

An Equilibrium Point of the Fractional Metagame

秋田県立大学 経営システム工学科 木村 寛 (YUTAKA KIMURA)*
 秋田県立大学 経営システム工学科 星野 満博 (MITSUHIRO HOSHINO)[†]
 秋田県立大学 経営システム工学科 矢戸 弓雄 (YUMIO YATO)[‡]

1. Introduction

制約付き分数形非協力 n 人ゲームを次の集合

$$(MGP) \quad (N, X, f_i, g_i, G^i, S^i) \quad (1.1)$$

で与える. ここで,

- (i) $N := \{1, 2, \dots, n\}$ をプレイヤーの集合とし, i 番目のプレイヤーを $i = 1, 2, \dots, n$ で表す.
- (ii) E をバナッハ空間とし, 各々のプレイヤー $i \in N$ は戦略集合 $X_i \subset E$ から戦略 x_i を選び, また $X := \prod_{i=1}^n X_i$ とおき, $X \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ で n 人の戦略を表し, これを多価戦略 (multistrategies) と呼ぶ.
- (iii) 任意の i に対して, 関数 f_i, g_i を $f_i: X \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$, $g_i: X \rightarrow \mathbf{R}_+$ で与える. ただし, $\mathbf{R}_+ = (0, +\infty)$.
- (iv) 各 $i \in N$ に対して, X から $\mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ への関数 G^i を $G^i := \frac{f_i}{g_i}$ と定義し, 関数 G^i をプレイヤー $i \in N$ の損失関数とする.
- (v) 各 $i \in N$ に対して, 集合値写像 $S^i: X^i \rightarrow 2^{X_i}$ をプレイヤー $i \in N$ の decision rule とし, $S := \prod_{i=1}^n S^i$ とおく.

Definition 1. $\bar{x} \in X$ がゲーム (MGP) において **consistent** であるとは, すべての $i \in N$ に対して,

$$\bar{x}_i \in S^i(\bar{x}^i) \quad (1.2)$$

が成り立つことをいう. ただし, 記号 $\bar{x}^i$ は $\bar{x}^i = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n)$ を表し, 集合 X^i は $\prod_{j \neq i} X_j$ を表すものとする. つまり, consistent multistrategies の集合は集合値写像 $S: X \rightarrow 2^X$ の不動点の集合である.

* 〒 015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84-4 **E-mail:** yutaka@akita-pu.ac.jp

† 〒 015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84-4 **E-mail:** hoshino@akita-pu.ac.jp

‡ 〒 015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84-4 **E-mail:** yato@akita-pu.ac.jp

次に均衡点 (social equilibrium point) の定義を与える.

Definition 2. $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in X$ がゲーム (MGP) の **social equilibrium point** (for short, **s.e.p.**) であるとは, 任意の $i \in N$ に対して,

$$\bar{x}_i \in S^i(\bar{x}^i) \quad \text{and} \quad G^i(\bar{x}) = \inf_{y_i \in S^i(\bar{x}^i)} G^i(y_i, \bar{x}^i) \quad (1.3)$$

が成り立つことをいう.

2. Main Results

Proposition 1. 次の (1)(2) は同値である.

(1) $\bar{x} \in X$ がゲーム (MGP) の **s.e.p.** である.

(2) 任意の $i \in N$ において, すべての $y_i \in S^i(\bar{x}^i)$ に対して, 次が成り立つ.

$$G^i(\bar{x}) \leq G^i(y_i, \bar{x}^i) \quad (2.1)$$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) であることは $\inf$ の定義より明らか.

次に, (2) $\Rightarrow$ (1) について (1.3) であることをいう. ($\geq$) は $\bar{x} \in X$ より $\inf$ の定義より成立する. また, ($\leq$) であることは, 仮定 (2.1) はすべての $y_i \in S^i(\bar{x}^i)$ で成立しているので,

$$G^i(\bar{x}) \leq \inf_{y_i \in S^i(\bar{x}^i)} G^i(y_i, \bar{x}^i)$$

が得られる. よって, 以上より (1.3) であることがいえ, (1) であることが示された. $\square$

各 $i \in N$ において, 関数 $\varphi_i : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ をつぎで定義する.

$$\varphi_i(x, y) := f_i(x)g_i(y_i, \bar{x}^i) - g_i(x)f_i(y_i, \bar{x}^i) \quad \forall (x, y) \in X \times X. \quad (2.2)$$

更に, $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ をつぎで定義する.

$$\varphi(x, y) := \sum_{i=1}^n \varphi_i(x, y) \quad \forall (x, y) \in X \times X. \quad (2.3)$$

Proposition 2. 次の (1)(2) は同値である.

(1) $\bar{x} \in X$ がゲーム (MGP) の **s.e.p.** である.

(2) 任意の $y \in X$ に対して, $\varphi(\bar{x}, y) \leq 0$.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) であることは, $\bar{x} \in X$ がゲーム (MGP) の **s.e.p.** であることより, Proposition 1. から, $\forall i \in N, y_i \in S^i(\bar{x}^i)$ で

$$G^i(\bar{x}) \leq G^i(y_i, \bar{x}^i)$$

が成り立つ。よって,

$$\varphi_i(\bar{x}, y) = f_i(\bar{x})g_i(y_i, \bar{x}^i) - g_i(\bar{x})f_i(y_i, \bar{x}^i) \leq 0. \quad (2.4)$$

この (2.4) はすべての $i \in N$ で成立するので,

$$\varphi(\bar{x}, y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\bar{x}, y) \leq 0 \quad (2.5)$$

である。

次に, (2) $\Rightarrow$ (1) であることは, 任意の $i \in N$ を固定し, $y = (y_i, \bar{x}^i)$ をとる。今, $\varphi(\bar{x}, y) \leq 0$ であることより,

$$\varphi_i(\bar{x}, y) + \sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}, y) \leq 0 \quad (2.6)$$

を得る。ここで,

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \varphi_j(\bar{x}, y) &= \sum_{j \neq i} (f_j(\bar{x})g_j(y_j, \bar{x}^j) - g_j(\bar{x})f_j(y_j, \bar{x}^j)) \\ &= \sum_{j \neq i} (f_j(\bar{x})g_j(\bar{x}_j, \bar{x}^j) - g_j(\bar{x})f_j(\bar{x}_j, \bar{x}^j)) \\ &\quad (\text{今 } j \neq i \text{ より, } \bar{x} = (\bar{x}_j, \bar{x}^j) = (y_j, \bar{x}^j)) \\ &= \sum_{j \neq i} (f_j(\bar{x})g_j(\bar{x}) - g_j(\bar{x})f_j(\bar{x})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって, 以上より $\varphi_i(\bar{x}, y) \leq 0$ である。 $\square$

Definition 1. X, Y をバナッハ空間とする。このとき集合値写像 $S: X \rightarrow 2^Y$ が upper hemicontinuous (for short, *u.h.c.*) であるとは, 任意の $y^* \in Y^*$ に対して, 関数

$$x \mapsto \sup_{y \in S(x)} \langle y^*, y \rangle \quad (2.7)$$

が 上半連続関数になることである。ただし, Y^* は Y の共役空間を表す。

Lemma 1. X をバナッハ空間, K を X のコンパクトな凸部分集合とし, K から X への集合値写像 S は *u.h.c.* かつ任意の $x \in K$ に対して, $S(x)$ は閉凸集合かつ $S(x) \neq \emptyset$ と仮定する。また, 実数値関数 $\varphi: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ は次の条件 (1)(2)(3) を満たすものとする。

(1) $\forall y \in K, x \mapsto \varphi(x, y)$; 下半連続関数。

(2) $\forall x \in K, y \mapsto \varphi(x, y)$; 凹関数。

(3) $\sup_{y \in K} \varphi(y, y) \leq 0$ 。

更に, 集合 M を次で定義し, M は閉集合であるとする.

$$M := \{x \in K \mid \sup_{y \in S(x)} \varphi(x, y) \leq 0\}$$

このとき, 次を満たす $\bar{x} \in K$ が存在する.

$$\bar{x} \in S(\bar{x}) \quad \text{かつ} \quad \sup_{y \in S(\bar{x})} \varphi(\bar{x}, y) \leq 0. \quad (2.8)$$

この Lemma 1. の証明は, 参考論文 [5] を参考せよ.

Lemma 2. X, Y をバナッハ空間とし, S は X から Y への集合値写像であり, 下半連続関数であるとする. また f は $X \times Y$ から $\mathbf{R}$ への関数であるとし, 下半連続関数であるとする. このとき関数

$$x \mapsto \sup_{y \in S(x)} f(x, y)$$

は下半連続関数である.

この Lemma 2. の証明は, 参考論文 [4] を参考せよ.

Theorem 1. 各 $i \in N$ において, $X_i \subset E$ はコンパクトな凸部分集合とし, X_i から 2^{X_i} への集合値写像 S^i は *u.h.c.* かつ 下半連続であり, 任意の $x^i \in X_i$ に対して, $S^i(x^i)$ は閉凸集合かつ $S^i(x^i) \neq \emptyset$ と仮定する. また, 関数 f_i, g_i は次の条件 (1)(2) を満たすものとする.

(1) 各 $i \in N$ に対して, f_i は X 上で連続関数であり, X_i 上で凸関数である.

(2) 各 $i \in N$ に対して, g_i は X 上で連続関数であり, X_i 上で凹関数である.

このとき, $\bar{x} \in X$ が存在し, 次が成り立つ.

$$\bar{x} \in S(\bar{x}) \quad \text{かつ} \quad \sup_{y \in S(\bar{x})} \varphi(\bar{x}, y) \leq 0. \quad (2.9)$$

従って, $\bar{x} \in X$ はゲーム (MGP) の **s.e.p.** である.

Proof. 各 $i \in N$ で X_i はコンパクト, 凸より $X = \prod_{i=1}^n X_i$ もコンパクト, 凸である. ここで, $\varphi: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ を (2.3) として定義する. このとき, $\forall y \in X, x \mapsto \varphi(x, y)$ は連続である. また, $\forall x \in X, y \mapsto \varphi(x, y)$ は凹関数となる. なぜなら, 任意の $y, z \in X, \alpha \in (0, 1)$ に対して,

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, \alpha y + (1 - \alpha)z) &= f_i(x)g_i(\alpha y_i + (1 - \alpha)z_i, x^i) - g_i(x)f_i(\alpha y_i + (1 - \alpha)z_i, x^i) \\ &\geq f_i(x)[\alpha g_i(y_i, x^i) + (1 - \alpha)g_i(z_i, x^i)] \\ &\quad + g_i(x)[-f_i(\alpha y_i + (1 - \alpha)z_i, x^i)] \\ &\quad (g_i: X_i \rightarrow \mathbf{R}_+, \text{凹}) \\ &\geq \alpha f_i(x)g_i(y_i, x^i) + (1 - \alpha)f_i(x)g_i(z_i, x^i) \\ &\quad + g_i(x)[- \alpha f_i(y_i, x^i) - (1 - \alpha)f_i(z_i, x^i)] \\ &\quad (f_i: X_i \rightarrow \mathbf{R}_+, \text{凸}) \\ &= \alpha[f_i(x)g_i(y_i, x^i) - g_i(x)f_i(y_i, x^i)] \\ &\quad + (1 - \alpha)[f_i(x)g_i(z_i, x^i) - g_i(x)f_i(z_i, x^i)] \\ &= \alpha\varphi_i(x, y_i) + (1 - \alpha)\varphi_i(x, z_i). \end{aligned}$$

よって, $\varphi_i(x, \cdot)$ は凹関数. したがって, $\varphi(x, \cdot) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x, \cdot)$ も凹関数である. 更に, 各 $i \in N$ で任意の $y \in X$ に対して,

$$\begin{aligned}\varphi_i(y, y) &= f_i(y)g_i(y_i, y^i) - g_i(y)f_i(y_i, y^i) \\ &= f_i(y)g_i(y) - g_i(y)f_i(y) \\ &= 0\end{aligned}$$

より, 任意の $y \in X$ に対して,

$$\varphi(y, y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(y, y) = 0.$$

また, 集合 M を

$$M := \{x \in X \mid \sup_{y \in S(x)} \varphi(x, y) \leq 0\}$$

で定義すると, $S, \varphi(\cdot, y)$ が $x \in X$ について下半連続関数であることより Lemma 2. から, M は閉集合である. よって, 以上より Lemma 1. から, $\bar{x} \in X$ が存在し, 次が成り立つ.

$$\bar{x} \in S(\bar{x}) \quad \text{かつ} \quad \sup_{y \in S(\bar{x})} \varphi(\bar{x}, y) \leq 0. \quad (2.10)$$

従って, Proposition 2. から, この $\bar{x} \in X$ はゲーム (MGP) の **s.e.p.** であることがいえ示された. $\square$

References

- [1] J.P.Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory, Revised Edition (North-Holland, Amsterdam 1982).
- [2] J.-P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusion, Springer-Verlag, Grundlehren der math, (1984).
- [3] J.-P. Aubin and I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis, A Wiley-Interscience Publication, (1984).
- [4] J.P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhäuser Boston, (1990).
- [5] J.P.Aubin, Optima and Equilibria (Springer-Verlag, New York, 1993).
- [6] V. Barbu and Th. Precupanu, Convexity and Optimization in Banach Spaces, Editura Academiei, Bucharest, Romania, (1986).
- [7] R.E.Bruck, A Simple Proof of The Mean Ergodic Theorem for Nonlinear Contractions in Banach Spaces, Israel J. Math. 32 (1979) 107-116.
- [8] D.G.Luenberger, Optimization by Vector Space Methods (John Wiley & Sons, inc., 1969).
- [9] K. Tanaka and K. Yokoyama, On ε -Equilibrium Point in a Noncooperative n -person Game, J. Math. Anal. Appl., 160 (1991) 413-423.
- [10] R.T.Rockafellar, Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, Duke Math. J. 33 (1966) 81-89.