

高次 Chow 群を用いた有限体上の多様体のゼータ関数の 特殊値の記述：サーベイ (Special values of zeta functions of varieties over finite fields via higher Chow groups : a survey)

By

宮崎 弘安 (Hiroyasu MIYAZAKI)*

Abstract

The aim of this paper is to survey the author's result (to appear in [15]), which describes special values of zeta functions of (singular) varieties over finite fields by using higher Chow groups. To be precise, we show that the special value at $s = 0$ is equal to the alternating product of the ratio of the cardinalities of kernels and cokernels of maps from higher Chow group to another invariant which is called weight homology. The principal idea of proof is to reduce the problem to the case that the variety is smooth and proper by using weight spectral sequences.

本稿の目的は、有限体上の（特異な）多様体のゼータ関数の特殊値を、高次チャウ群を用いて記述する筆者の結果（[15]）を概説することである。正確には、高次チャウ群から重みホモロジー群とよばれる不変量への写像の核と余核の位数の商の交代積として、特殊値を記述する公式を与える。証明の主なアイディアは、重みスペクトル系列を用いて問題をスムーズかつ固有な場合に帰着することである。

序

本稿では、ゼータ関数の特殊値に関する筆者の最近の結果（[15]）を概説する。まず、主役となる算術的スキームのゼータ関数について復習する。スキームが算術的であるとは、有理整数環 $\mathbb{Z}$ 上有限型かつ分離的であることである。算術的スキーム X に対し、そのゼータ関数が次で定義される：

$$\zeta_X(s) = \prod_{x \in X_{(0)}} \frac{1}{1 - (\#k(x))^{-s}}.$$

Received March 15, 2014. Revised October 15, 2014.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 11M38, 14C15, 19E15.

Key Words: special value, zeta function, higher Chow group, weight homology, weight complex.

Supported by the Program of Leading Graduate Schools, MEXT, Japan.

*Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan.

e-mail: miyazaki@ms.u-tokyo.ac.jp

© 2015 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

ここで, $X_{(0)}$ は X の閉点全体の集合を表す. X が $\mathbb{Z}$ 上有限型であることから, 任意の閉点 $x \in X$ に対し, その剰余体 $k(x)$ は有限体である. $\#k(x)$ はその位数とする. 上式の右辺は $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束する ([18, Theorem 1]).

X がさらに有限体 $k = \mathbb{F}_q$ (q は素数 p の冪) 上のスキームであるとき, $t = q^{-s}$ と置くことにより, ゼータ関数 ζ_X は次のように書き換えられる:

$$\zeta_X(s) = \prod_{x \in X_{(0)}} \frac{1}{1 - t^{\deg(x)}}.$$

ここで, $\deg(x) = [k(x) : k]$ である. この式の右辺を $Z_{X/k}(t)$ とおき, t の関数とみなす. 基礎体に誤解の余地がない時は, 単に $Z_X(t)$ と省略して表す. 実は, $Z_X(t)$ は t に関する (有理数係数) 有理関数であることが知られている. 任意の整数 $r \in \mathbb{Z}$ に対し, 有理関数 $Z_X(t)$ の $t = q^{-r}$ における Laurent 展開の先頭項係数のことを, ゼータ関数の $s = r$ での特殊値と呼び, $\zeta_X(r)^*$ と表す.

有限体上のスキームのゼータ関数の特殊値については, これまでに多くの研究があり, 様々な興味深い結果が知られている. 不思議なことに, 特殊値は重要な数論的不変量と密接に結びついている. 例えば, 有限体上スムーズかつ固有で幾何学的に既約なスキームに対しては, Milne によるエタールコホモロジー群を用いた古典的な記述がある ([14, Theorem 0.4]). 我々は, Kerz-齋藤による次の結果 ([12, Theorem 10.1]) に注目する: 有限体上スムーズかつ固有で幾何学的に既約な d 次元のスキームに対し,

$$\zeta_X(0)^* = \prod_{i=0}^{2d} (\# \operatorname{CH}_0(X, i)_{\operatorname{tor}})^{(-1)^i}.$$

ここで, $\operatorname{CH}_0(X, i)$ は X の (次数 0 の) 高次 Chow 群と呼ばれる不変量であり, $\operatorname{CH}_0(X, i)_{\operatorname{tor}}$ はそのねじれ部分群 (この場合は有限群) を表す. 高次 Chow 群の正確な定義は後節に譲り, ここではその数論幾何学的な意義を述べるにとどめる. 高次 Chow 群は, $i = 0$ では通常の Chow 群 (代数的サイクルの群を有理同値で割った群) に一致し, Chow 群の一般化になっている. 一方で, 高次 Chow 群は (適当な次数の付け替えにより) モチフィックコホモロジー群と一致することが知られている ([16, Proposition 19.18]). モチフィックコホモロジーはある意味で普遍的なコホモロジー理論であり, エタールコホモロジーやドラムコホモロジー等の重要なコホモロジー理論はその「特殊化」とみなすことが出来る. モチフィックコホモロジーは初め Grothendieck により存在を予想されていたが, 現在では Voevodsky により構成されたモチーフの導来圏の中で表現される関手として実現されている ([16, Definition 14.17]).

筆者は, [15] において, Kerz-齋藤による特殊値の記述を, 有限体上の任意の準射影的なスキームに対して拡張した. これは, 加藤による結果 ([11, Proposition 7.3]) の拡張ともみなせる. 簡単のために, 本稿では有限体上の多様体に対する特異点解消が存在すると仮定する. 特異点解消を仮定しない場合の証明にはさらなる準備が必要なので, 最終節で軽く触れるにとどめ, 本稿では詳細には立ち入らない. 第 1 節では, 主張の正確な定式化

を与えるための準備として、「ホモロジー理論」の概念を定義する．第 2 節では、ホモロジー理論を生み出す道具の役割を担う「重み複体」を導入する．第 3 節では、以上の準備のもとで「レギュレータ」と呼ばれるホモロジー理論の射を構成し、主定理の主張を述べる．第 4 節では、主定理の証明と、特異点解消を仮定しない場合についての概略を述べる．

記号 本稿を通じ k を完全体とする（第 3 節以降は有限体とする）．アーベル群のなす圏を Ab で表す． Var_k で、 k 上準射影的なスキームのなす圏を表す． Var_k と同じ対象を持ち、固有射のみを射とする部分圏を $(\text{Var}_k)_*$ と表す．さらに、スムーズかつ固有なスキームのなす部分圏を SP_k とする： $\text{SP}_k \subset (\text{Var}_k)_* \subset \text{Var}_k$ ．

§ 1. ホモロジー理論

k を完全体とする．また、簡単のため、本節以降では常に、 k 上の多様体の特異点解消の存在を仮定する（特異点解消を仮定しない場合の結果については最終節を参照）．ここで、 k 上の多様体 X の特異点解消とは、 k 上の固有な双有理射 $X' \rightarrow X$ であって、 X' が k 上スムーズであるもののことである．

まず、ホモロジー理論を定義する．一言で言えば、ホモロジー理論とは、任意の準射影的スキームに対してアーベル群の族を与える対応であって、固有射による押し出し（push-forward）及び開集合への制限（restriction）があり、さらに局所化完全系列を持つもののことである：

定義 1.1. ([13, Definition 1.1]) ホモロジー理論とは、共変関手の族 $H_* = \{H_n : (\text{Var}_k)_* \rightarrow \text{Ab}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ であって、以下の 2 つの付加データが与えられたもののことである：

(1) 開埋め込み $j : U \rightarrow X$ が与えられたとき、各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し、アーベル群の写像 $j^* : H_n(X) \rightarrow H_n(U)$ が与えられる．さらに開埋め込み $j' : V \rightarrow U$ が与えられたとき、 $(j \circ j')^* = j'^* \circ j^*$ が成り立つ．さらに、 $(\text{id}_X)^* = \text{id}$ も成立する．

(2) 任意の開埋め込み $i : Y \rightarrow X$ に対し、補集合を $j : U \rightarrow X$ とするとき、関手的な射の族 $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が存在して、以下の系列が完全である：

$$\cdots \rightarrow H_n(Y) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j^*} H_n(U) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(Y) \rightarrow \cdots.$$

ホモロジー理論の射とは、上記の定義に現れるすべての射と可換な、関手の自然変換の族のことである．

新しいホモロジー理論を見つけるにはどうすればよいだろうか？ 例えば、次のような共変関手が与えられている状況を考えよう：

$$F_* : \text{SP}_k \longrightarrow \mathcal{C}_+(\text{Ab}).$$

ここに、 $\mathcal{C}_+(\text{Ab})$ は、アーベル群を値に持つ下に有界なホモロジー的複体の圏を表す． F_* の行き先でホモロジー群をとることにより、各整数 n に対して関手 $H_n(F) : \text{SP}_k \rightarrow \text{Ab}$

が得られる. 次の定理は, どのような場合に, 関手の族 $H_*(F_*) = \{H_n(F_*)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ がホモロジー理論に拡張されるかを教えてくれる ([6], [13, Construction 3.6, Theorem 5.1]):

定理 1.2. 関手 F_* が *coproduct* を保ち, かつ, 次の条件 (♡) を満たすならば, 関手の族 $H_*(F_*)$ はあるホモロジー理論 H_*^F に標準的に拡張される.

(♡): 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し, 関手 $H_n(F_*) : \mathrm{SP}_k \rightarrow \mathrm{Ab}$ は (*effective*) Chow モチーフの圏 Chow_k を経由する.

Chow モチーフの圏 Chow_k は, 以下で定義される前加法圏 Corr_k を擬アーベル完備化した圏である (擬アーベル完備化については以下の注を参照): Corr_k の対象は SP_k の対象と等しい. $X, Y \in \mathrm{Corr}_k$ の射の集合は, Chow 群を用いて $\bigoplus_{i \in I} \mathrm{CH}_{\dim X_i}(X_i \times_k Y)$ と定める. ここに, $\{X_i\}_{i \in I}$ は X の連結成分の集合である. 射の合成は次のように定める: $X, Y, Z \in \mathrm{Corr}_k$ と, $\alpha \in \mathrm{Corr}_k(X, Y), \beta \in \mathrm{Corr}_k(Y, Z)$ に対し, 合成を $\beta \circ \alpha = p_{XZ*}(p_{XY}^*(\alpha) \cdot p_{YZ}^*(\beta))$ と定義する. ここに, p_{XY}, p_{YZ}, p_{XZ} は $X \times_k Y \times_k Z$ からの射影を表し, p_{XZ*} は Chow 群の関手性から来る押し出し, p_{XY}^*, p_{YZ}^* は引き戻しを表す. また, 「 $\cdot$ 」はサイクルの交叉積 (cf. [5, Section 6] etc.) を表す.

注 1. (i) 一般に, 前加法圏 $\mathcal{C}$ が擬アーベル (pseudo-abelian) とは, $p \circ p = p$ を満たす任意の $\mathcal{C}$ の射 p (このような射を射影子 (projector) という) に対し, 核対象 $\ker(p)$ が存在することを言う. このことは, 任意の射影子に対応した直和分解が存在することと言い換えられる. 任意の前加法圏 $\mathcal{C}$ に対して, その擬アーベル完備化 (Karoubi envelope と呼ばれる) $\mathrm{kar}(\mathcal{C})$ を次で定める: 対象は $\mathcal{C}$ の対象 X と射影子 $p : X \rightarrow X$ の組 (X, p) 全体とする. 射 $(X, p) \rightarrow (Y, q)$ は $\mathcal{C}$ の射 $f : X \rightarrow Y$ であつて, $f = q \circ f \circ p$ を満たすものとして定める. 擬アーベル完備化 $\mathrm{kar}(\mathcal{C})$ は構成から擬アーベルであり, $X \in \mathcal{C}$ を $(X, \mathrm{id}_X) \in \mathrm{kar}(\mathcal{C})$ に対応させることで自然な忠実充満関手 $\mathcal{C} \rightarrow \mathrm{kar}(\mathcal{C})$ が得られる.

(ii) 通常のスキームの射をそのグラフに対応する代数的サイクルとみなすことで, 標準的な関手 $\mathrm{SP}_k \rightarrow \mathrm{Chow}_k$ が得られる.

(iii) 多くの文献では, 上で定義した Chow_k を effective Chow モチーフの圏といい, $\mathrm{Chow}_k^{\mathrm{eff}}$ と表すが, 本稿では記号 eff を省略して用いる.

また, 上で定義した Chow_k の構成は, [6] 等で用いられている定義とは双対的であり, このため, 次節で導入する「重み複体」の関手性も, [6] のものとは双対的になっていることに注意されたい.

定理 1.2 の主張のホモロジー理論 H^F を具体的に構成するために, 次節で「重み複体」の概念を導入する.

§ 2. 重み複体

一般に, 加法圏 $\mathcal{A}$ に対して, $\mathcal{A}$ に値を持つ複体の圏を $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, そのホモトピー圏を $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ で表す. ホモトピー圏は, 複体の次数のシフトによって自然な三角圏の構造を持つ. また,

有界な複体のなす充滿部分圏を $\mathcal{H}^b(\mathcal{A})$ とおく. このとき, Gillet-Soulé により導入された重み複体の概念が次のように定式化できる ([6, Theorem 2]):

定理 2.1. k を体とし, k 上の特異点解消を仮定する. このとき, 共変的な関手

$$W : (\mathrm{Var}_k)_* \longrightarrow \mathcal{H}^b(\mathrm{Chow}_k)$$

であって, 任意の開埋め込み $j : U \rightarrow X$ に対して関手的な射 $j^* : W(X) \rightarrow W(U)$ が与えられ, 以下の条件 (0)-(4) を満たすものが存在する:

(0) 任意の $X \in \mathrm{SP}_k$ に対し, $W(X) = X[0]$ (0 次に集中した複体).

(1) 任意の $X \in \mathrm{Var}_k$ に対し, $W(X)$ は次の形の複体で代表される:

$$X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0.$$

ここで, 各 $m = 0, \dots, n$ に対し, X_m は $\dim(X_m) \leq \dim(X) - m$ を満たす SP_k の対象を Chow_k の対象とみなしたものである.

(2) 任意の開埋め込み $i : Y \rightarrow X$ に対し, 補集合を $j : U \rightarrow X$ とすると, 関手的な射 $\delta : W(U) \rightarrow W(Y)[1]$ が存在して

$$W(Y) \xrightarrow{i_*} W(X) \xrightarrow{j^*} W(U) \xrightarrow{\delta} W(Y)[1]$$

は *distinguished triangle* である.

(3) $W(X \times_k Y) = W(X) \otimes W(Y)$.

(4) 任意の開被覆 $X = U \cup V$ と任意の閉被覆 $X = A \cup B$ に対し関手的な *distinguished triangles*

$$W(A \cap B) \rightarrow W(A) \oplus W(B) \rightarrow W(X) \rightarrow W(A \cap B)[1]$$

$$W(X) \rightarrow W(U) \oplus W(V) \rightarrow W(U \cap V) \rightarrow W(X)[1]$$

が存在する.

注 2. $X \in \mathrm{Var}_k$ に対し, $W(X)$ を X の重み複体 (weight complex) と呼ぶ.

重み複体を用いれば, 定理 1.2 の主張の条件 (♡) を満たす関手 F_* に対し, 標準的なホモロジー理論 H_*^F を次式で定めることができる: 任意の $X \in \mathrm{Var}_k$ に対し,

$$H_n^F(X) := H_n(\mathrm{tot}(F_*(W(X))).$$

ここに, tot はアーベル群の 2 重複体に対してその全複体を対応させる関手を表す. 定理 1.2 が定理 2.1 の系であることは容易である.

重み複体の幾何学的な意味を理解するために, 次の重要な例を考えよう.

例 2.2. $X \in \mathrm{SP}_k$ とし, $Y \subset X$ を X 上の単純正規交叉因子とする. Y の既約成分の集合を $\{Y_i\}_{i \in I}$, $I = \{1, \dots, N\}$ とし, 自然数 $1 \leq a \leq d = \dim(X)$ に対して

$$Y_{(a)} = \coprod_{i_1 < \cdots < i_a} Y_{i_1} \cap \cdots \cap Y_{i_a}$$

と置く. また, $Y_{(0)} = X$ と約束する. 補集合 $U := X \setminus Y$ に対し, 重み複体 $W(U)$ は次で表される:

$$W(U) = (Y_{(d)} \rightarrow Y_{(d-1)} \rightarrow \cdots \rightarrow Y_{(1)} \rightarrow Y_{(0)}).$$

ここに, $Y_{(a+1)} \rightarrow Y_{(a)}$ は, 閉埋め込みを加法圏 Chow_k の射とみなして交代的に和をとったものである. この例から分かるように, 重み複体にはスキームの組み合わせ論的な情報が反映されている.

純粹に組み合わせ論的な情報だけを抽出する不変量として, 重みホモロジー理論を導入する.

定義 2.3. ([9, Theorem 9.2], [10, Definition 5.3]) 共変関手 $F_*^W; \text{SP}_k \rightarrow \mathcal{C}_+(\text{Ab})$ を,

$$F_*^W(X) := \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}[0] \simeq \text{Hom}_{\text{Ab}}(\text{CH}^0(X), \mathbb{Z})[0]$$

で定める. ここに, $\pi_0(X)$ は X の連結成分の集合を表す. 最右辺の Chow 群を用いた表示から, F_*^W は定理 1.2 の条件 (♡) を満たすことがわかる. F_*^W に対応するホモロジー理論を H_*^W と書き, 重みホモロジー理論 (weight homology theory) と呼ぶ.

例 2.4. 例 2.2 の U に対して, 重みホモロジー群 $H_*^W(U)$ は, 次の複体のホモロジー群である:

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}^{\pi_0(Y_{(d)})} \rightarrow \mathbb{Z}^{\pi_0(Y_{(d-1)})} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{Z}^{\pi_0(Y_{(1)})} \rightarrow \mathbb{Z}^{\pi_0(Y_{(0)})} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

§ 3. 主定理の主張

まず, 体上有限型なスキームの高次 Chow 群の定義を復習する.

定義 3.1. ([17, Section 8.1]) 非負整数 $q \geq 0$ に対し, スキーム Δ^q を

$$\Delta^q := \text{Spec}(\mathbb{Z}[t_0, \dots, t_q]/(t_0 + \cdots + t_q - 1))$$

で定める. 整数 $r \geq 0$ に対し, 関係式 $t_{i_1} = \cdots = t_{i_r} = 0$, $(0 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq q)$ で定まる Δ^q の閉部分スキームを Δ^q の面 (face) という. 以下, X を体 k 上有限型なスキームとする. $X \times_{\mathbb{Z}} (\text{face}) \subset X \times_{\mathbb{Z}} \Delta^q$ を $X \times \Delta^q$ の面という. 整数 $q, r \geq 0$ に対し, $X \times_{\mathbb{Z}} \Delta^q$ 上の $(r+q)$ 次元閉部分整スキームが生成する自由アーベル群を $Z_{r+q}(X \times_{\mathbb{Z}} \Delta^q)$ と表す. $Z_{r+q}(X \times_{\mathbb{Z}} \Delta^q)$ の部分群 $z_r(X, q)$ を, $X \times_{\mathbb{Z}} \Delta^q$ のすべての面と正しく交わる既約閉集合から生成される自由アーベル群と定める. ここで, 既約閉集合 $V \subset X \times_{\mathbb{Z}} \Delta^q$ が余次元 c の面 $Z \subset X \times_{\mathbb{Z}} \Delta^q$ と正しく交わるとは, $V \cap Z$ が空集合であるか, または $V \cap Z$ の任意の既約成分 T について $\text{codim}_V(T) \geq c$ が成り立つことである (記号 codim_V は V の中での余次元を意味する). 以上の記号のもとで, X の高次 Chow 群 $\text{CH}_r(X, *)$ を, 次のアーベル群の複体のホモロジー群として定義する:

$$\cdots \rightarrow z_r(X, q) \rightarrow z_r(X, q-1) \rightarrow \cdots \rightarrow z_r(X, 1) \rightarrow z_r(X, 0) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

ここで、複体の微分写像は、face の埋め込みに関するサイクルの引き戻しの交代和として定義される。アーベル群の複体 $z_r(X, *)$ を r 次のサイクル複体という。

注 3. 定義から $\mathrm{CH}_r(X, 0) = \mathrm{CH}_r(X)$ である。高次 Chow 群は、固有射について共変関手的、平坦射について反変関手的である。それぞれ、サイクルの押し出しと引き戻しに対応する。また、局所化完全系列も持つ。すなわち、高次 Chow 群は定義 1.1 の意味でホモロジー理論を与える。

以下では、サイクル複体の次数は常に $r = 0$ として考える。高次 Chow 群の定義に現れたサイクル複体を、 SP_k 上の関手とみなしたものを $F_*^{\mathrm{CH}} := z_0(-|_{\mathrm{SP}_k}, *)$ と表す。 F_*^{CH} のホモロジー関手は当然ながら高次 Chow 群であり、これは Chow モチーフの圏を経由することがわかる。したがって、定理 1.2 により、 F_*^{CH} に対応するホモロジー理論 H_*^{CH} を考えることが出来る。実は、[13, Construction 3.6, Theorem 4.1] を用いることで次の事実を示すことができる：

命題 3.2. ホモロジー理論の同型

$$\mathrm{CH}_0(-, *) \simeq H_*^{\mathrm{CH}}$$

が存在する。

この命題のどこが嬉しいのだろうか？ 一般に、定理 1.2 の条件 (♡) を満たす関手 F_* に対応するホモロジー理論 H_*^F は、次の著しい性質を持つ：

命題 3.3. 任意の $X \in \mathrm{Var}_k$ に対し、重み複体を $W(X) = (X_a)_{a \in \mathbb{Z}}$ と表す。ただし、各整数 $a \in \mathbb{Z}$ に対して X_a は SP_k の対象から来ているものとする。このとき、次のホモロジー的スペクトル系列が存在する：

$$E_{a,b}^1 = H_b^F(X_a) \implies E_{a+b} = H_{a+b}^F(X).$$

証明. H_*^F の定義から、 $H_n^F(X)$ はアーベル群の 2 重複体

$$F_*(W(X)) : \cdots \rightarrow F_*(X_{a+1}) \rightarrow F_*(X_a) \rightarrow F_*(X_{a-1}) \rightarrow \cdots$$

の total complex の n 次ホモロジー群であった。一般に、アーベル群の（ホモロジー的）2 重複体 $C_{*,*}$ に対し、スペクトル系列

$$E_{a,b}^1 = H_b^v(C_{a,*}) \implies E_{a+b} = H_{a+b}(\mathrm{tot}(C_{*,*}))$$

が存在する ([19, Section 5.6]). ここで、 H^v は 2 重複体の添字 $*$ に関するホモロジー群を表す。この一般論を $C_{*,*} = F_*(W(X)) = F_*(X_*)$ に対して適用すれば、所望のスペクトル系列を得る。重み複体 $W(X)$ の代表 (X_*) の選び方はホモトピー同値を除いて一意的なので、上記のスペクトル系列の E^2 項以降は代表 (X_*) に依存せず一意的に定まる。□

つまり, 命題 3.2 と命題 3.3 により, 任意の準射影的スキームの高次 Chow 群を, スムーズかつ固有なスキームの高次 Chow 群でかなりの程度まで統制することが出来るのである.

また, ホモロジー理論 H^F の構成が F について関手的であることから従う次の事実も有用である:

命題 3.4. 定理 1.2 の条件 (♡) を満たす 2 つの関手 F_*, G_* の自然変換 $f: F_* \rightarrow G_*$ が与えられているとする. このとき, ホモロジー理論の自然な射 $H_*^F \rightarrow H_*^G$ が存在する.

以上の準備のもとで, 次の重要なホモロジー理論の射 Reg を構成する. この射は主定理の主張を述べるために必要となる.

定義 3.5. アーベル群の複体を値に持つ SP_k 上の 2 つの関手の自然変換 $F_*^{\text{CH}} \rightarrow F_*^W$ を次で定義する:

$$F_*^{\text{CH}} = z_0(-|_{\text{SP}_k}, *) \xrightarrow{\alpha} \text{CH}_0(-|_{\text{SP}_k})[0] \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}^{\pi_0(-|_{\text{SP}_k})} = F_*^W$$

ここで, α は次数 0 における truncation から誘導される自然な射を表す. また, β は連結成分ごとに 0 サイクルの次数写像 (degree map) を考えて直和したものである. この自然変換に対応するホモロジー理論の射 (命題 3.2, 命題 3.4 参照)

$$\text{Reg}_*: \text{CH}_0(-, *) \simeq H_*^{\text{CH}} \rightarrow H_*^W$$

をレギュレータ (regulator) と呼ぶ.

以下, 主定理の主張を述べる.

$k = \mathbb{F}_q$ を有限体とする. Var_k の対象 X に対し, 次の条件を考える:

$$(\spadesuit)_X: \text{Reg}_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \text{ は, } n = 2, \dots, \dim(X) \text{ に対し全射.}$$

この条件は一見奇妙に思えるかもしれないが, 実際には任意の $X \in \text{Var}_k$ に対して常に成り立つと予想される. 実際, 次の Parshin 予想を仮定すれば, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ と任意の $X \in \text{Var}_k$ に対して $\text{Reg}_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が同型であることを証明することができる (詳細は [15] 参照):

予想 3.6. 任意の正整数 $n > 0$ と $X \in \text{SP}_k$ に対し, $\text{CH}_0(X, n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

もっとも, 条件 $(\spadesuit)_X$ は, あくまでも問題にしている多様体 X のみに関する条件なので, SP_k の対象すべてに対する予想である Parshin 予想に比べて著しく弱い条件であることに注意されたい.

次の記号を準備する: 任意のアーベル群の射 $f: A \rightarrow B$ に対し, f の核と余核のねじれ部分群が有限群であるとき, $\chi(f) := \#\text{Coker}(f)_{\text{tor}} / \#\text{Ker}(f)_{\text{tor}}$ と置く.

定理 3.7. ([15]) X を Var_k の任意の対象とし, 条件 $(\spadesuit)_X$ が成り立つと仮定する. このとき, $\chi(\text{Reg}_n(X))$ は任意の自然数 $n \geq 0$ に対し正の有理数として *well-defined* であり, $n > 2\dim(X)$ においては 1 に等しく, 次式が成り立つ:

$$\zeta_X(0)^* = \pm \prod_{n=0}^{2\dim(X)} \chi(\text{Reg}_n(X))^{(-1)^{n+1}}.$$

注 4. 本稿の初めに述べたように, 我々は特異点解消を仮定して議論しているが, 主定理の主張は, X の次元以下の次元を持つ多様体に対する特異点解消のみを仮定すれば成立する. [2], [3] によれば, 3 次元以下の多様体に対して特異点解消は存在するので, $\dim(X) \leq 3$ においては仮定が充たされることになる.

注 5. この定理が, 序で述べた Kerz-斎藤の公式の一般化になっていることは, 次の事実から確かめられる:

(1) $X \in \text{SP}_k$ で k 上幾何学的に既約なものに対し, 次数写像 $\deg : \text{CH}_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ は全射であり, その核は $\text{CH}_0(X)$ のねじれ部分群 $\text{CH}_0(X)_{\text{tor}}$ に等しい. また, $\text{CH}_0(X)_{\text{tor}}$ は有限群であることも知られている. したがって, とくに $\text{CH}_0(X)$ は有限生成アーベル群である.

(2) $X \in \text{SP}_k$ で連結なものに対し, レギュレータは次で与えられる:

$$\text{Reg}_0(X) = \deg : \text{CH}_0(X) \rightarrow \mathbb{Z},$$

$$\text{Reg}_n(X) = 0 : \text{CH}_0(X, n) \rightarrow 0 \quad (n > 0).$$

(2) はレギュレータの構成から即座にわかる. (1) の全射性は Chebotarev の密度定理の帰結である. Chow 群の有限性は, Bloch 写像と呼ばれる写像を用いて Chow 群とエタール・コホモロジー群を比較することで導かれる大変深い結果である. これらの事実の証明については [17] の第 13 章に詳しく解説されている.

§ 4. 証明の概略

本節では主定理の証明の概略を述べる. 簡単のため, 以下では Parshin 予想 3.6 を仮定する. このとき, 有限係数高次 Chow 群と有限係数エタールコホモロジー群の比較 ([12, Theorem 9.3]) を用いることにより, 高次 Chow 群の有限性に関する次の事実を示すことができる ([15]):

命題 4.1. (Parshin 予想の下で) 任意の $X \in \text{SP}_k$ に対し以下が成り立つ.

(1) 任意の正整数 $n > 0$ に対し $\text{CH}_0(X, n)$ は有限群.

(2) $n > 2\dim(X)$ に対し, $\text{CH}_0(X, n) = 0$.

主定理の証明のポイントは, 多様体 $X \in \text{Var}_k$ に対する主定理の等式の両辺を, 命題 3.3 を用いて, 重み複体 $W(X) = (X_a)_{a \in \mathbb{Z}}$ に現れる $X_a \in \text{SP}_k$ たちに関する式に書きかえ

ることである。まず、レギュレータとスペクトル系列の構成が関手的であることから従う次の事実注意到する:

補題 4.2. レギュレータは、スペクトル系列の射 $E^{\text{CH}} \rightarrow E^W$ と両立する。ここで、 E^{CH}, E^W はそれぞれ、命題 3.3 において $F = F^{\text{CH}}, F^W$ と置いたものである。

注 6. 注 5(1) で述べた事実と命題 4.1(1) より、スペクトル系列 E^{CH} の E^1 項に現れる群 $E_{a,b}^1 = \text{CH}_0(X_a, b)$ は、 $b = 0$ のとき有限生成であり、 $b > 0$ のとき有限群である。また、定理 2.1(1) のような重み複体の代表 (X_a) をとれば、命題 4.1(2) より、非自明な群は直線 $2a + b = 2\dim(X)$, $a = 0, b = 0$ で囲まれる三角形の中にしか現れない。他方、スペクトル系列 E^W の E^1 項に現れる群 $E_{a,b}^1$ は、 $b = 0$ のとき $\mathbb{Z}^{\pi_0(X_a)}$ に等しく、 $b > 0$ のとき自明群となる。したがって、補題 4.2 より、任意の $X \in \text{Var}_k$ と任意の自然数 $n \geq 0$ に対し、レギュレータ $\text{Reg}_n(X)$ の核と余核は有限群であり、かつ $n > 2\dim(X)$ においては自明群となる。言い換えれば、 $\chi(\text{Reg}_n(X))$ は well-defined であり、 $n > 2\dim(X)$ においては 1 に等しい。

さらに、再び補題 4.2 から、任意の $X \in \text{Var}_k$ に対し、有界な複体 $(X_a)_{a \in \mathbb{Z}}$ を重み複体 $W(X)$ の代表とすれば、主定理の等式の右辺を次のように記述できる:

$$\prod_{n=0}^{2\dim(X)} \chi(\text{Reg}_n(X))^{(-1)^n} = \prod_{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \chi(\text{Reg}_b(X_a))^{(-1)^{(a+b)}}.$$

上で述べたことより、右辺の無限積は実質有限積であることに注意されたい。

主定理の右辺の well-definedness が担保されたので、次に等式の証明を与える。以下では 2 つの方法 (I), (II) を紹介する。方法 (I) は、特異点解消を仮定しない場合にも通用する証明であるが、より複雑な議論が必要になる。方法 (II) は、特異点解消を仮定している場合にしか使えないが、議論は非常に簡明になる。

方法 (I) : 主定理の左辺を重み複体を用いて直接記述する方法

補題 4.3. 任意の $X \in \text{Var}_k$ と、重み複体の有界な代表 $W(X) = (X_a)_{a \in \mathbb{Z}}$ に対し、複素関数の等式

$$\zeta_X(s) = (\zeta_{X_a}(s))^{(-1)^a}$$

が成り立つ。特に、特殊値に関する等式

$$\zeta_X(0)^* = (\zeta_{X_a}(0)^*)^{(-1)^a}$$

も成り立つ。

この補題と、注 6 の等式を合わせれば、主定理の等式が従う。

補題の証明の概略: 以下の方法 (II) の補題 4.5 と, 定理 2.1(2) により, X は固有としてよい. X が固有な場合, 重み複体 $W(X)$ は, その構成から, X の hyperenvelope と呼ばれる hypercovering $X_\bullet \rightarrow X$ を標準的に Chow モチーフの複体とみなしたものと一致する (詳しくは [6, Section 2] 参照). Hyperenvelope はとくに proper hypercovering なので, 体 k の標数と異なる素数 l に対し, $\mathbb{Q}_l$ 係数エタールコホモロジーは hypercover $X_\bullet \rightarrow X$ に関する descent を充たす (コホモロジーの hypercovering に関する descent については [1, Theorem 7.9] 等を参照). この事実と, Grothendieck によるゼータ関数のエタールコホモロジー群を用いた行列式表示 ([4, Rapport, Theorem 3.1]) を合わせれば, 補題が示される.

方法 (II) : 次元に関する帰納法でスムーズ固有な場合に帰着する方法

多様体 X の次元に関する帰納法で証明する. 次元 $d-1$ 以下の多様体に対しては主定理が成り立つと仮定する. 注 5 で注意したように, 主定理の等式は $X \in \mathrm{SP}_k$ の場合には序節で述べた Kerz-斎藤の結果そのものである. 任意の $X \in \mathrm{Var}_k$ に対し, 固有な多様体 $\bar{X}$ への稠密開部分集合としての埋め込み $X \rightarrow \bar{X}$ が存在する. 特異点解消の仮定から, $\bar{X}$ はある $Z \in \mathrm{SP}_k$ と双有理である. とくに, $\bar{X}$ と Z は同型な稠密開部分集合を持つ. したがって, 主定理を Kerz-斎藤の結果に帰着するためには, 次の補題を示せば十分である:

補題 4.4. 任意の次元 d の $X \in \mathrm{Var}_k$ と, X の稠密開部分スキーム $U \subset X$ に対して, 次の同値が成立する:

$$X \text{ に対し定理 3.7 が成り立つ} \iff U \text{ に対し定理 3.7 が成り立つ.}$$

証明. 補集合 $Y = X \setminus U$ に被約な構造を与えて X の閉部分スキームとみなす. U は X の中で稠密ゆえ, Y の次元は $d-1$ 以下である. 帰納法の仮定から,

$$\zeta_Y(0)^* = \pm \prod_{n=0}^{2\dim(Y)} \chi(\mathrm{Reg}_n(Y))^{(-1)^{n+1}}$$

が成り立つ. したがって, 補題の同値を示すためには, 次の 2 つの等式を示せばよい:

$$\zeta_X(0)^* = \zeta_U(0)^* \cdot \zeta_Y(0)^*,$$

$$\prod_{n=0}^{2\dim(X)} \chi(\mathrm{Reg}_n(X))^{(-1)^n} = \prod_{n=0}^{2\dim(U)} \chi(\mathrm{Reg}_n(U))^{(-1)^n} \cdot \prod_{n=0}^{2\dim(Y)} \chi(\mathrm{Reg}_n(Y))^{(-1)^n}.$$

ひとつめの等式は, 以下の補題 4.5 の帰結である. ふたつめの等式は, 局所化完全系列から来る次の可換図式に蛇の補題を繰り返し適用することで得られる:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathrm{CH}_0(Y, n) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_0(X, n) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_0(U, n) \longrightarrow \cdots \\ & & \mathrm{Reg}_n(Y) \downarrow & & \mathrm{Reg}_n(X) \downarrow & & \mathrm{Reg}_n(U) \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_n^W(Y) & \longrightarrow & H_n^W(X) & \longrightarrow & H_n^W(U) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

□

補題 4.5. 任意の $X \in \text{Var}_k$ と閉部分スキーム $Y \rightarrow X$ に対し, 補集合を U とすれば, 次の複素関数の等式が成り立つ:

$$\zeta_X(s) = \zeta_U(s) \cdot \zeta_Y(s).$$

証明. ゼータ関数の定義式 $\zeta_X(s) = \prod_{x \in X_{(0)}} (1 - (\#k(x))^{-s})^{-1}$ の右辺が絶対収束する範囲の $s \in \mathbb{C}$ に対し, 集合論的な等式 $X_{(0)} \setminus Y_{(0)} = U_{(0)}$ より,

$$\prod_{x \in X_{(0)}} (1 - (\#k(x))^{-s})^{-1} = \prod_{x \in U_{(0)}} (1 - (\#k(x))^{-s})^{-1} \cdot \prod_{x \in Y_{(0)}} (1 - (\#k(x))^{-s})^{-1}$$

を得る. したがって, 解析関数の剛性より $\zeta_X(s) = \zeta_U(s) \cdot \zeta_Y(s)$ が成り立つ. $\square$

注 7. 本稿では常に特異点解消の存在を仮定して議論したが, Gabber の l' -オルタレーション ([8, Theorem 1.3]) を用いることによって, (より技術的な困難を伴うが) 特異点解消の使用を回避することができる. ただし, レギュレータは

$$\text{Reg}_* : \text{CH}_0(-, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \rightarrow H^W$$

というように基礎体の標数 p を可逆化した群の上で定義される. ここで, 重みホモロジー群に $\mathbb{Z}[1/p]$ がテンソルされていないのは, 次のような理由による: 重みホモロジー群は重み複体 (定理 2.1) を用いて定義されていたが, 特異点解消を仮定しない状況では, 重み複体はホモトピー圏 $\mathcal{H}^b(\text{Chow}_k)$ ではなく, 射の集合のなす群に $\mathbb{Z}[1/p]$ をテンソルして得られる圏 $\mathcal{H}^b(\text{Chow}_k[1/p])$ において定義される. したがって, 重みホモロジー群は構成の段階で $\mathbb{Z}[1/p]$ 加群であり, $\mathbb{Z}[1/p]$ をテンソルする必要がないのである. もちろん, この場合, 定理 3.7 の等式は「 p 冪を除く」という仮定のもとで成立することになる.

注 7 で述べた, Gabber のオルタレーションを用いた重み複体の構成については, [7, Theorem 0.1, Section 5.6] 及び [13, Construction 3.6] を参照されたい. ここで一つの注意を喚起したい. [7, Theorem 0.1, Section 5.6] 及び [13, Construction 3.6] において, 重み複体は, ホモトピー圏 $\mathcal{H}(\text{Chow}_k)$ の対象として構成されていたが, それが $\mathcal{H}^b(\text{Chow}_k)$ に属するかどうか, すなわち, ホモトピー同値で有界な複体に取り換えられるかが分かっていた. 重み複体が有界な複体で表現されること (定理 2.1(1)) は, 主定理の証明においてスペクトル系列の E^1 項に現れる非自明な群が有限個であることを示すために用いている (そうでなければ交代積が実質有限積にならない). したがって, 定理 3.7 から特異点解消の仮定を外すために, 筆者は次の定理を示す必要があった. 詳細については [15] を参照されたい:

定理 4.6. ([15]) [7, Theorem 0.1, Section 5.6] 及び [13, Construction 3.6] で定義された重み複体は, ホモトピー同値で有界な複体に取り換えられる.

謝辞. 本稿は 2013 年 12 月 9 日から 12 月 13 日にかけて京都大学数理解析研究所で開催された研究集会「代数的整数論とその周辺 2013」における筆者の講演発表の内容に基づいています。発表の機会を与えてくださったプログラム委員の方々、原稿に関する様々なアドバイスをしてくださった編集委員の皆様、多くの有益なコメントをくださった査読者の方に深く感謝いたします。また、本研究は筆者の修士課程における研究に基づいています。研究上の困難に際し、常に支えてくださった齋藤秀司教授に心から感謝を申し上げます。

References

- [1] B. Conrad *Cohomological Descent*, <http://math.stanford.edu/~conrad/papers/hypercover.pdf>
- [2] V. Cossart and O. Piltant, *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. I. Reduction to local uniformization on Artin-Schreier and purely inseparable coverings*, J. Algebra **320** (2008), no. 3, 1051-1082.
- [3] V. Cossart and O. Piltant, *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. II*, J. Algebra **321** (2009), no. 7, 1836-1976.
- [4] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Springer, Lecture Notes in Math. **569**.
- [5] W. Fulton, *Intersection Theory, Second Edition*, Springer-Verlag New York-Berlin-Heidelberg (1998).
- [6] H. Gillet and C. Soulé, *Descent, motives and K-theory*, J. Reine Angew. Math. **478** (1996), 127-176.
- [7] H. Gillet and C. Soulé, *Motivic weight complexes for arithmetic varieties*, J. Algebra **322** (2009), no. 9, 3088-3141.
- [8] L. Illusie, *On Gabber's refined uniformization*, <http://www.math.u-psud.fr/~illusie/>.
- [9] U. Jannsen, *Weights in Arithmetic Geometry*, Japan. J. Math. **5** (2010), no. 1, 73-102.
- [10] U. Jannsen, *Hasse principles for higher-dimensional fields*, [arxiv:0910.2803](https://arxiv.org/abs/0910.2803).
- [11] K. Kato, *A Hasse principle for two dimensional global fields*, J. für die reine und angew. Math. **366** (1986), 142-183.
- [12] M. Kerz and S. Saito, *Cohomological Hasse principle and motivic cohomology for arithmetic schemes*, Publ. Math. IHES, **115** (2012), Issue 1, 123-183.
- [13] M. Kerz and S. Saito, *Cohomological Hasse principle and resolution of quotient singularities*, New York J. Math., **19** (2013) 597-645.
- [14] J. S. Milne, *Values of zeta functions of varieties over finite fields*, American Journal of Math. **108** (1986), 297-360.
- [15] H. Miyazaki *Special values of zeta functions of varieties over finite fields via higher Chow groups*, [arXiv:1406.1390](https://arxiv.org/abs/1406.1390).
- [16] C. Mazza, V. Voevodsky and C. Weibel, *Lecture Notes on Motivic Cohomology*, American Math. Society, Clay Math. Monographs Vol. 2.
- [17] S. Saito and K. Sato, 代数的サイクルとエタールコホモロジー, シュプリンガー現代数学シリーズ, 第 17 巻.
- [18] J. -P. Serre, *Zeta and L Functions*, in *Arithmetical Algebraic Geometry*, Proceedings of a Conference Held at Purdue University December 5-7, 1963.
- [19] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics **38**.