

素 粒 子 論 と SCALING

京大基研 牟 田 泰 三

目 次

- §1. 序 論
- §2. パートン模型
- §3. 光錐特異性
- §4. くり込み群的考察
- §5. スケーリングの破れ

§1. 序 論

素粒子論の分野でここ5～6年来一つの大きな話題となっている scaling という現象について、物性論関係の方々のための解説を書くこへになりましたが、素粒子論に於けるこの方面の研究が未だ開発途上で特にまとまったレビューがない状況を鑑み、ここでは特に物性向けと限定せず、この機会に私の個人的偏見もまじえた総合報告を試みてみたいと思います。相転移等に現れる scaling との関連を考察するのも興味あることだと思いますが、それは私の物性論に対する幼稚な知識では不可能ですので、別の機会に適当な方に試みて頂きたいと思います。

scaling という言葉を最初に物理学に於て使い始めたのは誰だか知りませんが、どうも日本語にしにくい言葉です。現在使っている意味からすると「尺度縮退」とでもしたらいいのでしょうか。あまり無理に翻訳しても仕方がないので、素直にスケーリングとしておきましょう、言葉の問題はともかく、スケーリングという概念そのものは何も新しいものではなく、個々の物理現象に於て昔から知られていたものです。例えば、流体力学に於て、特定の境界条件の下での流れの形はレイノルズ数という無次元量のみで決まるということは良く知られています。スケーリングという言葉を使えば、このことは、

牟田泰三

流れの形を決める変数としての流れの速度×長さ×密度と粘性率がスケールしていると言い換えていいでしょう。また、空洞輻射に於ける Wien の変位則もスケーリングの一例です。即ち、輻射の振動数分布は、振動数 ν と温度の関数として ν/T のようにスケールしています。これがプランクの公式への重要な手がかりを与えたことは衆知のことで、物理学の転換点でスケーリングが重要な働きをした好例だと思います。

最近の素粒子物理学に於てスケーリングというものが重視されている背景には、このたうな物理的発展のための一つの突破口としての期待もあるのかも知れません。実際、スケーリング特にビョルケン (Bjorken) スケーリングと呼ばれているものは、強い相互作用をする素粒子即ちハドロン (hadron) の複合粒子としての性質を反映しているのではないかと思います。高エネルギー素粒子反応に於けるハドロンの内部構造、特にその構成子 (constituent) の特別な性質がスケーリングと密接な関係にあることを以下の各章でみてゆくことにしましょう。勿論、スケーリングに対して、ハドロンの複合性 (compositeness) というものを仮定しない説明というものも可能かも知れませんが、現在のところ種々の実験的挑戦に最も良く耐えているという意味でハドロンの複合性にもとづく議論を小稿ではとり上げます。

Bjorken は 1969 年に、高エネルギー電子・陽子非弾性散乱の構造関数に対するスケーリングを、かなり強引な方法で導きました¹⁾。スケーリングの現象自体はその前年すでに SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) に於ける電子散乱実験でその徴候を現わしており²⁾、この時期に SLAC で Bjorken の考えと実験データとの間に強い相関が働いていたに違いありません。このようなレプトン (lepton 軽粒子: e, μ, ν 等強い相互作用をしない素粒子) とハドロンとの非弾性散乱の構造関数に対するスケーリングを一般に Bjorken scaling と呼んでいます。これは §4 で述べる canonical scaling に相当します。Bjorken scaling の具体的内容をみるために少し式を書くことにします³⁾。SLAC での実験は $e+p \rightarrow e + \text{hadrons}$ のようなもので、静止した陽子(p) ターゲットに電子ビームをあて、散乱された電子のみ観測して陽子から発生するハドロンは一切観測しないというものです。この実験ではかられる散乱断面積は、電磁相互作用の最低次で

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} [W_2(\nu, q^2) + 2W_1(\nu, q^2) \tan \theta] \quad (1)$$

E 入射電子のエネルギー

E' 散乱された電子のエネルギー

θ 電子の散乱角 ($d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$, ϕ = 方位角)

$\nu = E - E'$ エネルギー transfer

$q^2 = 4EE' \sin^2(\theta/2)$ 運動量 transfer の2乗

と書くことができます。ここで、 $(d\sigma/d\Omega)_{\text{Mott}}$ は、いわゆるモット散乱断面積で、陽子を点状荷電粒子と見なしたときの電子・陽子弾性散乱断面積であって、良く知られたラザフォードの公式にスピンの効果を入れたものです。ここでは必要ないので特に $(d\sigma/d\Omega)_{\text{Mott}}$ の具体的な式は書きません。大切なことは $(d\sigma/d\Omega)_{\text{Mott}}$ が点電荷による電子の散乱断面積であって、式(1)は $(d\sigma/d\Omega)_{\text{Mott}}$ からのずれを W_1, W_2 という関数で表しているということです。即ち、 W_1, W_2 という関数は陽子が点電荷からどのくらいずれているかを表す関数で、構造関数 (structure functions) と呼ばれています。これは、電子・陽子弾性散乱の場合の構造因子 (form factors) に対応するものです。

Bjorken は、 ν と q^2 が非常に大きい ν/q^2 は有限という極限 (Bjorken limit 又は scaling limit) では、 νW_2 及び $2MW_1$ (M は陽子質量で factor 2 は便宜上つけたものです) は ν/q^2 のみの関数となることを示しました (これは完全な証明にはなっていません)。即ち、 $\omega = 2M\nu/q^2$ とおくと、

$$\left. \begin{array}{l} \nu W_2(\nu, q^2) \rightarrow F_2(\omega) \\ 2MW_1(\nu, q^2) \rightarrow F_1(\omega) \end{array} \right\} \text{ as } \nu, q^2 \rightarrow \infty \text{ with } \omega \text{ fixed} \quad (2)$$

このような極限での散乱を deep inelastic scattering と呼んでいます。

ところで、電子・陽子非弾性散乱の実験では、入射電子のエネルギー E とその散乱角 θ をきめ、散乱された電子のエネルギー・スペクトルを測ります。この測定を色々な E と θ の組について行えば、 $\nu = E - E'$ 及び $q^2 = 4EE' \sin^2(\theta/2)$ の色々な値に対する構造関数 W_1 及び W_2 を知ることができます。実験データによると、 q^2 が小さいときは構造関数の ν についての変化は、陽子の励起スペクトルに特徴的な振舞い (即ち共鳴構造) をしますが、 q^2 が大きくなると共鳴構造は急速に失われ、 ν について連続スペクトルを

牟田泰三

示すようになります。このような領域 ($2 < q^2 < 20 \text{ Ge V}^2$) で Bjorken scaling が大変きれいに成立っていることが、SLAC のデータによりわかっています⁴⁾。更に q^2 の大きいところでも成立しているかどうかは、現在 FNAL (Fermi National Accelerator Laboratory) で行われている μ -p 散乱実験により明らかになると思われます。 q^2 の大きいところで Bjorken scaling が破れているのではないかという予想もあります。

Bjorken が示したことは、実はもっと初等的な次元解析によって理解できます。断面積は長さの 2 乗の次元を持つので、 $d\sigma/d\Omega dE'$ の次元は

$$\dim[d\sigma/d\Omega dE'] = [L^3]$$

従って、 W_1, W_2 は $[L]$ の次元を持っています。ところで Bjorken limit では ν も q^2 も大きくて、これにくらべたら陽子の質量 M は無視でき、次元を与える量は ν と q^2 のみになります。もし或る無次元量 (ν と q^2 の関係) が、Bjorken limit で 0 でも ∞ でもない有限の値をもつなら、それは ν/q^2 即ち ω のみの関数でなければならないはずです。 W_1, W_2 の定義式は³⁾

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &\equiv (1/2\pi) \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle N_p | j_\mu(x) j_\nu(0) | N_p \rangle \\ &= (k_\mu k_\nu / k^2 - g_{\mu\nu}) W_1 + (1/M^2) (p_\mu - p \cdot k k_\mu / k^2) (p_\nu - p \cdot k k_\nu / k^2) W_2 \end{aligned} \quad (3)$$

但し、 k_μ は入射電子と散乱された電子の間の 4 元運動量 transfer で $k^2 = -q^2$ 、 p_μ は陽子の 4 元運動量で今考えている実験室系では $p_\mu = (M, 0, 0, 0)$ 、 $j_\mu(x)$ は 4 元電流、 N_p は核子 (今は陽子) の状態を表します^{*})。陽子のスピンについては平均操作がほどこされています。さて、この $W_{\mu\nu}$ が Bjorken limit で有限であると仮定すれば、 νW_2 と $2M W_1$ が無次元で有限となりますから、先ほどの議論からこれは ν/q^2 のみの関数となり、Bjorken scaling (2) が導かれます。この導き方で重要な点は、Bjorken limit で考えている無次元量が 0 でも ∞ でもない有限な値をとるという仮定で、この仮定があれば、あとは trivial なことです。即ち、スケーリングを証明するということは、この

^{*}) 小稿での記号の約束は次の通り。 $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ 。従って、例えば $p \cdot k = p_0 k_0 - \vec{p} \cdot \vec{k}$ 。1 粒子状態規格化条件は $\langle N_p | N_p \rangle = (2\pi)^3 2 p_0 \delta^3(p' - p)$ 。勿論 $\hbar = c = 1$ の単位系をとる。

ことを証明するのと同様です。§ 2 ではパートン (parton) 模型の立場から、§ 3 では自由場の光錐特異性 (light-cone singularity) の立場から Bjorken scaling を導きます。

一般の素粒子反応に対して Bjorken scaling の考えを拡張するのは容易です。素粒子反応で $A + B \rightarrow A + B$ のようなものを弾性散乱、 $A + B \rightarrow C + D$ を 2 体反応と呼ぶのは自明のことですが、 $A + B \rightarrow C + \text{hadrons}$ のように粒子の生成を伴うとき A, B, C のみ観測する実験を inclusive experiment (包括実験) と言い、この反応を inclusive reaction と呼びます。⁵⁾ 先ほどの電子・陽子弾性散乱は、この inclusive experiment の一例です。弾性散乱は 2 体反応の特殊ケースと考えられるので、以下では 2 体反応と包括反応のみ考えることにします。粒子 A, B, C, D の 4 元運動量を夫々 p_A, p_B, p_C, p_D と書くと、2 体反応 $A + B \rightarrow C + D$ は 2 個の相対論的不変な変数

$$s = (p_A + p_B)^2, \quad t = (p_C - p_A)^2$$

によって記述され、包括反応 $A + B \rightarrow C + X$ は 3 個の変数 s, t 及び

$$u = (p_C - p_B)^2$$

によって記述されます。ここで、 X は包括実験で生成されるが観測されないハドロンの集まりを表します。さて、これらの反応に対して Bjorken scaling を拡張すればどうなるでしょうか。

$A + B \rightarrow C + D$

2 体反応の微分断面積 $d\sigma/dt$ は、scaling limit

$$s \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad t/s = \text{finite}$$

で次のような s についての power law を満たす。

$$d\sigma/dt = s^{-\alpha} f(t/s) \quad (4)$$

これを一般に scaling と呼んでいて、ハドロン散乱の実験で確かめられています。

牟田泰三

もし次元解析を単純に適用するなら $\alpha = 2$ ですが、実験では $pp \rightarrow pp$ で $\alpha \sim 10$,
 $\pi p \rightarrow \pi p$ で $\alpha \sim 8$, $p p \rightarrow \pi^+ n$ で $\alpha \sim 7$ となっているようです。⁶⁾

A + B $\rightarrow$ C + X

包括実験に於て終状態で detect される粒子 C の運動量スペクトルは、包括断面積 $E_C d\sigma/d^3p_C$ で与えられ (E_C は C のエネルギーで、断面積を相対論的不変にするためにかけてあります), scaling limit

$$s \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow -\infty, \quad u \rightarrow -\infty, \quad t/s = \text{finite}, \quad u/s = \text{finite}$$

では

$$E_C d\sigma/d^3p_C = s^{-\beta} f(t/s, u/s) \quad (5)$$

現在のところ、 $pp \rightarrow \pi X$ の実験データは $\beta \sim 4$ と consistent のようです。⁶⁾ 先ほど Bjorken scaling の説明に用いた反応 $ep \rightarrow eX$ は包括反応の一例で、式(5)を実験室系での C 粒子のエネルギーと散乱角で書き直して式(1)と比較し、式(2)を考察すれば $\beta = 2$ であることがわかります。

ここで導入した一般化された Bjorken scaling を単に scaling と呼ぶことにしましょう。^{*} 式(4)や(5)のような scaling が成り立つということは決して trivial なことではありません。実際、式(4)や(5)で $s^{-\alpha}$ や $s^{-\beta}$ の代りに $\exp(-as)$ の形であってもよかったかも知れません。しかし実験データは指数関数的な急速な減少を示さず、前述のように power law を示すのです。このことは大角度方向への散乱の確率が異常に大きいことに対応します。Rutherford の古典的実験を引き合いに出すまでもなく、この事実はハドロンの内部に点状の散乱中心が存在することを暗示しているように思えます。くわしくは § 2 で議論することにししょう。ここで、電子散乱を除いて全ての実験データで指数 α と β が単純な次元解析から予想される値と狂っていることに注意して下さい。こ

^{*}) この scaling は、いわゆる Feynman scaling と呼ばれているものを含みません。ここで言っている scaling が散乱された粒子の横運動の大きい領域を問題にするのに対して、Feynman scaling は横運動量が小さくて縦運動量の大きい領域を問題にします。Feynman scaling については本稿ではふれません。例えば文献(5)を御参照下さい。

のことは電子（一般にはレプトン）が構造を持たず、ハドロンは構造を持つということと関連しているようです。この点についても次章以下で詳しくみてゆくことにしましょう。

§2. パートン模型

文章の長さを節約するため以下「です」調から「である」調に変えます。

電子と陽子の deep inelastic scattering でみられる Bjorken scaling は、陽子の複合構造と密接な関連があるらしいということはすでに前章で述べた。この章では、陽子に対して複合構造を仮定し、その構成子に或る性質を仮定すると、Bjorken scaling を導くことができるということを示そう。ここで現れる構成子を Feynman の命名によりパートン (parton) と呼び、⁷⁾このような複合模型をパートン模型 (parton model) と呼んでいる。もっと正確にパートンを定義すると次のようになる。⁸⁾

- (1) ハドロンの基本的構成要素である。
- (2) pointlike (structureless) である (場の理論の bare particle のようなもの)
- (3) scaling limit ではほとんど自由粒子のようにふるまう。

電子・陽子散乱で陽子の中のパートンが pointlike でほとんど free に見えるためには、パートンを拘束して陽子を構成している強い相互作用の相互作用時間にくらべて、電子とパートンとの電磁相互作用の時間の方が圧倒的に短かければ良い。そのような条件は確かに scaling limit で満されていることがわかる。⁸⁾ そこで、これだけの条件をもとにして、強い相互作用に対する場の理論的考察から、構造関数に対する Bjorken scaling を導いてみよう。

仮定により、陽子はパートンから成る複合粒子であるから、陽子の状態はパートンの状態の完全系で展開でき

$$|N_p\rangle = \sum a_n |n\rangle$$

と書ける。ここで、 $|n\rangle$ は n 個のパートンの状態を表し、 a_n は陽子の中で n 個のパートンを見出す確率振幅である。和は n 及びパートンの運動量やスピンについてとるものとする。これを式(3)に代入し、非対角要素は deep inelastic region できかないとして neglect すると

$$W_{\mu\nu} = (1/2\pi) \sum |a_n|^2 \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle n | j_\mu(x) j_\nu(0) | n \rangle \quad (6)$$

スピン 1/2, 電荷 Q_i のパートン場を ψ_i , スピン 0, 電荷 Q'_i のパートン場を ϕ_i と書く
と (i はパートンの種類を表す添字), 4 元電流 $j_\mu(x)$ は次のように書ける。

$$j_\mu = \sum_i Q_i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_i - i \sum_i Q'_i \phi_i^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_i \quad (7)$$

式(7)を(6)に代入し, scaling limit でパートンは free と考えてよいという仮定を用い
ると, scaling limit での $W_{\mu\nu}$ を求めることができる。⁹⁾ 式(3)より, W_1, W_2 を求めると

$$2MW_1(\nu, q^2) = \sum |a_n|^2 \sum_i Q_i^2 \delta(\eta_i - 1/\omega) \quad (8)$$

$$\nu W_2(\nu, q^2) = (1/\omega) \sum |a_n|^2 \{ \sum_i Q_i^2 \delta(\eta_i - 1/\omega) + \sum_i Q_i'^2 \delta(\eta_i - 1/\omega) \}$$

但し, パートンの横運動量は無視できて, 縦運動量は陽子の運動量の η_i 倍である ($\eta_i \leq 1$) とした。式(8)により, $2MW_1$ と νW_2 が ω のみの関数になっていることがわかる。
これがパートン模型による Bjorken scaling 導出の概略である。式(8)を見ればわかる
通り, 変数 ν, q^2 できまる deep inelastic scattering では, 縦運動量の割合 η_i が
丁度 $1/\omega (= q^2/2M\nu)$ に一致するパートンしか電子と相互作用していない (このこと
がスケールリングを保証している)。従って deep inelastic scattering を ω の値を変
えて行えば, 陽子の中でのパートンの運動量分布を知ることができる。図 1 はその実験
データである。¹⁰⁾

更に式(8)からわかることは, $W_1 - (\nu^2/q^2) W_2$ という量にはスピン 1/2 のパートンの寄
与がないということで, これに対する実験データを見ればスピン 0 のパートンがどの位
寄与しているか知ることができる。実験によるとこの寄与は大変小さいことがわかって
いるので,¹¹⁾ パートンはスピンが 1/2 であると結論できる。(スピン 1 については § 4
参照)。

パートン模型から $ep \rightarrow eX$ に於ける Bjorken scaling が容易に導かれることを示し
たが, 同様のことは弱い相互作用を媒介とした過程 $\nu p \rightarrow \mu X$ についても示すことができ

る。一般にレプトン・ハドロン包括過程の Bjorken scaling はパートン模型によって説明できるのである。

これ迄考えてきたレプトン・ハドロン包括過程では、 $k^2 (= -q^2)$ は spacelike ($k^2 < 0$) であるが、 $e^+ e^- \rightarrow X$ や $pp \rightarrow \mu^+ \mu^- X$ のような反応では k^2 はレプトン系の重心系での全エネルギーの2乗となり timelike ($k^2 > 0$) である。このような

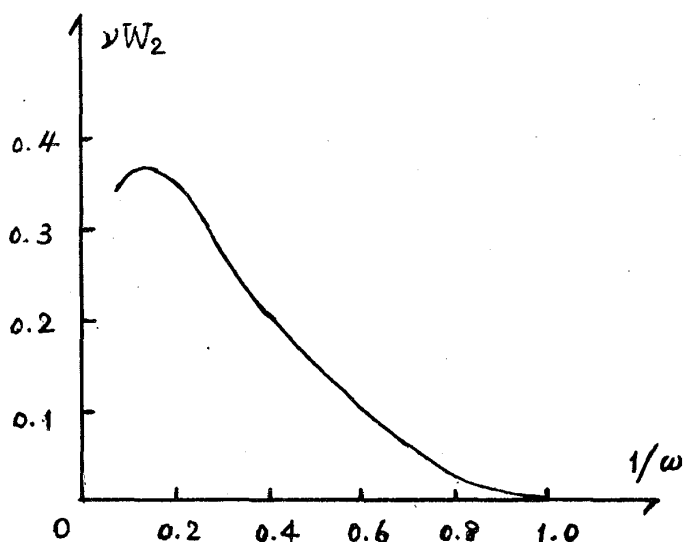


図 1

反応の scaling limit に対してもパートン模型を適用することができる。電子・陽電子対消滅 $e^+ e^- \rightarrow X$ (X は主として π 中間子) の高エネルギー実験は、 e^+ と e^- のビームを storage ring 中で衝突させることによって行われる。これは重心系そのものである。実験室系に直すと膨大なエネルギーの衝突になる。現在の実験装置で到達できる重心系全エネルギーは 10 GeV 程度であるから、これを静止した電子に対する陽電子のエネルギーに換算すると 10^5 GeV となる。さて、この反応の全断面積は¹²⁾

$$\sigma = (8\pi\alpha^2/s) w(s), \quad s = k^2 \quad (9)$$

$$(k_\mu k_\nu - j^2 g_{\mu\nu}) w(s) = \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle$$

と書ける。但し、電磁相互作用については最低次をとった (1 光子近似)。 $\alpha = 1/137$ は微細構造定数で k_μ は e^+ と e^- の全運動量である。式(9)の $j_\mu(x)$ に対してパートン模型で与えられる式(7)を代入し、パートンがほとんど free であるということを用いると、scaling limit (この場合 $s \rightarrow \infty$) では¹³⁾

$$\sigma = (4\pi\alpha^2/3s) (\sum Q_i^2 + \sum Q_i'^2/4) \quad (10)$$

となる。この結果は最近の実験データ ($5 < s < 25 \text{ GeV}^2$) と全く振舞いが合わない。¹⁴⁾こ

のことはスケーリングの破れの問題と関連して § 5 でもう一度議論することにする。

timelike k^2 のもうひとつの反応 $pp \rightarrow \mu^+ \mu^- X$ に対しても同様のパートン模型的考察をすることができる。ここでも理論値と実験値の食い違いがあることがわかっている。特に $k^2 \simeq 9 \text{ GeV}^2$ 以上の部分に異常があるように見える。¹⁶⁾ $e^+ e^- \rightarrow X$ 及び $pp \rightarrow \mu^+ \mu^- X$ の実験データの奇妙な振舞いに対してはまだ確立された理論的説明はないといっている。

パートン模型の計算法をハドロン同志の deep inelastic process に拡張するために、散乱の機構について更に新たな仮定が必要となる。現在沢山のモデルが提案されているが、ここでは紙面に余裕がないので、パートン衝突モデルのみを取上げることにする。¹⁶⁾ このモデルでは、scaling limit に於けるハドロン散乱はハドロン中のパートンの直接的衝突で記述される、と仮定する。従って、 $A + B \rightarrow C + D$ 及び $A + B \rightarrow C + X$ 反応に対して次のようなファイマン図が寄与することになる(図2, 図3)。図2及び

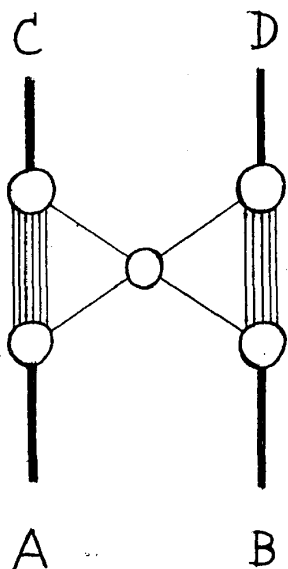


図 2

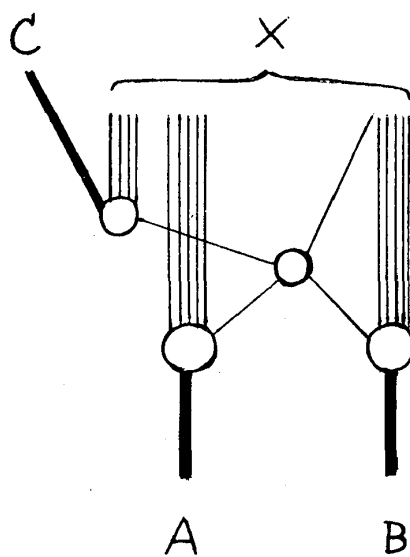


図 3

図3で太線はハドロンを表し、細線はパートンを表す。これらの図は2つの部分、即ちパートン同志の衝突の部分とハドロンからパートンへの遷移の部分、にわかれる。図2に対応して、2体反応微分断面積は scaling limit で

$$\frac{d\sigma}{dt} = G_A(t)^2 G_B(t)^2 \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_0. \quad (11)$$

と与えられる。但し、 $G_A(t)$ 及び $G_B(t)$ は夫々ハドロン A(C) 及び B(D) の電磁構造因子 (form factor) であり、 $(d\sigma/dt)_0$ はパートン同志の衝突微分断面積である。ここで

$$G_A(t) \sim t^{-A}, \quad G_B(t) \sim t^{-B} \quad (t \rightarrow \infty)$$

とおき、 $(d\sigma/dt)_0$ は scaling limit で普通の次元解析で与えられる漸近形 $t^{-2} f(t/s)$ をとる (即ちパートンは構造を持たない) とすると

$$\frac{d\sigma}{dt} \rightarrow t^{-2(A+B+1)} f(t/s) \quad (12)$$

となる。この導き方から明らかなように、ハドロン散乱の微分断面積の scaling limit での振舞いが単純な次元解析の結果からずれるのは、ハドロンの構造 (即ち form factor) のせいである。このことは § 4 でハドロン場の異常次元 (anomalous dimension) と関係があることが示される。実験的に (又はクォーク模型から)

$$G(t) \rightarrow \begin{cases} t^{-2} & \text{for baryons (p, n, } \Lambda, \Sigma, \Xi \text{ etc)} \\ t^{-1} & \text{for mesons (\pi, K etc)} \end{cases}$$

ということが知られているので、 $pp \rightarrow pp$ に対しては $A=B=2$ で、 $d\sigma/dt \sim t^{-10}$ 、 $\pi p \rightarrow \pi p$ に対しては $A=1, B=2$ で $d\sigma/dt \sim t^{-8}$ となり、一応実験と矛盾しない。⁶⁾ 次に包括反応に対して図3で与えられるファイマン図をとると、図2の場合とくらべて今度は終状態でハドロンにまとまってしまふ条件がないので、包括断面積の漸近形は $(d\sigma/dt)_0$ のみで決ってしまい、普通の次元解析の結果と一致する。即ち $s, t, u \rightarrow \infty$, $t/s, u/s = \text{finite}$ で

$$E_C d\sigma/d^3p_C = t^{-2} f(t/s, u/s) \quad (13)$$

最近の $pp \rightarrow \pi X$ の実験データはこの結果とは合わない (即ち t^{-4} である)。データの t の値がまだ小さすぎるのか、図3のみを考えるのがよくないのか、パートン模型そのものが悪いのか、まだはっきりしていない。

以上見てきたように、いくつかの未解決な問題はあるものの、パートン模型はレプト

牟田泰三

ン・ハドロン並びにハドロン・ハドロン反応に於けるスケーリングを直観的な描像で理解するのに大変具合がいい。特にパートン模型の立場では、レプトン・ハドロン反応で普通の次元解析と一致する Bjorken scaling が成立つのはレプトンが構造を持たずパートンと pointlike に相互作用するためであり、ハドロン・ハドロン反応で普通の次元解析の結果と異なるのはハドロンが構造を持つためであると言える。これらの事実はパートン場が正準次元 (canonical dimension) を持ち、ハドロン場が異常次元 (anomalous dimension) を持つことに対応していることが § 4 で示される。

パートン模型の弱みは何といてもパートンが実験的に観測されていないことであろう。勿論パートンを普通のハドロンの bare state とみなせばこの困難は回避できるが、種々の実験事実を説明するためにはパートンが普通のハドロンと同様の性質を持つたのでは駄目なことが指適されている。だからパートンが実在するとすればそれはやはりハドロンと違った特徴 (例えばクォークのような) を持つはずである。ではなぜ実験的に検出されないのでしょうか。特殊な力学構造のためハドロン内部に閉じ込められているのか、¹⁸⁾ 質量が大きいなどのためとび出しにくいのか、とび出しているても何かの理由で観測されにくいのか、よくわからない。

§3. 光錐特異性 (light-cone singularity)

前章で扱ったパートン模型は直観的には明快であるが仮定が多すぎていかにも不格好である。そこで、もっと場の理論的にちゃんとした形でパートン模型を基礎づけることができないかと考えられる。実はこの問題は意外にむずかしくて、ごく最近まで解答を与えられていなかったが、多くの人達の努力の結果 1973 年に解決された。これについては § 4 で詳しく解説することにして、この章ではパートン模型の一つの abstraction と考えることのできる光錐特異性の問題とスケーリングの関係を論ずる。

ここでは Bjorken scaling を中心にして考えることにする。式(2)で表される Bjorken scaling は運動量空間での構造関数の或る漸近的性質を示すものである。ところで、構造関数の式(3)で与えられる通り、4元電流の積の陽子状態での期待値のフーリエ変換であるから、Bjorken scaling を電流の積の位置空間での漸近的性質として翻訳することができる。

先ず scaling limit ($\nu \rightarrow \infty$, $q^2 \rightarrow \infty$ with ω fixed) が位置空間のどのような領域

に対応するかを見よう。実験室系では式(1)の下で与えた通り $\nu = k_0$ であるから

$$k \cdot x = \nu x_0 - \sqrt{\nu^2 + q^2} r \cos \theta = \nu (x_0 - \sqrt{1 + 2M/\omega\nu} r \cos \theta)$$

但し, $r = |\vec{x}|$ で θ は $\vec{k}$ と $\vec{x}$ のなす角である。故に scaling limit では

$$k \cdot x \rightarrow \nu (x_0 - r \cos \theta)$$

即ち, 式(3)で $x_0 - r \cos \theta = 0$ の領域以外では scaling limit で $k \cdot x$ が ∞ となり $\exp(ik \cdot x)$ が無限に振動するため積分は 0 となる (Riemann-Lebesgue)。故に x 積分で $x_0^2 \leq r^2$ (即ち $x^2 \leq 0$) のみがきく。ところが, $\langle N_p | j_\mu(x) j_\nu(0) | N_p \rangle$ はスペクトル条件と因果律により $x^2 = 0$ であることが容易にわかるので, 結局 scaling limit では光錐 $x^2 = 0$ のみが寄与していることになる。このように, 構造関数の Bjorken scaling というのは, 4 元電流の積の期待値の光錐上での性質と直接関係しているのである。

では, 光錐上で $\langle N_p | j_\mu(x) j_\nu(0) | N_p \rangle$ がどんな振舞いをしていれば Bjorken scaling が導き出せるのだろうか。それは次のような 光錐特異性 (light-cone singularity) から導かれる¹⁹⁾

$$\langle N_p | j_\mu(x) j_\nu(0) | N_p \rangle = -g_{\mu\nu} (x^2 - i\epsilon x_0)^{-\alpha} f(x^2, p \cdot x) + \dots \quad (14)$$

ここで, ϵ は $+0$ の微小量, α は特異性の強さを表す定数 (後で決める), $f(x^2, p \cdot x)$ は x^2 と $p \cdot x$ について正則な未知関数である。4 元電流の保存則と相対論的変換性から, 式(14)のテンソル構造は決っているのであるが, ここでは不必要な複雑さを避けるため, 特に必要な項のみ抜き出して書いておいた。²⁰⁾ 実験室系 $p_\mu = (M, 0, 0, 0)$ をとり, scaling limit で $x^2 \sim 0$ のみが寄与することを考慮すると

$$W_{\mu\nu} \rightarrow -g_{\mu\nu} (1/2\pi) \int d^4x e^{ik \cdot x} (x^2 - i\epsilon x_0)^{-\alpha} f(0, Mx_0) + \dots \quad (15)$$

$k_0 = \nu \rightarrow \infty$, $\omega = -k^2/2Mk_0 = \text{fixed}$ でこの積分を評価すると

$$W_{\mu\nu} \rightarrow -g_{\mu\nu} \nu^{\alpha-2} F(\omega) + \dots, \quad (16)$$

$$F(\omega) = [2\pi/\Gamma(\alpha)] (-4i)^{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dv f(0, Mv) \exp(-iMv/2\omega) (v - i\epsilon)^{1-\alpha}$$

牟田泰三

となる。²¹⁾ 式(3)の $g_{\mu\nu}$ に比例する項と式(16)とを比較して

$$W_1(\nu, q^2) \rightarrow \nu^{\alpha-2} F(\omega)$$

であることがわかる。故に $\alpha=2$ のとき Bjorken scaling が導かれる。式(14)に戻って考えると、 W_1 に対する Bjorken scaling は 4 元電流の積が $(x^2 - i\epsilon x_0)^{-2}$ のような光錐特異性を持つとき成立つといえる。

Bjorken scaling を与えるような光錐特異性の物理的意味は何だろう。これをパートン模型的に解釈するには式(7)に立戻ってみればよい。簡単のため一種類のスピン 1/2 パートンのみ考えると(荷電は 1 とする)

$$j_\mu(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x) \quad (17)$$

scaling limit のみを今考えているから、 $\Psi(x)$ はほとんど free なパートン場である。従って $\Psi(x)$ は自由場の交換関係を満足するとしてよい。式(17)の演算子の積は normal product であるから、 $j_\mu(x) j_\nu(0)$ は 2 つの normal product の積になる。そこで Wick の定理によりこの積を展開することができ²²⁾

$$\begin{aligned} j_\mu(x) j_\nu(0) = & -T_r [\partial_\mu S^{(-)}(x) \gamma_\nu S^{(+)}(-x)] - i : \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu S^{(-)}(x) \gamma_\nu \Psi(0) : \\ & - i : \bar{\Psi}(0) \gamma_\nu S^{(+)}(-x) \gamma_\mu \Psi(x) : + : \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x) \bar{\Psi}(0) \gamma_\nu \Psi(0) : \end{aligned} \quad (18)$$

但し、 $S^{(\pm)}(x)$ は自由フェルミ粒子の正及び負振動部分の交換関係から定義されるグリーン関数で、その explicit な形については文献 22) などを参照されたい。式(18)で右辺第 1 項は式(3)に代入したとききかない(陽子のすりぬけ項)ので、右辺第 2 項と第 3 項が $W_{\mu\nu}$ に対する最も強い光錐特異性として寄与する。ところが explicit な計算により

$$S^{(\pm)}(x) = (i\gamma \cdot \partial + m) [(\pm i/4\pi^2)/(x^2 \pm i\epsilon x_0) + \text{less singular terms}]$$

となるので(m はパートンの質量)

$$S^{(\pm)}(\mp x) = (\mp i/4\pi^2)(\mp 2i\gamma \cdot x + m)/(x^2 - i\epsilon x_0)^2 + \dots \quad (19)$$

式(19)を式(18)に代入し、それを式(3)に入れて $g_{\mu\nu}$ に比例する項を取り出せば、式(19)の $1/(x^2 - i\epsilon x_0)^2$ がきいていることはすぐわかる。これはまさしく前の議論で $\alpha = 2$ に対応している。即ち、要約すると、Bjorken scalingを与えるような光錐特異性は自由パートン場から得られるものと全く同じである。ということになる。

K. G. Wilsonは式(18)のような演算子展開は、一般に相互作用がある場合にも拡張できると考え、2つの演算子 $A(x)$, $B(y)$ に対して

$$A(x) B(y) = \sum_n C_n(x-y) O_n(x+y) \quad (20)$$

のような展開を提唱している。²³⁾ここで、 O_n は局所的演算子で、 C_n は演算子でない普通の関数である。 $x \rightarrow y$ で C_n は一般に光錐特異性を持っている。展開式(20)をWilson展開と呼んでいる。このWilson展開をもとにして、場の理論の知識のみを使って、scalingの現象を議論すれば、パートンのような具体的な“もの”を仮定しなくても済むのではなかろうか。くり込み群の方法を採用して、この線にそった研究が推し進められ、最近これに対する解答が与えられた。結果はむしろパートンの存在を暗示しているように見える。この問題については§4で詳述することにして、ここでは $C_n(x)$ の光錐特異性

$$C_n(x) \sim 1/(x^2 - i\epsilon x_0)^\alpha \quad (21)$$

の強さ α と、演算子 A, B, O_n の次元数(dimension)との関係を調べておこう。そのためには演算子の次元数というものを正確に定義しておく必要がある。

簡単のためにスカラー場 $\phi(x)$ を考える。この演算子の次元数は、普通は $\phi(x)$ に対するハミルトニアン($M: \phi$ の質量)

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x [(\vec{\nabla}\phi)^2 + \dot{\phi}^2 + M^2\phi^2]$$

がエネルギーの次元を持つようにきめる。即ち

$$\dim[\phi] = [L^{-1}]$$

これはまた正準交換関数

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x_0=y_0} = i\delta^3(x-y)$$

牟田泰三

とも consistent である。しかし、もし $\phi(x)$ が複合粒子を表していたら（例えば重陽子は陽子と中性子から成立っているが、この重陽子を一つの局所場で表したとしたら）、その自由ハミルトニアンは存在せず、また正準交換関係もないので、 $\phi(x)$ の次元数を定めることができない。実は $\phi(x)$ が複合粒子を表すときは、一般に $\phi(x)$ の次元は $[L^{-1}]$ からずれるということが示されている。²⁴⁾ このような場合にも演算子の次元数を定義するためには、スケール交換又は dilatation というものを導入すればよろしい。即ち、空間の座標を

$$x'_\mu = \lambda x_\mu \quad (\lambda = \text{パラメーター}) \quad (22)$$

だけスケール変換したとき、場 $\phi(x)$ が

$$\phi'(x') = \lambda^{-d} \phi(x) \quad (23)$$

のように変化したとすれば、この d のことを スケール次元 (scale dimension) と呼ぶ（ d は L^{-1} を単位とした次元数である）。これに対して、前に示したような正準交換関係と consistent な次元数（ ϕ の場合 1）を 正準次元 (canonical dimension) と言う。正準理論の範囲では当然スケール次元と正準次元は一致する。しかし、一般には両者が同じである必要はない。両者が異っているとき、この両者の差を 異常次元 (anomalous dimension) と言う。

式 (22) の微小変化 $\lambda = 1 + \epsilon$ ($\epsilon = \text{infinitesimal}$) を考え、これに対する点 x での $\phi(x)$ の変化を求めると

$$\delta\phi = \phi(x) - \phi(x) = -\epsilon(d + x \cdot \partial) \phi(x)$$

他方、ヒルベルト空間でのスケール変換の generator を D とすると、 $\delta\phi = i\epsilon[D, \phi(x)]$ であるから、

$$[D, \phi(x)] = i(d + x \cdot \partial) \phi(x) \quad (24)$$

式 (24) を演算子 ϕ のスケール次元 d をきめる式と考えることができる。一般に演算子 $A(x)$ のスケール次元 d_A は

$$[D, A(x)] = i(d_A + x \cdot \partial) A(x) \quad (25)$$

で定義される。

さて、式(20)及び(21)に戻ろう。スケール変換の下で

$$\begin{aligned} [D, A(x) B(y)] &= i(d_A + d_B + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) A(x) B(y) \\ &= i(d_A + d_B + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta}) \Sigma C_n(\xi) O_n(\eta) \\ &\quad (\xi = x - y, \quad \eta = (x + y)/2) \end{aligned}$$

$$[D, O_n(\eta)] = i(d_n + \eta \frac{\partial}{\partial \eta}) O_n(\eta)$$

であるから、式(20)の両辺のスケール変換をとれば

$$\xi \frac{\partial}{\partial \eta} C_n(\xi) = (d_n - d_A - d_B) C_n(\xi) \quad (26)$$

を得る。式(25)より、 $\xi^2 \rightarrow 0$ での $C_n(\xi)$ の振舞いは $(\xi^2)^{(d_n - d_A - d_B)/2}$ のようになることがわかる。これと式(21)を比較すると

$$\alpha = (d_A + d_B - d_n)/2 \quad (27)$$

を得る。即ち、Wilson展開の係数関数 $C_n(x)$ の光錐特異性の強さ α は、関与する演算子のスケール次元のみによって式(27)のように決る。

(追加)

$e^+ e^- \rightarrow X$ に対する断面積(9)に対しても光錐特異性の議論を適用することができる。
 $j_\mu(x) j_\nu(0)$ に対する展開式(18)を用いて光錐特異性の式(9)への寄与を求めれば式(10)と一致する答を得る。前にも述べたように、現在の実験データはこの答と矛盾する。パートン模型も光錐特異性の議論も timelike k^2 の領域で大きな困難に直面している。

§4. くり込み群的考察

これ迄みてきたように、パートン模型はスケーリングに議論するのに大変有効であるが、いささか現象論的で御都合主義的にみえ、実際にこんなうまいことが場の理論的に実現できるのだろうかという疑問も残る。そこで、パートン模型を場の理論的にもっとちゃんとした形で考え直すことにする。その際考えるべき問題点は次の2つである。

- (1) パートン模型から Bjorken scaling を導くメカニズムを場の理論的に基礎付けよ。即ち、パートン間の強い相互作用に対するラグランジアンから出発して、deep inelastic region でパートンがほとんど free にみえることを示し、Bjorken scaling を導け。
- (2) 逆に Bjorken scaling が成立てば必ずパートン模型的描像が要求されるということを示すことはできないだろうか。もしこれが可能であれば、Bjorken scaling の成立は、ハドロンの複合模型としてはパートン模型が唯一の可能性であることを示していることになる。

まず(1)の問題から考えることにしよう。我々は deep inelastic region でパートンがほとんど free になるような性質を持つたラグランジアンを探すことから始めなければならぬ。このような性質を漸近的自由 (asymptotic freedom) と呼び、そのような場の理論を漸近的自由場理論 (asymptotically free field theory) と呼んでいる。²⁵⁾ もっと具体的に言えば次のようになる。パートンの強い相互作用を表すラグランジアンの下で、図4で表されるようなパートン反応過程のグリーン関数を考え、deep Euclidean limit

$$p^2 \equiv \sum_j p_j^2 \rightarrow \infty, \quad (28)$$

$$p_i \cdot p_j / p^2 = \text{finite} \quad (p_j^2 < 0)$$

でパートン間の有効相互作用の強さを求めたときこれがゼロに近づくならば、考えている理論は漸近的自由場理論である。我々の為すべきことは、漸近的自由場理論を求めて、こ

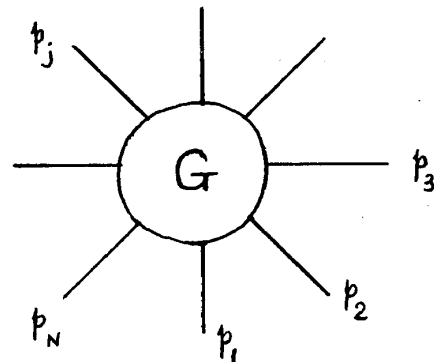


図4

れから Bjorken scaling を導くことである。

さて、与えられたラグランジアンが漸近的自由の性質を持つかどうかを具体的に調べるのに、くり込み群の方程式が大変役に立つのである。ここでくり込み群の方程式 (Gell-Mann-Low 方程式)²⁶⁾ 及び Callan-Symanzik 方程式²⁷⁾ についてちょっと触れておく。これらの方程式の詳しい導き方については原論文又は解説^{28), 29), 30)} を参照されたい。

与えられたラグランジアンからグリーン関数を求めたとしよう。deep Euclidean region では関与する粒子の質量や次元を持った結合定数のようなものは p^2 くらべて小さいので無視してしまいうことができる。すると、運動量のスケールを決めるような次元のある量が存在しないから、deep Euclidean limit でのグリーン関数の漸近形に於ける p^2 のべきは、単純な次元解析によって決ってしまう。即ち、Bjorken scaling が常に成立ってしまう (これを canonical scaling とも言う。ところが、このような考え方は必ずしも正しくないのである。なぜなら、一般にグリーン関数は発散し、その積分を収束させるために cut-off を導入すると、これが隠れたパラメーターとして運動量のスケールを与えるからである。この cut-off という操作は、発散量の引算という形でおきかえるのが普通であるので、ここでもそれに従うことにしよう。朝永・シュビンガー・ファインマン・ダイソンのくり込み操作では発散量の引算を物理的質量のところで行うが、これは物理的要請にもとづくのであって、実は数学的には引算点は任意である。そこで、この引算点パラメーターとして残しておこう、というのがくり込み群の発想である。くり込まれた結合定数を物理的質量のところで定義しないで引算点 λ で定義したものを g_λ と書くと、 λ を変えたときの g_λ の変化は微分方程式

$$dg_\lambda/dt = \beta(g_\lambda) \quad t = \ln(\lambda/\mu) \quad (29)$$

で与えられる。ここで、 μ は物理的質量で、 $\beta(g_\lambda)$ はラグランジアンから原理的には求まる関数である。これを くり込み群の方程式 又は Gell-Mann-Low 方程式 と呼んでいる。²⁶⁾ さて、この引算点 λ を変えるということは運動量のスケールを変えることに相当する。従って、運動量 p_i と結合定数 g が或る値を持ったグリーン関数は、これらの量が λ のスケール変化に応じた値をとるグリーン関数と、くり込み群の方程式に基づいて関連づけられているはずである。この関係が λ について群の性質を持つのでくり込み“群”と言

牟田泰三

う。グリーン関数の間のこのような関係は微分形で書き下すことができ、これもくり込み群の方程式と呼ばれている。³¹⁾ 例えば、中性スカラー場に対する最も簡単なラグランジアン

$$L(x) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi^2 - \frac{g_0^{22}}{4!} \phi^4 \quad (30)$$

(μ_0 は裸の質量, g_0 は裸の結合定数)

の場合, この方程式は (deep Euclidean region で)

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - n r(g) \right] \Gamma_n(\mu, g, p_i) = 0 \quad (31)$$

となる。但し, $g_\lambda \rightarrow g$ とおき, λ についての微分を物理的質量についての微分でおきかえた。ここで

$$\beta(g) = Z \mu_0 (\partial \lambda / \partial \mu_0), \quad r(g) = \frac{1}{2} Z \mu_0 (\partial \ln Z / \partial \mu_0)$$

$$Z = (\mu / \mu_0) / (\partial \mu / \partial \mu_0)$$

であり, Γ_n は ϕ 粒子の n 体グリーン関数で, 1 体既約なものである (即ち, 外線のプロパゲーターを除き且つ内線 1 本で 2 つに分れるファインマン図を除いたもの)。式 (31) は deep Euclidean region (28) のみで成立つ式であるが, これで無視されている裸の質量 μ_0 の効果をちゃんと取り入れた式は, 式 (31) で右辺が 0 でなくなる。そのような方程式は Callan と Symanzik により導かれたので Callan-Symanzik 方程式 と呼んでいる。²⁷⁾

式 (31) は陽に解くことができ, その答は

$$\Gamma_n = p^{4-n} \exp \left[-n \int_0^{\ln(p/\mu)} dt r(\bar{g}(t, g)) \right] F_n(\bar{g}(\ln \frac{p}{\mu}, g)) \quad (32)$$

但し, $\bar{g}(t, g)$ は補助関数で, 初期条件 $\bar{g}(0, g) = g$ を満し

$$d\bar{g}/dt = \beta(\bar{g}) \quad (33)$$

なる Gell-Mann-Low 方程式を満す。この解 (32) に現れる因子 p^{4-n} が普通の次元解

析で与えられたものである。従って、もしくり込みの効果がなかったら、前に述べたように canonical scaling

$$\Gamma_n \sim p^{4-n}$$

が成立していたであろうが、一般には $r(g) \neq 0$ であるため式(32)の2番目の因子から p 依存性が現れ、canonical scaling が破れるのである。これがどの程度破れるかは $r(g)$ の具体的な関数形を知らなければわからない。特に次に述べるような固定点 (fixed point) があるときは Γ_n の漸近形がわかる。式(33)を積分すると

$$t = \int_{\bar{g}}^{g(t, g)} dx / \beta(x) \quad (34)$$

であるから、もし $\beta(x)$ が図5のような関数で $x = g_f$ に零点を持てば、 $0 < \bar{g} < g_f$ なる $\bar{g}$ は $t \rightarrow \infty$ で必ず $\bar{g} \rightarrow g_f$ となる ($0 < g < \bar{g}$ とする)。も

し $x = g'_f$ にも零点があれば、 $g_f < \bar{g} < g'_f$ なる $\bar{g}$ はまた $t \rightarrow \infty$ で $\bar{g} \rightarrow g'_f$ となる ($\bar{g} < g < g'_f$)

$$\beta(g_f) = 0,$$

$$[d\beta(g)/dg]_{g=g_f} < 0 \quad (35)$$

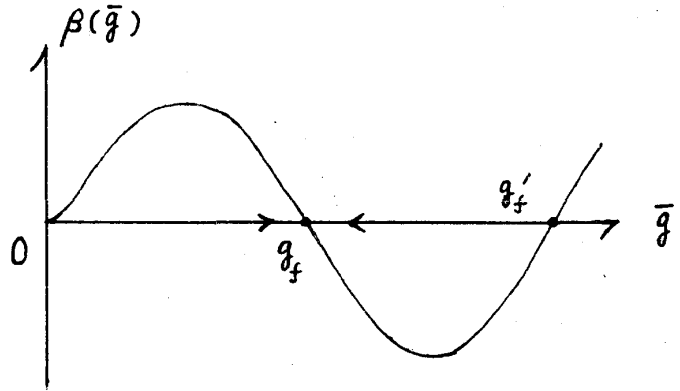


図5

なる零点 g_f のことを紫外安定固定点 (ultraviolet-stable fixed point) と呼ぶ。これは $t \rightarrow \infty$ ($t = \ln \lambda/\mu$) が高振動数に対応するからである。これに対して $t \rightarrow -\infty$ の固定点 g'_f を赤外安定点という。さて、紫外安定点があれば、式(32)で exp の argument は

$$-n \int_0^{\ln(p/\mu)} dt r(\bar{g}(t, g)) \rightarrow -n r(g_f) \ln(p/\mu) + n a(g) \quad (36)$$

但し

$$a(g) = \int_0^\infty dt [r(g_f) - r(\bar{g}(t, g))]$$

牟田泰三

となる。従って $p \rightarrow \infty$ では

$$\Gamma_n \rightarrow p^{4-n} (p/\mu)^{-nr(g_f)} e^{na(g)} F_n(g_f) \quad (37)$$

式(37)より明らかなるように、 $r(g_f \neq 0)$ なら Γ_n は canonical scaling からずれる。しかし、 Γ_n が deep Euclidean region でべきの振舞いをするという点は変わらないので、式(37)の振舞いを一般にスケーリングと言っている。このとき $r(g_f)$ は正準次元による次元解析からのずれを表すのだから、異常次元に対応している。もし、図6のように $g_f = 0$ なるラグランジアンが存在したとしよう。この場合は摂動計算ができて、^{*}) $r(g_f) = 0$ となり、式(37)で canonical scaling が回復する。このような理論が漸近的自由場理論である。ここで注意すべきことは、漸近的自由場理論では canonical scaling が完全に回復するのではなく、 $\ln p$ だけずれるということである。このことはすぐ後で示すことにする。残念ながらラグランジアン(30)は漸近的自由の性質を示さない。実際、 $\beta(g)$ を g の摂動展開で求めてみると

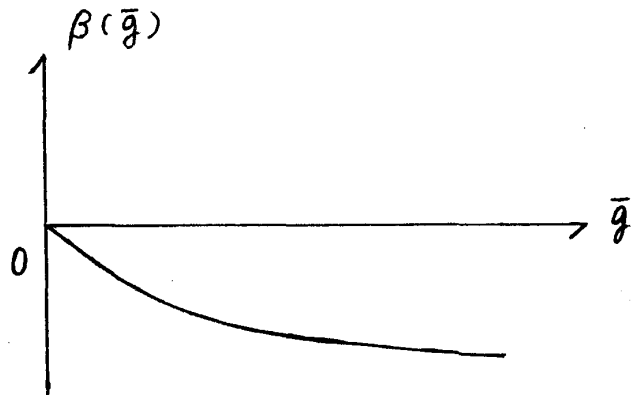


図6

$$\beta(g) = 3g^2/16\pi^2 + O(g^3) \quad (38)$$

となり、 $d\beta/dg > 0$ ($g \sim +0$) である。同様にして、電磁相互作用 $e\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi A^\mu$ や核力の相互作用 $g\bar{\Psi}\gamma_5\Psi\phi$ も漸近的自由の性質を持たないことがわかる。³²⁾ 大抵の良く知られたラグランジアンで試してみても漸近的自由の性質がないが、非アーベルゲージ場^{**)}を含むランラグジアンのみは漸近的自由の性質を持つことがわかっている。³³⁾ 実際、スピン

*) $g = 0$ は特異点でないと仮定する。例えば、 $\exp(-1/g^2)$ は $g \rightarrow 0$ で小さいが摂動展開はできない。

**) 電磁場 A_μ のように可換群 (Abel 群) に付随したゲージ場でなく、 $SU(2)$ や $SU(3)$ のような非可換群 (非アーベル群) に付随したゲージ場。

1/2 の場 Ψ と非アーベルゲージ場 B_μ^a の系に対するラグランジアン

$$L(x) = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \bar{\Psi} [i \gamma^\mu (\partial_\mu - i g_0 \frac{\tau_a}{2} B_\mu^a) - m_0] \Psi + \text{gauge terms}, \quad (39)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + g_0 \epsilon^{abc} B_\mu^b B_\nu^c$$

は漸近的自由の性質を示す。ここでゲージ場 B_μ^a の属する群は簡単のため $SU(2)$ とした。従って $a, b, c = 1, 2, 3$ で、 τ_a は 2×2 のアイソスピン行列、 g_0, m_0 は夫々裸の結合定数と裸の Ψ の質量である。ラグランジアン (39) のゲージの取り方については少々面倒な議論が必要であるが、ここでは話の本筋と直接関係がないので省略する。³⁴⁾ このラグランジアンに対して $\beta(g)$, $r(g)$ を g の摂動で求めると

$$\left. \begin{aligned} \beta(g) &= -(5/12\pi^2) g^3 + O(g^5) \\ r(g) &= -(11/48\pi^2) g^2 + \text{gauge term} + O(g^4) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

となり、確かに漸近的自由になっている。漸近的に自由な場合は $t \rightarrow \infty$ で $\bar{g}(t, g) \rightarrow 0$ なのだから、くり込み群の方程式 (33) は大きさ t に対して式 (40) を代入して良い近似で解くことができ

$$\bar{g}(t, g)^2 = g^2 / (1 + 5g^2 t / 6\pi^2) \simeq 6\pi^2 / 5t \quad (41)$$

故に、 $r(\bar{g}(t, g)) \sim 11/40t$ ($t \rightarrow \infty$) となる。これを式 (32) に代入し、 $p \rightarrow \infty$ での Γ_n を評価してやると

$$\Gamma_n \sim p^{4-n} [\ln(p/\mu)]^{11n/40} \quad (42)$$

となり、漸近的自由場理論が canonical scaling を完全に回復するわけではないことがわかる。従って漸近的自由場理論を電子・陽子非弾性散乱に適用したとしても、完全な Bjorken scaling は得られなくて、 $\ln q^2$ のタイプの破れは存在すると考えられる。実際そうなるかどうか調べてみよう。

ラグランジアン (39) はパートン Ψ の強い相互作用を記述するものとする。ここで

牟田泰三

パートン場 Ψ は $SU(2)$ の 2 次元表現に属し (実際はこんな簡単なものではないであろうが, ここでは説明のためモデルを簡単化した), パートン間の強い相互作用を媒介する非アーベルゲージ場 B_μ^a は $SU(2)$ の 3 次元表現に属する。これらのパートンの複合系としてハドロンが構成されているものとする。式 (39) にパートンの電磁相互作用項を付け加えれば, 電子・陽子非弾性散乱 $ep \rightarrow eX$ の断面積は原理的には計算できる。deep inelastic region での構造関数を求めるために, § 3 で導入した Wilson 展開の方法を用いる。

$$j_\mu(x/2) j_\nu(-x/2) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^2 \sum_n C_n(x^2 - i\epsilon x_0) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} O_{\mu_1 \dots \mu_n}(0) + \dots \quad (43)$$

ここで, 簡単のため最も典型的な項のみ抜き出して書いた。また式 (20) の O_n にあたる演算子を式 (43) では角運動量の既約表現に分けておいた。 C_n の光錐特異性は § 3 と同様にして求まる。式 (43) の陽子状態での期待値をとり, 構造関数に対する次のようなモーメントの関係式を得る。

$$\int_0^1 d\xi \xi^{n-1} F_1(q^2, \xi) = \bar{C}_n(q^2) A_n \quad (44)$$

ここで, $F_1(q^2, \xi) = 2M W_1(\nu, q^2)$ で, ν と q^2 の関数 W_1 を単に $\xi = 1/\omega = q^2/2M\nu$ と q^2 の関数 F_1 で定義し直しただけである。そして

$$2M \langle N_p | O_{\mu_1 \dots \mu_n} | N_p \rangle = i^n p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n} A_n - \text{trace}$$

$$\bar{C}_n(-k^2) = (i/2)(-k^2)^{n+1} (\partial/\partial k^2)^n \int d^4x e^{ik \cdot x} C_n(x^2 - i\epsilon x_0)$$

式 (44) と同様の式は $F_2 = \nu W_2$ に対しても成立つ。式 (43) とパートン場の積からつくられるグリーン関数に対するくり込み群の方程式は $\bar{C}_n(q^2)$ に対する式に直すことができる (但しここで陽子がパートン場の束縛状態であるという効果は無視できると仮定する) 次のようになる。

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - r_n(g) \right] \bar{C}_n = 0 \quad (45)$$

但し, μ はくり込みの引算点で, r_n は $O_{\mu_1 \dots \mu_n}$ の異常次元である (4 元電流 j_μ は正準次元を持つ)。式 (45) は前に述べた様に陽に解くことができる。ラグランジアン (39)

の下では

$$\left. \begin{aligned} \beta(g) &= -bg^3 + O(g^5) & (b > 0) \\ r_n(g) &= r_n g^2 + O(g^4) & (r_n \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

である。bは式(40)で与えられている通りで、 r_n は摂動で求めることができる。³⁵⁾式(45)の解に式(46)を代入し、 $\bar{C}_n(q^2)$ の漸近形を求めると

$$\bar{C}_n(q^2) \sim [1/\ln(q^2/\mu^2)] r_n^{1/b} \quad (47)$$

ところで、 $n=2$ のとき $O_{\mu_1\mu_2}$ はエネルギー運動量テンソルとなり正準次元を持つので $r_2=0$ である。 $n=2$ 以外では $r_n \neq 0$ であることが知られている。³⁵⁾ 従って、式(47)より

$$\bar{C}_n(q^2) \rightarrow \text{const.} \times \delta_{n,2} \quad (q^2 \rightarrow \infty) \quad (48)$$

式(48)と式(44)より、 $\xi F_1(\xi) \propto \delta(\xi)$ を得る。 $F_2(\xi)$ に対しても同様の議論から $F_2(\xi) \propto \delta(\xi)$ を得る。もし現在の Bjorken scaling に対する実験データが $q^2 \rightarrow \infty$ に対応するものだとしたら、図1を見てもわかる通り上記の結論ははなはだ困ったものである。もし漸近的自由場理論というものが現実性を持つのなら、むしろ Bjorken scaling はゆるやかに ($\ln q^2$ で) 破れていると考えた方が尤もらしい。ごく最近の実験データは、 q^2 を大きくすると Bjorken scaling が除々に破れてくることを示唆しているようである。³⁶⁾ Bjorken scaling の破れに関しては §5 でもっと詳しく考えてみよう。

漸近的自由場理論は $e^+e^- \rightarrow X$ に対しても適用することができる。これまでに述べてきたのと同様の方法で $e^+e^- \rightarrow X$ 断面積(9)の漸近的振舞いを求めると、結局式(10)と同じ結果を得る。しかし、くり込み群の方法では更に式(10)への補正項を求めることができ、それは $1/s \ln s$ であることがわかる。³⁷⁾

さて、次に(2)の問題に答えなければならない。即ち、これ迄述べてきたことの逆く Bjorken scaling が成立てばハドロンの構成子は漸近的自由の性質を持つことを示す。Wilson 展開(43)を仮定するかぎり式(44)は自動的に成立つから、この式から出

牟田泰三

発することにして。 $\bar{g} = g_f$ に紫外安 固定点を持つ理論では式(45)の解は

$$\bar{C}_n(q^2) \sim (q^2)^{-r_n(g_f)/2} \quad (49)$$

となる。他方、 $q^2 \rightarrow \infty$ で Bjorken scaling が成立しているためには、式(44)の左辺で与えられる。 F_1 の全てのモーメントが q^2 に依存しない有限値(0でない)になる必要がある。そのためには式(49)より

$$r_n(g_f) = 0 \quad \text{for all } n \quad (50)$$

ところで、 $O_{\mu_1 \dots \mu_n}$ は構成子(パートン)場 Ψ の双一次形式で書き下すことができ、パートン場の異常次元を $r(g)$ とすると

$$r_n(g) \rightarrow 2r(g) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (51)$$

となることが知られている。³⁸⁾ 式(50)と式(51)を両方させるためには

$$r(g_f) = 0 \quad (52)$$

でなければならない。即ち、 $\bar{g} = g_f$ の付近ではパートン場は正準場のように見える。式(52)より Federbush-Johnson の定理³⁹⁾ を用いて $g_f = 0$ を Callan と Gross は導くのであるが、この部分の証明は不完全のように思われる。しかし以上の議論で(2)の問題にはほぼ答えたことになっているだろう。

以上で漸近的自由場理論と Bjorken scaling の関係についての考察を終るが、もし Bjorken scaling というものが実験的に正しいものと仮定すれば($\ln q^2$ を別として)次のような推論が成立つ。

Bjorken scaling $\rightarrow$ 漸近的自由場理論 $\rightarrow$ 非アーベルゲージ場

即ち、強い相互作用は非アーベルゲージ場によって媒介されているのではないかと考えられる。

最後に、漸近的自由場理論の考え方をハドロン反応へも拡張する可能性について考えてみよう。電子散乱の場合は電磁相互作用の最低次をとることが許されたので、構造関数を4元電流の積の期待値として求めることができ、これに Wilson 展開を併用するこ

とによって deep Euclidean limit が物理的に観測可能となった。ハドロン反応ではこのようなことが許されないので, deep Euclidean limit は非物理的領域にある。しかし, ハドロンが on-shell ($p_i^2 = M_i^2$) にあっても, 式(4)や式(5)のところで与えられた scaling limit が deep Euclidean limit と同じ働きをすると考えてよければ, 以下で述べるような議論ができる。2体反応 $A+B \rightarrow C+D$ を考える。scaling limit ($s \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty, t/s = \text{finite}$) ではこの反応は夫々のハドロンの構成子の直接の反応と同じであると仮定する。例えば, クォーク (quark) 模型⁴⁰⁾ では陽子は3個のクォーク q の複合状態だから, 上の仮定により $pp \rightarrow pp$ 散乱は scaling limit で $(qqq)(qqq) \rightarrow (qqq)(qqq)$ と考えてよい。scaling limit で構成子は正準場のように見えるのだから, 構成子の反応の amplitude の漸近形は正準次元に基づく次元解析によって決る。ハドロン A, B, C, D が夫々 n_A, n_B, n_C, n_D 個の構成子から成るとしよう。すると $A+B \rightarrow C+D$ 反応は scaling limit で $n = n_A, n_B, n_C, n_D$ 個の構成子を外線とするグリーン関数 G_n で記述される。正準次元に基づく次元解析により

$$\dim[G_n] = [L^{n-4}]$$

だから, scaling limit での G_n の漸近形は

$$G_n \sim s^{(4-n)/2} f_n(t/s)$$

従って, $A+B \rightarrow C+D$ 反応の微分断面積は⁴¹⁾

$$\frac{d\sigma}{dt} = s^{-2} |G_n|^2 \sim s^{2-n} |f_n(t/s)|^2 \quad (53)$$

構成子として特にクォークをとれば, バリオンは (qqq) から成り, メソンは $(\bar{q}q)$ から成るから, $pp \rightarrow pp$ では $n=12$, $\pi p \rightarrow \pi p$ では $n=10$ となる。故に scaling limit では

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim \begin{cases} s^{-10} & \text{for } pp \rightarrow pp \\ s^{-8} & \text{for } \pi p \rightarrow \pi p \end{cases}$$

この結果は意外と実験と良く合う。⁶⁾

§5. スケーリングの破れ

前章で Bjorken scaling を導こうとして漸近的自由場理論を見出したが、実は厳密な意味ではこの理論では Bjorken scaling がゆるやかに破れていた。このことは、漸近的自由場理論と言えども deep inelastic region で完全には強い相互作用の効果がなくなってしまう、ということの意味する。直観的なパートン模型の立場で言えば、deep inelastic region でもパートンは完全に pointlike ではなく、強い相互作用に起因するパートンの拡がりがわずかに残る、ということである。この効果が、漸近的自由場理論の場合は、構造関数の canonical scaling からの $\ln q^2$ 程度の破れとなって現れたと考えられる。漸近的自由場理論に限らず、一般にパートンの拡がりの効果がきく場合 Bjorken scaling がどんな風に破れるかについて物理的考察を行ってみよう。⁴²⁾

パートンが拡がりを持てば、その電磁相互作用は点電荷のそれと異なり、いわゆる構造因子 (form factor) を持つようになる。パートンの電磁構造因子を $G(q^2)$ としよう。電子・陽子非弾性散乱の構造関数の Bjorken scaling から破れは、大ざっぱに⁴³⁾

$$\nu W_2(\nu, q^2) = F_2(\omega) |G(q^2)|^2 \quad (54)$$

と表せるだろう。ここで、Bjorken scaling の破れを特徴付けるような質量 m とすると、 $q^2 \ll m^2$ では

$$G(q^2) = 1 - q^2/m^2 + O(q^4/m^4)$$

と展開できる。例えば $m \sim 10 \text{ GeV}$ とすると、現在の実験データでは $q^2 \ll m^2$ なので、式(54)のような破れはほとんど観測にかからない。ところが、 q^2 を十分高くすると $|G(q^2)|^2$ が1からずれてくるので、Bjorken scalingの破れが検出できるはずである。しかも、その破れ方は νW_2 を小さくするように働くはずである。最近、FNALとSLACからこのような破れを示唆するような実験データが報告されている。³⁶⁾

もしこのようなパートンの拡がりが本当にあれば、timelike な領域 ($k^2 > 0$) でもときいてくるはずである。 $e^+e^- \rightarrow X$ や $pp \rightarrow \mu^+ \mu^- X$ で scaling の予言が実験データと大きく狂っているのはこのせいかも知れない。または、パートン間の相互作用がいつまでも残るためか、⁴⁴⁾ レプトンの未知の相互作用のためか、⁴⁵⁾ 色んな考え方はあるだろう。ここではパートンの拡がりのせいだと考えてみると、 $G(-k^2) = 1 + k^2/m^2 + O(k^4/m^4)$

となるから、 $e e \rightarrow X$ 断面積は $|G(-s)|^2$ のぶんだけ増大するはずである。実験データは明らかにこの傾向を示している。¹⁴⁾

$|k^2|$ の大きいところで Bjorken scaling が本当に破れているのかどうか、また破れているとしたら $|k^2|$ のべきなのか $\ln|k^2|$ のべきなのか、を実験的に見きわめることは今後の理論の発展にとって重大な意義がある。

参考文献

以下次の略称を用いる。PTP (Prog. Theor. Phys.), PR (Phys. Rev.), PRL (Phys. Rev. Letters), NP (Nucl. Phys.), PL (Phys. Letters), NC (Nuovo Cimento), LNC (Letter al Nuovo Cimento), 物研, (物性研究), 素研 (素粒子論研究)

- 1) J. D. Bjorken, PR 179 1547 (1969).
- 2) W. K. H. Panofsky, Proceedings of 14th International Conf. on High Energy Physics (1968, Vienna).
- 3) 電子・陽子非弾性散乱の kinematics については例えば F. J. Gilman, Phys. Reports 4C 98 (1972)
- 4) 例えば, F. J. Gilman, Proceedings of 4th International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies (1969, Daresbury).
- 5) 例えば, 牟田, 素研 44 602 (1972).
- 6) 例えば, 植松・東嶋, 素研 48 D109 及び D127 (1973).
- 7) R. P. Feynman, "High Energy Collisions" (Gordon and Breach 1970).
See also, R. P. Feynman, "Photon-Hadron Interactions" (Benjamin 1972 : J. Kogut and L. Susskind, Physics Reports 8C No 2 (1973).
- 8) J. D. Bjorken and E. A. Pashos, PR 185 1975 (1969).
- 9) R. L. Jaffe, PR D5 2622 (1972).

牟田泰三

- 10) 例えば文献4) 参照。詳しいデータについては E.M. Riordan, Ph. D. Thesis, MIT Report COO-3069-176 (1973).
- 11) E. D. Bloom, Proceedings of 6th International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies (1973, Bonn).
- 12) 例えば, R. Gatto, 文献4) と同じ Proceedings.
- 13) N. Cabibbo, G. Parisi and M. Testa, LNC 4 35 (1970).
- 14) B. Richter, Proceedings of the 17th International Conf. on High Energy Physics (1974, London).
- 15) S. D. Drell and T. M. Yan, PRL 25 316 (1970).
- 16) J. H. Christenson et al., PR D8 2016 (1973).
- 17) D. Horn and M. Moshe, NP B48 557 (1972). 他のモデルについては文献6) 参照。
- 18) パートンの閉じ込めの力学モデルが最近数多く提案されているが, まだ究極的な理論にはほど遠い。
- 19) R. Jackiw, R. Van Royen G. B. West, PR D2 2473 (1970).
- 20) 詳しくは次の総合報告参照. 二宮, 素研 46 F1 (1973).
- 21) ゲリファント・シーロフ, 超関数論入門 I (邦訳, 共立全書)。
- 22) N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, "Theory of Quantized Fields" (Interscience 1959) p167.
- 23) K. G. Wilson, PR 179 1499 (1969). 詳しくは文献20) 参照。
- 24) 東嶋, PTP 52 No. 4 (1973).
- 25) これについての立ち入った解説は次のものがある。細谷, 素研 49 323 (1974)
- 26) M. Gell-Mann and F. E. Low, PR 95 1300 (1954).
- 27) K. Symanzik, Comm. Math. Phys. 18 227 (1970).
C. G. Callan. Jr., PR D2 1541 (1970).
- 28) くり込み群の方程式及び Callan-Symanzik 方程式をめぐる場の理論の解説については
高橋康, 物研 20 136 及び 311 (1973).
- 29) くり込み群の方程式については, 文献22) の p511 及び次の教科書にも解説があ

る。

J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill 1965) p368.

- 30) Callan-Symanzik方程式の導き方及びその応用については次の2つの講義録を併読するとよい。

C. G. Callan, Jr., "Particle Physics" (Les Houches Summer School, 1971, Gordon and Breach 1973).

S. Coleman, "Developments in High Energy Physics" (International School of Physics Enrico Fermi, 1971, Academic Press 1972).

- 31) L. V. Osviannikov, *Dokl. Akad. Nauk.* 109 1112 (1956) (ロシア語)

- 32) 文献25) 及び

A. Zee, *PR* D7 3630 (1973).

- 33) 非アーベルゲージ場のラグランジアンが漸近的自由の性質を持つことは

D. J. Gross and F. Wilczek, *PRL* 30 1343 (1973) : *PR* D8 3633 (1973).

H. D. Politzer, *PRL* 30 1346 (1973).

によって示された。また、漸近的自由場理論は必ず非アーベルゲージ場を含まねばならないことも示された。

S. Coleman and D. J. Gross, *PRL* 31 851 (1973).

これらは勿論4次元時空に限った話であるが、時空の次元を変えれば話は少々変わってくる。6次元時空での ϕ^3 ラグランジアン, 2次元時空での量子電気力学, 3次元以下の時空でのLee モデル, などは漸近的自由の性質を持っている。尚, このうち後の二者は正確に解くことができる。

- 34) 例えば, E. S. Abers and B. W. Lee, *Phys. Reports* 9 No.1 (1974).

- 35) D. J. Gross and F. Wilczek, 文献33),

H. Georgi and H. D. Politzer, *PR* D9 416 (1974).

- 36) A. Bodek et al., preprint SLAC-PUB-1442 (1974),

D. J. Fox et al., 文献14) と同じ Conference (London) への寄稿論文No.330

- 37) T. Appelquist and H. Georgi, *PR* D8 4000 (1973).

牟田泰三

- A. Zee, PR D8 4038 (1973).
- 38) G. Parisi, PL 42B 114 (1973).
C. G. Callan and D. J. Gross, PR D8 4383 (1973).
- 39) P. G. Federbush K. A. Johnson, PR 120 1926 (1960)
- 40) M. Gell-Mann, PL 8 214 (1964).
- 41) V. A. Matveev, R. M. Muradyan and A. N. Tavkhelidze, LNC 7 719
(1973),
S. J. Brodsky and G. R. Farrar, PRL 31 1153 (1973).
- 42) 次の研究会報告は参考になる。
松本 et al., 素研 49 C99 (1974).
- 43) 松本, PTP 47 1795 (1972).
M. S. Chanowitz and S. D. Drell, PRL 30 807 (1973): PR D9 2078
(1974).
- 44) 東島・牟田・植松, PTP 53 No. 1 (1975)
- 45) J. C. Pati and A. Salam, PRL 32 1083 (1974).
O. W. Greenberg and G. B. Yodh, PRL 32 1473 (1974).
I. I. Y. Bigi and J. D. Bjorken, PR to be published (1974).