}$ の項 ($j1, j2=1, \dots, n, j1 \neq j2$) のとき

$$dx_{(j1,j2)} = \pm \left[\frac{-b_{imax}^{(m)}}{a_{imax,j1,j2}^{(m)}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{複号同順}) \quad (2.6)$$

◎ $d x_j^2$ の項 ($j=1, \dots, n$) のとき

$$d x_{(j, j)} = \pm \left[\frac{-b_{i \max}^{(m)}}{a_{i \max, j, j}^{(m)}} \right]^{1/2} \quad (2.7)$$

3' これらの仮補正值の絶対値が最小である項の係数を枢軸要素とする。

$$|d x_{(k_1, k_2)}| = \text{Min} (|d x_{(j_1, j_2)}|) \\ (j_1, j_2 = 0, 1, \dots, n, j_1 \neq 0)$$

$$\begin{cases} k_2 = 0 \text{ ならば、} d x_{k_1} \text{ の項の係数を枢軸要素とする。} \\ k_1 \neq k_2 \text{ ならば、} d x_{k_1} d x_{k_2} \text{ の項の係数を枢軸要素とする。} \\ k_1 = k_2 \text{ ならば、} d x_{k_1}^2 \text{ の項の係数を枢軸要素とする。} \end{cases}$$

但し、係数が零のために仮補正值を求めなかった項の係数は、枢軸要素の対象から除く。また、枢軸要素を係数に持つ変数がある消去以前の枢軸要素を係数に持つ変数のとき、それらの要素を枢軸要素としない。

[条件]

- ① 枢軸要素になる要素が存在しないときは、その時点で前進消去を終了して、後退代入する。
- ② 後退代入のとき、枢軸要素に2次の項の変数を用いたときは後退代入で求めた値の平方根を補正值とする。
- ③ 枢軸要素に採用しなかった項の変数の補正值は零とする。

3. 数値例1

3.1 数値例について

奥村ら⁽¹⁾の例題より、図3.1のようにトンネルダイオードを直列に接続されたときのトンネルダイオードの特性を式(3.1), (3.2)とし、回路方程式を式(3.3), (3.4)とする。

$$\begin{cases} T_1 : g_1(v_1) = 2.5 v_1^3 - 10.5 v_1^2 + 11.8 v_1 \quad (3.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_2 : g_2(v_2) = 0.43 v_2^3 - 2.69 v_2^2 + 4.56 v_2 \quad (3.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(v_1, v_2) = E - R \cdot g_1(v_1) - (v_1 + v_2) = 0 \quad (3.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(v_1, v_2) = g_1(v_1) - g_2(v_2) = 0 \quad (3.4) \end{cases}$$

式(3.1), (3.2)を式(3.3), (3.4)に代入して、
 $E = 30.0 [\text{V}]$, $R = 13.3 [\Omega]$ とし、

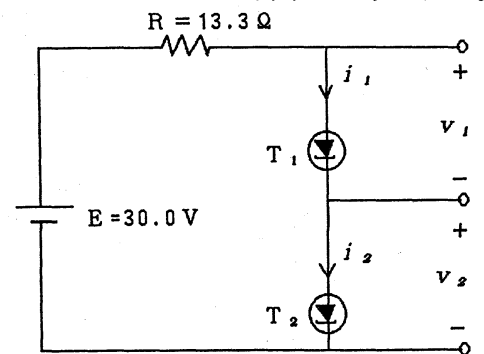


図3.1 回路図

$v_i = x_i, f_i(v_1, v_2) = F_i(x_1, x_2) (i=1, 2)$ とすると、連立代数方程式は、

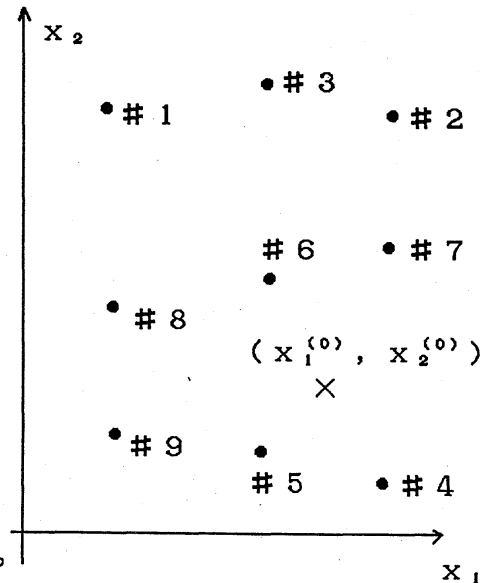
$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2) = -33.25x_1^3 + 139.65x_1^2 - 157.94x_1 - x_2 + 30.0 = 0 & (3.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2(x_1, x_2) = 2.5x_1^3 - 10.5x_1^2 + 11.8x_1 - 0.43x_2^3 + 2.69x_2^2 - 4.56x_2 = 0 & (3.6) \end{cases}$$

式(3.5), (3.6)の真値⁽¹⁾を表3.1、連立代数方程式の解の分布を図3.2に示す。

表3.1 真値

解(i)	$X_{T:1}$	$X_{T:2}$	解(i)	$X_{T:1}$	$X_{T:2}$
#1	0.1998	3.7442	#6	1.7027	1.8090
#2	2.2247	3.6930	#7	2.2776	1.8575
#3	1.7755	3.7072	#8	0.2199	1.6730
#4	2.3055	0.7056	#9	0.2282	0.8286
#5	1.6663	0.7393			



解#4～#7の中心付近に出発値を以下のように与える。

$$x_1^{(0)} = 2.000000, x_2^{(0)} = 1.230000 \quad \text{図3.2 連立代数方程式の解}$$

そこで、各真値と出発値との距離を求めて、出発値から最も近い解を調べると、解#5が出発値から最も近い解であった。その解#5と出発値との差は、以下のようになる。

$$dx_1 = X_{T51} - x_1^{(0)} = -0.3337002, dx_2 = X_{T52} - x_2^{(0)} = -0.4906996$$

この dx_1, dx_2 を式(3.5), (3.6)をテーラー展開の2次の項まで展開した式に代入して、各式の各項の絶対値及び最大影響項を表3.2に示す。なお、最大影響項は ■ で示す。

表3.2 最大影響項について

	第1式	第2式	合計
第1項(dx_1)	0.5539129	0.06673896	0.6206519
第2項(dx_2)	0.4906996	0.05189547	0.5425950
第3項($dx_1 dx_2$)	0.000000	0.000000	0.000000
第4項(dx_1^2)	6.864645	0.5011012	7.165746
第5項(dx_2^2)	0.000000	0.2656593	0.2656593

つまり、最大影響項は、第4項(dx_1^2 の項)となる。

出発値($x_1^{(0)} = 2.0, x_2^{(0)} = 1.23$)は、ニュートン法で解くと、近似解が'飛ぶ'を起こし、出発値から近い解(井5)には収束せず、出発値から離れた解(井9)に収束した。

3.2 考案した解法による計算結果

出発値($x_1^{(0)} = 2.0, x_2^{(0)} = 1.23$)において、反復1回目のガウスの消去法の前進消去第1段目を行うために、枢軸選択法を行う。

$$1' \quad |b_{\max}^{(1)}| = \max(|b_1^{(1)}| = 5.489975, |b_2^{(1)}| = 0.7392668) = |b_1^{(1)}|$$

つまり、第1式を枢軸行とする。

2' 仮補正值を求める。

$$\text{第1項: } dx_{(1,0)} = -3.307875$$

$$\text{第2項: } dx_{(2,0)} = 5.489975$$

第3項: 係数が零のため、仮補正值は求めない

$$\text{第4項: } dx_{(1,1)} = \pm 0.3028675$$

第5項: 係数が零のため、仮補正值は求めない

3' 仮補正值の絶対値の最小である項の係数を枢軸要素とするので、 dx_1^2 の項の係数を枢軸要素としてガウスの消去法の前進消去を行う。

ガウスの消去法の前進消去第2段目を行う。

1' 枢軸行は、第2式となる。

2' 仮補正值を求めるが、前進消去第1段目において、 dx_1^2 の項の係数を枢軸要素としたため、 dx_1 を変数に持つ要素を枢軸要素の対象から除く。つまり、 dx_2 のみを変数に持つ係数から枢軸要素を選択する。

$$\text{第2項: } dx_{(2,0)} = 10.67972$$

$$\text{第5項: } dx_{(2,2)} = \pm 0.5439837$$

3' 仮補正值の絶対値の最小である項の係数を枢軸要素とすると、 dx_2^2 の項の係数を枢軸要素として、ガウスの消去法の前進消去を行い、後退代入を行う。

そこで求まった補正值は、4つ得られる。

$$dx_1 = \pm 0.3028674, dx_2 = \pm 0.5439837$$

そのときの近似解は、以下のようになる。

$$\text{近似解1} \quad \begin{matrix} x_1^{(1)} = 2.302867 \\ x_2^{(1)} = 1.773983 \end{matrix}$$

$$\text{近似解2} \quad \begin{matrix} x_1^{(1)} = 2.302867 \\ x_2^{(1)} = 0.6860163 \end{matrix}$$

$$\text{近似解3} \quad \begin{matrix} x_1^{(1)} = 1.697132 \\ x_2^{(1)} = 1.773983 \end{matrix}$$

$$\text{近似解4} \quad \begin{matrix} x_1^{(1)} = 1.697132 \\ x_2^{(1)} = 0.6860163 \end{matrix}$$

これらの近似解は、条件aを満たしているので、近似解1~4を新たな出発値として反復計算させると、条件aを満たし、解に収束した。また、消去法における枢軸要素はすべて1次

の項が枢軸要素となった。つまり、反復2回目以降の計算はニュートン法の計算と同じであった。収束した解は、以下ようになった。反復回数は、全ての近似解が3回で解に収束した。

$$\begin{array}{l} \text{近似解1} \quad x_1^{(3)} = 2.277600 \\ \quad \quad \quad x_2^{(3)} = 1.857501 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{近似解2} \quad x_1^{(3)} = 2.305222 \\ \quad \quad \quad x_2^{(3)} = 0.7055446 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{近似解3} \quad x_1^{(3)} = 1.702662 \\ \quad \quad \quad x_2^{(3)} = 1.809035 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{近似解4} \quad x_1^{(3)} = 1.666381 \\ \quad \quad \quad x_2^{(3)} = 0.7393324 \end{array}$$

近似解1は解#7, 近似解2は解#4, 近似解3は解#6, 近似解4は解#5に収束した。つまり、出発値から近い解#5にも収束した。

4. 数値例2

4.1 数値例について

数値例として、伊理⁽²⁾の例2の例題の連立代数方程式

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 6y - 77 = 0 & (4.1) \\ f_2(x, y) = x^2 - 9y^2 - 16 = 0 & (4.2) \end{cases}$$

$x = x_1, y = x_2, f_i(x, y) = F_i(x_1, x_2) (i=1, 2)$ とすると、連立代数方程式は、

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 - 77 = 0 & (4.3) \\ F_2(x_1, x_2) = x_1^2 - 9x_2^2 - 16 = 0 & (4.4) \end{cases}$$

式(4.3), (4.4)の真値 $x_{T:1}, x_{T:2}$ は表4.1に示す。また、式(4.3), (4.4)の図は図4.1に示す。

表4.1 真値

解(i)	$x_{T:1}$	$x_{T:2}$
#1	-6.053892	1.514728
#2	7.247497	-2.014564
#3	-7.274014	-2.025155
#4	16.08041	5.191656

出発値を以下のように与える。

$$x_1^{(0)} = 0.0, x_2^{(0)} = 0.0$$

そこで、真値と出発値との距離を求めて、出発値から最も近い解を調べると、解#1が出発値から最も近い解であった。その解#1と出発値との差は、以下ようになる。

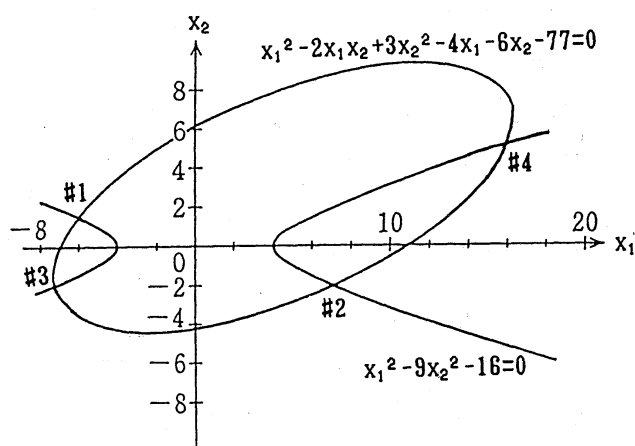


図4.1 連立代数方程式の解

$$d x_1 = x_{T11} - x_1^{(0)} = -6.053891, d x_2 = x_{T12} - x_2^{(0)} = 1.514728$$

この $d x_1, d x_2$ を式(4.3), (4.4) をテーラー展開の2次の項まで展開した式に代入して、各式の各項の絶対値及び最大影響項は表4.2に示す。なお、最大影響項は■で示す。

表4.2 最大影響項について

	第1式	第2式	合 計
第1項($d x_1$)	24.21556	0.000000	24.21556
第2項($d x_2$)	9.088366	0.000000	9.088366
第3項($d x_1 d x_2$)	18.33998	0.000000	18.33998
第4項($d x_1^2$)	36.64960	36.64960	73.29919
第5項($d x_2^2$)	6.883199	20.64958	27.53278

つまり、最大影響項は、第4項($d x_1^2$ の項)となる。

出発値($x_1^{(0)} = 0.0, x_2^{(0)} = 0.0$)は、ヤコビアン行列が特異となり、ニュートン法で解くことができない例である。

4.2 考案した解法による計算結果

出発値($x_1^{(0)} = 0.0, x_2^{(0)} = 0.0$)において、反復1回目の計算し、求まった補正值は、4つ得られる。

なお、枢軸要素は1回目 $d x_2^2$, 2回目 $d x_1^2$ を係数に持つ要素であった。

$$d x_1 = \pm 7.858115, d x_2 = \pm 2.254626$$

そのときの近似解は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{近似解1} \quad x_1^{(1)} &= 7.858115 \\ x_2^{(1)} &= 2.254626 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{近似解2} \quad x_1^{(1)} &= 7.858115 \\ x_2^{(1)} &= -2.254626 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{近似解3} \quad x_1^{(1)} &= -7.858115 \\ x_2^{(1)} &= 2.254626 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{近似解4} \quad x_1^{(1)} &= -7.858115 \\ x_2^{(1)} &= -2.254626 \end{aligned}$$

これらの近似解は、条件aを満たしているので、近似解1~4を新たな出発値として反復計算する。

近似解1の反復2回目で求まった補正值は2つ得られる。

なお、枢軸要素は1回目 $d x_2^2$, 2回目 $d x_1$ を係数に持つ要素であった。

$$d x_1 = 6.459604, d x_2 = \pm 3.358579$$

そのときの近似解(近似解1, 近似解5)は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{近似解1} \quad x_1^{(2)} &= 14.31772 \\ x_2^{(2)} &= 5.613205 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{近似解5} \quad x_1^{(2)} &= 14.31772 \\ x_2^{(2)} &= -1.103953 \end{aligned}$$

近似解1は、条件aを満たさないで、最後の枢軸要素の変数 $d x_1$ の補正値を零として、近似解1を求め直すと以下ようになる。

$$\begin{aligned} \text{近似解1} \quad x_1^{(2)} &= 7.858115 \\ x_2^{(2)} &= 5.613205 \end{aligned}$$

求め直した近似解1も条件aを満たさないで、減速を行い、近似解1は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \text{近似解1} \quad x_1^{(2)} &= 7.858115 \\ x_2^{(2)} &= 3.933916 \end{aligned}$$

減速して求め直した近似解1も条件aを満たさないで、さらに減速を行うが、条件aを満たさないで、この補正値は採用しない。

近似解5は、条件aを満たさないで、最後の枢軸要素の変数 $d x_1$ の補正値を零として、近似解5を求め直すと以下ようになる。

$$\begin{aligned} \text{近似解5} \quad x_1^{(2)} &= 7.858115 \\ x_2^{(2)} &= -1.103953 \end{aligned}$$

求め直した近似解5は、条件aを満たしたので、求まった近似解を新たな出発値として反復計算する。

さらに、近似解2～5を反復計算させると、条件aを満たして、解に収束した。また、消去法における枢軸要素はすべて1次の項が枢軸要素となった。

つまり、近似解2～4は反復2回目以降、近似解5は反復3回目以降の計算はニュートン法の計算と同じであった。

収束した解は、以下ようになる。反復回数は、近似解2は4回、近似解3は4回、近似解4は5回、近似解5は6回で解に収束した。

$$\begin{aligned} \text{近似解2} \quad x_1^{(4)} &= 7.247494 & \text{近似解3} \quad x_1^{(4)} &= -7.274013 \\ x_2^{(4)} &= -2.014563 & x_2^{(4)} &= -2.025155 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{近似解4} \quad x_1^{(5)} &= -6.053893 & \text{近似解5} \quad x_1^{(6)} &= 7.247493 \\ x_2^{(5)} &= 1.514729 & x_2^{(6)} &= -2.014563 \end{aligned}$$

近似解2は解#2, 近似解3は解#3, 近似解4は解#1, 近似解5は解#2に収束した。
つまり、出発値から近い解#1にも収束した。

5. 結論

新解法を用いると、各反復計算過程において、常に最大影響項を用いて補正値を求めて、出発値から近い解に収束させることができた。

数値例1, 数値例2の計算において、最大影響項を用いているかについて、以下の3つの変数

について調べてみた。

- ① 新解法における、反復 t 回目の計算で補正值を求めるときに用いた枢軸選択法で選択した枢軸要素に持つ変数
- ② 新解法における、反復 t 回目で求めた補正值をテーラー展開の2次の項まで展開した式に代入して、各式の絶対値最大の項の変数
- ③ 出発値と求めたい解との差(補正值)をテーラー展開の2次の項まで展開した式に代入して、各式の絶対値最大の項の変数

以上の①～③の変数を調べてみると、一応、それらの変数が一致した。

よって、最大影響項を用いて反復計算していることになる。

新解法の特徴については、各消去段階で用いてよい式の中で、影響力のある式を選び、その式の最大影響項を選択し、その項の係数を枢軸として、消去して補正值を求めるのが特徴である。

つまり、0次の項の絶対値最大の式を影響力のある式と考えて、その式中の最大影響項を枢軸要素としている。また、新解法は、ガウスの消去法を用いているので、方程式間の従属関係を考慮して解いた解法でもあり、新解法の反復計算における特徴としては、2次の項を枢軸要素に複数回数用いると、複数個の解が得られ、出発値から近い求めたい解が得られることができるが、同一の解に収束することもある。

以上のことより、この新解法は、最大影響項と方程式間の従属関係とを考慮して、一応、悪条件である出発値から近い求めたい解に収束させることができた。

【参考文献】

- (1) 奥村 浩士, 佐伯 秀一, 木嶋 昭: 区間解析による非線形回路方程式の
求解アルゴリズムに関する一考察
電子通信学会論文誌(A)(1986), Vol. J69-A, NO. 4, p. 489-p. 496.
- (2) 伊理 正夫: 数値計算 - 方程式の解法 (朝倉書店, 1981), p. 42.
- (3) 管 正志: 連立非線形方程式の解法 - 悪条件である出発値 -
日本大学大学院生産工学研究科数理工学専攻平成2年度修士論文(1991).