

経験分布を基にした決定関数 の一致性

藤 敦 研

野 田 一 雄

§0 はじめに—問題の設定

D 統計量を始めとした Kolmogorov-Smirnov 型の統計量とか Mises 汎関数あるいは U 統計量などは経験分布を基にした統計量である。このような経験分布を基にした決定関数としては、パラメータの推定に限らず、回帰に関する問題や標本空間の分割など、関数を推定の対象にする場合にも有効な足かりを与えうる。また、一般に Bayes 解やミニマックス解の形が複雑な場合、この性質を調べるのに、経験分布を基にした決定関数を媒介にすると考えやすくなることがある。このようなことから、経験分布を基にした決定関数を一般的にとりあつかうこと、さしあたりはその漸近的な性質を議論することは意味をもつと考えられる。

まず問題の定式化から述べる。

基底の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$, 標本空間 $(X, \mathcal{B}, P \in \mathcal{P})$

とする。標本は x, x', x'' であることと想定して、サイズ n の標本空間としては積空間 $(\mathcal{X}^n, \mathcal{B}^n, P^n \in \mathcal{P}^n)$ と考える。また $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ 上の確率測度の全体を $\mathcal{Q}$ とする。ある確率測度の族 $\mathcal{Q} : \mathcal{P} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}$ および行動の空間 $(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ の上で定義される損失 $L(P, a)$, $P \in \mathcal{Q}$, $a \in \mathcal{A}$ が一定の正規性の条件のもとで与えられるとする。そして危険は

$$r_n(P, a) = \int_{\mathcal{X}^n} \int_{\mathcal{A}} L(P, a) \phi(da | x^{(n)}) P^n(dx) \quad P \in \mathcal{Q}, \phi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n \quad (0.1)$$

なる線型構造をもつものとする。ただし $\Phi_{\mathcal{Q}}^n$ は決定関数 $\phi(A | x^{(n)})$, $A \in \mathcal{O}$, $x^{(n)} \in \mathcal{X}^n$ のある空間である。 $(\Phi_{\mathcal{Q}}^n)$ は族 $\mathcal{Q}$ に依存して定められるものとする。この理由は §3 で述べる。

与えられた損失 L の正規性から $\inf_{\phi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n} r_n(P, \phi)$ が実現する $\phi_P^* \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n$ が存在するものと仮定する。 $\inf_{\phi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n} r_n(P, \phi)$ とする範囲を $\Phi_{\mathcal{Q}}^n$ に限定した場合、同様に $\inf_{\phi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n} r_n(P, \phi)$ が実現する $\phi_P^* \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n$ が存在し、かつ $\inf_{\phi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n} r_n(P, \phi)$ も実現すると仮定する。そしてこれを、 P に対する最適決定関数と呼ぶことにしよう。

この場合、一般に $\phi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n$ の良さは $r_n(P, \phi) - r_n(P, \phi_P^*)$ を考えればよいことになる。

次ぎに一般化された経験分佈 $\tilde{P}_n$ を定義する。いま $\tilde{P}_n(B | x^{(n)})$ が、

- ① $B \in \mathcal{B}$ と固定されば, $x^{(m)} \in \mathcal{X}^m$ の $\mathcal{B}^m$ -可測関数であり, $x^{(m)} \in \mathcal{X}^m$ と固定されば, $B \in \mathcal{B}$ の確率測度であること,
- ② $\hat{P}_{(m)}(\cdot | x^{(m)}(\omega))$ が $P \in \mathcal{P}$ に a.s. ω (v) で弱収束すること, 以上の条件があるとき, これを一般化された経験分布と呼ぶことにしよう。このように $\hat{P}_{(m)}$ の全体を $\tilde{\mathcal{P}}_{(m)}$ によって表わし, $x^{(m)} \in \mathcal{X}^m$ と固定するとき, $\tilde{\mathcal{P}}_{(m)} \subset \mathcal{Q}$ であると仮定する。

便宜上, $\{P_k; k=1, 2, 3, \dots\} \subset \mathcal{P}$ が $P_0 \in \mathcal{P}$ に弱収束するとき, $P_k \Rightarrow P_0$ によって表示することに可る。

例 通常の意味における経験分布 $\hat{P}_{(m)}$ で表わすとすれば, これは $\mathcal{X}$ が可分距離空間で $\mathcal{B}$ がその Borel σ -代数であるときは, 上記 ①, ② の条件が満たされている。② については, 一般化された Glivenko-Cantelli 実理から従う。例えば [4] 参照。■

さて, $\tilde{\mathcal{P}}_{(m)} \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{Q}}^*$ なる写像を $\mathcal{P}_{(m)}(A | x^{(m)})$ と表現されるもの, 即ち $x^{(m)} \in \mathcal{X}^m$, $A \in \mathcal{A}$ と固定するとき $\tilde{\mathcal{P}}_{(m)} \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{Q}}^*$ なる写像となるものを, 一般化された経験分布 $\hat{P}_{(m)}$ を基にした決定関数と呼ぶことにしよう。(Bayes 解存どを問題にするときは, 族 $\tilde{\mathcal{P}}_{(m)}$ 上の一定の σ -代数を考え, これに関する $\mathcal{P}_{(m)}$ の可測性を考える必要が出てくる。)

前に定義された $\mathcal{P}_{(m)}^*$ は同じく一般化された経験分布を基

にした決定関数であり、我々は危険に関する一様性

$$r_n(P, \Phi_{P_{(n)}}^*) - r_n(P, \Phi_P^*) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (0.3)$$

の成立を調べることを問題にしよう。すなわち、 $\Phi_{P_{(n)}}^*$ を未知である Φ_P^* のいかなる推定量のごとく考え、その危険に関する一様性を求めようというわけである。

例 Mises の汎関数は上述の $\Phi_{P_{(n)}}^*$ の例でもある。すなわち、実数空間 (R^p, C^p) を標本空間とし、分布関数 $F(x)$ をもつような i.i.d. 確率変数 $X_1, X_2, \dots$ と α 与えられているとする。 $g(x_1, \dots, x_m)$ を変数に関して対称な C^m -可測実関数として、regular functional

$$\theta(F) = \int_{R^{pm}} g(x_1, \dots, x_m) F(dx_1) \dots F(dx_m) \quad (0.4)$$

を $\mathcal{F} = \{F; |\theta(F)| < \infty \text{ } \forall \alpha\}$ 上で定義する。標本 $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ にと、 $\theta(F)$ を推定する量 $T(X^{(n)})$ として、その損失を最小 = 乗法で考えれば

$$L(F, T) = (T - \theta(F))^2 \quad (0.5)$$

通常の意味での経験分布関数 $\hat{F}_{(n)}(x | X^{(n)})$ を表せば、Mises の汎関数は

$$\theta(\hat{F}_{(n)}) = \int_{R^{pm}} g(x_1, \dots, x_m) \hat{F}_{(n)}(dx_1 | X^{(n)}) \dots \hat{F}_{(n)}(dx_m | X^{(n)}) \quad (0.6)$$

にあつて与えられる。

明らかに、 $\theta(\hat{F}_{(n)})$ は (0.5) にあつて与えられる危険を最小にするものであつて、 $\Phi_{P_{(n)}}^*$ に一致する。■

§1. 距離 $d_{B'}(\bar{P}_m, P)$, $d_{\mathcal{F}}(\bar{P}_m, P)$ の収束

一般化された経験分布を弱収束するものとして定義したことから、この節は数学的な準備として、度除と関係する次のような距離を考えることにする。

今後 $\mathcal{X}$ はある距離 ρ による可分距離空間とし、 $\mathcal{B}$ はその Borel σ -代数としておく。

$\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ のある部分集合として、 $\mathcal{B}'$ 上の距離として

$$d_{B'}(P_1, P_2) = \sup_{B \in \mathcal{B}'} |P_1(B) - P_2(B)| \quad \text{for } P_1, P_2 \in \mathcal{M} \quad (1.1)$$

を定義する。ある Π は、 $B(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ に $\mathcal{X}$ 上の有界かつ $\mathcal{B}$ -可測な実関数の全体として、 $\mathcal{F} \subseteq \Pi$ のある部分集合とし、

$$d_{\mathcal{F}}(P_1, P_2) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \int_{\mathcal{X}} f dP_1 - \int_{\mathcal{X}} f dP_2 \right| \quad \text{for } P_1, P_2 \in \mathcal{M} \quad (1.2)$$

なる距離を定義する。

$\delta > 0$ とし、 $B \in \mathcal{B}$ に対し、 B を δ -境界

$$\partial_{\delta} B = \{x; \rho(x, B) < \delta, \rho(x, B^c) < \delta\}, \quad (1.3)$$

および δ -近傍

$$B^{\delta} = \{x; \rho(x, B) < \delta\} \quad (1.4)$$

を考える。一般には $(\partial B)^{\delta} \subset \partial_{\delta} B$ であるが、 $\mathcal{X}$ が局所連結であれば

$$\partial_{\delta} B = (\partial B)^{\delta} \quad (1.5)$$

が成立する。

子に關しては, $B \in \mathcal{B}$ の oscillation とし,

$$w_{\mathcal{F}}(B) = \sup \{ |f(x) - f(x')| ; f \in \mathcal{F}, x, x' \in B \} \quad (1.6)$$

を定義する。子 $S(x, \delta) \in \mathcal{X}$ を $x \in \mathcal{X}$ を中心とし, 半径 δ の開球としておく。

このとき, Billingsley-Topsøe [3] の結果を適用することによつて直ちに次の結果を得る。

Prop. 1.1.

一般化された経験分布 $\{ \tilde{P}_m ; m=1, 2, \dots \}$ に対し,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{B \in \mathcal{B}'} P(\partial \delta B) = 0 \quad (1.7)$$

であれば $d_{B'}(\tilde{P}_m, P) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) a.s. $w(\mathcal{U})$ が従う。

さらに $\mathcal{X}$ が局所連結であれば, 条件 (1.7) は

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{B \in \mathcal{B}'} P((\partial B)^\delta) = 0 \quad (1.7')$$

と置換之てよい。

Prop. 1.2.

一般化された経験分布 $\{ P_m ; m=1, 2, \dots \}$ に対し,

$$\textcircled{1} \quad w_{\mathcal{F}}(\mathcal{X}) < \infty \quad (1.8)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} P \{ x ; w_{\mathcal{F}} S(x, \delta) > \varepsilon \} = 0 \text{ for all } \varepsilon > 0 \quad (1.9)$$

であれば $d_{\mathcal{F}}(\tilde{P}_m, P) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) a.s. $w(\mathcal{U})$ が従う。

注意 Prop. 4.1 および 4.2 の結果は, $\tilde{P}_m$ が P への弱収束
が $P \in \mathcal{P}$ について一様であり, また (4.7) あるいは (4.9) の
収束が $P \in \mathcal{P}$ について一様であれば, 同じく距離 $d_{\phi}(\tilde{P}_m, P)$,
 $d_{\psi}(\tilde{P}_m, P)$ の収束も $P \in \mathcal{P}$ について一様であることが従う。■

例 $\mathcal{D}$ は $\|\cdot\|$ で弱収束の位相と同値な関係にある Dudley [2]
の距離 β は, この Prop. 4.2 の条件 ①, ② を満足している。

いま, $BL(X, \rho) \subset X$ 上の有界かつ Lipschitzian 実関数の
全体の空間とする。その $\|\cdot\|_{BL}$ は

$$\begin{aligned} \|f\|_{BL} &= \|f\|_{\infty} + \|f\|_L \\ &= \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \neq x'} |f(x) - f(x')| / \rho(x, x') \quad (4.10) \end{aligned}$$

として定義し, この $\mathcal{D}$ は, $\mathcal{D}$ の距離 β

$$\begin{aligned} \beta(P_1, P_2) &= \sup \left\{ \int_X f(dP_1 - dP_2) ; \|f\|_{BL} \leq 1, f \in BL(X, \rho) \right\} \\ &\text{for } P_1, P_2 \in \mathcal{D} \quad (4.11) \end{aligned}$$

と定義する。

このとき, Prop. 4.2 より, 一般化された経験分布 $\tilde{P}_m$ が P へ
収束し, $\beta(\tilde{P}_m, P) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) a.s. $\omega(\omega)$ 。■

なお, $\phi_{\tilde{P}_m}^*$ の収束の速さを問題にするときは, 次の結
果が役に立つ。

X は可分距離空間であるから, $\forall \epsilon, \forall \delta > 0$ に対し, $P(B)$
 $\leq \delta$ なるような $B \in \mathcal{B}'$ があって, $X \sim B$ は有限個の ϵ -被覆で
おかれるようにすることができる。 $B \in \mathcal{B}$ を適当に動かして,

ϵ - 箱数 a minimal number $\in N(\mathcal{X}, P, \epsilon, \delta)$ で表れる。このとき、

$$H(\mathcal{X}, P, \epsilon, \delta) = \log N(\mathcal{X}, P, \epsilon, \delta) \quad (1.12)$$

と定義すると、 H は一つの ϵ -entropy を表れる。この意味で a entropic 次元 $\in k(\mathcal{X}, P)$;

$$k(\mathcal{X}, P) = \limsup_{\epsilon \downarrow 0} H(\mathcal{X}, P, \epsilon, \epsilon) / \log(1/\epsilon) \quad (1.13)$$

として定義する。

このとき、次の結果を得る。

Th. 1.3.

ある $s > 0$, $C_p > 0$ があつて、

$$\sup_{B \in \mathcal{B}'} P((\|B\|)^s) \leq C_p \epsilon^s \quad (1.14)$$

が成立すると仮定する。 $\mathcal{X}$ は局所コンパクトとして、 $k_p = k(\mathcal{X}, P)$

と仮定するとき、 $\forall \delta > 0$ に $\cap$ して

$$\mathbb{E}_P d_{B'}(\hat{P}_{(m)}, P) \leq (C_p + 1) m^{-\frac{s}{2s + k_p + \delta}} \quad (1.15)$$

が従う。

注意

$\mathbb{E}_P d_{B'}(\hat{P}_{(m)}, P)$ に $\cap$ しても同様の関係が成立する。 ■

§2. 一般化された経験分布 $\hat{P}_{(m)}$ に基づいた決定関数 $\phi_{\hat{P}_{(m)}}^*$ の一貫性。

Lem. 2.1.

各 $x_0^{(m)} \in \mathcal{X}^n$ に対し,

$$\begin{aligned} M(x_0^{(m)}) = & \int_{\mathcal{X}^n} \int_A [L(\tilde{P}_{m1}, a) - L(P, a)] \Phi_P^*(da | x^{(m)}) P^n(dx) \\ & + \int_{\mathcal{X}^n} \int_A L(\tilde{P}_{m1}, a) \Phi_P^*(da | x^{(m)}) [\tilde{P}_{m1}^n(dx | x_0^{(m)}) - P^n(dx)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} N(x_0^{(m)}) = & \int_{\mathcal{X}^n} \int_A [L(\tilde{P}_{m1}, a) - L(P, a)] \Phi_{\tilde{P}_{m1}}^*(da | x^{(m)}) P^n(dx) \\ & + \int_{\mathcal{X}^n} \int_A L(\tilde{P}_{m1}, a) \Phi_{\tilde{P}_{m1}}^*(da | x^{(m)}) [\tilde{P}_{m1}^n(dx | x_0^{(m)}) - P^n(dx)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

とおくとき,

$$\gamma_m(P, \Phi_{\tilde{P}_{m1}}) \leq |N(x_0^{(m)})| + \max(|M(x_0^{(m)})|, |N(x_0^{(m)})|) \quad (2.3)$$

が成立する。■

さて, $\mathcal{X}^n$ 上の距離 $\rho^{(m)}$ とし, $x_i^{(m)} = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$ ($i=1,2$)

$$\rho^{(m)}(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}) = \sum_{i=1}^n \rho(x_{1,i}, x_{2,i}) \quad (2.4)$$

を考えてよい。 $\mathcal{B}^m$ は $\rho^{(m)}$ に付随する位相の Borel σ -代数と一致する。この意味で §0 で定義されたように $B(\mathcal{X}^n, \mathcal{B}^n)$ の部分族 $\mathcal{F}^m$ を考える。

このとき, 上記 Lem. 2.1 と §1 の Prop. 1.2 によつて決まる条件 $\mathcal{F}^m$ を得る。

Th. 2.2.

最適決定関数 Φ_P^* および $\Phi_{\tilde{P}_{m1}}^*$ により決まる条件 ①,

②が成立のもので仮定する。

$$\textcircled{1} \quad \gamma_{P, \tilde{P}_m}(x^{(m)}) = \int_A L(\tilde{P}_m, a) \Phi_P^*(da | x^{(m)}) \quad (2.5)$$

$$\gamma_{\tilde{P}_m}(x^{(m)}) = \int_A L(\tilde{P}_m, a) \Phi_{\tilde{P}_m}(da | x^{(m)}) \quad (2.6)$$

とおくとき、十分大なる m に対しては $\gamma_{P, \tilde{P}_m}, \gamma_{\tilde{P}_m} \in \mathcal{F}^n$ 。 $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}^n$ は Prop. 1.2 の仮定を満足するものとする。

$$\textcircled{2} \quad 1^\circ \int_A [L(\tilde{P}_m, a) - L(P, a)] \Phi_P^*(da | x^{(m)}(\omega)) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \\ \text{a.s. } \omega(\nu) \quad (2.7)$$

$$2^\circ \int_A [L(\tilde{P}_m, a) - L(P, a)] \Phi_{\tilde{P}_m}^*(da | x^{(m)}(\omega)) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \\ \text{a.s. } \omega(\nu) \quad (2.8)$$

この条件より、

$$\gamma_n(P, \Phi_{\tilde{P}_m}^*) - \gamma_n(P, \Phi_P^*) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \quad (2.9)$$

が従う。■

特に、写像 $\alpha: \mathcal{Q} \rightarrow A$ が考えられる場合 (例えば、各 $P \in \mathcal{Q}$ に対し、 $\lim_{a \in A} L(P, a)$ を実現する $a \in A$ が存在するとき、この対応を $\alpha(P)$ と考えてよい。), Th. 2.2 の関係は次ぎのように整理される。

Th. 2.3

$\{P_m; m=0, 1, 2, \dots\} \subset \mathcal{Q}$ の $P_m \Rightarrow P_0$ ($m \rightarrow \infty$) 存在とき、常に次ぎのことから従うと仮定する。

$\mathcal{Q}$ から $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}$ がある写像 $\alpha(P)$ が存在して,

① $L(P_m, \alpha(P_m))$ が m に $\cap$ して有界,

② $1^\circ [L(P_m, \alpha(P_0)) - L(P_0, \alpha(P_0))] \rightarrow 0 \ (m \rightarrow \infty) \quad (2.10)$

$2^\circ [L(P_m, \alpha(P_m)) - L(P_0, \alpha(P_m))] \rightarrow 0 \ (m \rightarrow \infty) \quad (2.11)$

が成立するとする。

このとき一般化された経験分布を基にする決定関数 $\Phi_{P_m}^*$ に $\cap$ して,

$$T_n(P, \Phi_{P_m}^*) - r_n(P, \Phi_P^*) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \quad (2.12)$$

が従う。■

注意 1 $\tilde{P}_m \Rightarrow P$ a.s. $\omega(\nu)$ が $P \in \mathcal{P}$ に関し一様であり, 条件②の収束が $P \in \mathcal{P}$ に $\cap$ して一様であること, および Prop. 1.2 の条件②が $P \in \mathcal{P}$ に $\cap$ して一様であれば, Th. 2.2 あるいは Th. 2.3 の結果は, すべて $P \in \mathcal{P}$ に $\cap$ して一様であることが従う。■

注意 2 Th. 2.3 に $\cap$ して。通常 $L(P_m, \alpha(P_m)) = 0 \ (m=0, 1, 2, \dots)$ であり, $L(P_m, \alpha(P_0)) \rightarrow 0, L(P_0, \alpha(P_m)) \rightarrow 0 \ (m \rightarrow \infty)$ と考えればよい。

特にパラメータ $\theta(P)$ の推定の場合は, 上のそれぞれは $L(\theta(P_m), \theta(P_0)), L(\theta(P_0), \theta(P_m))$ となり, 損失 L の $P \in \mathcal{Q}$ に関する連続性に帰着する。 $\tilde{P}_m \in \tilde{\mathcal{P}}_m$ を直接基にして考えるならば, $L(\theta(P), \theta(\tilde{P}_m))$ の収束が問われることになるが,

$\hat{P}_m$ として通常の意味での経験分布 $\hat{P}_m$ をとると、これは結局 Misses 汎関数の一様性問題に帰着することになる。■

§3 経験分布を基にした決定関数 $\phi_{\hat{P}_m}$ の構成

この節の標題に掲げた問題の中心は $\hat{P}_m$ の構成を考えることである。ところで通常の意味における経験分布を基にした決定関数 $\phi_{\hat{P}_m}^*$ を直接用いることが出来る場合がある。すなわち、 $\phi_{\hat{P}_m}^* \in \Phi_P^*$ であって、この決定関数として Φ_P^* のそれしか用いることが出来ない場合である。例えば、制約条件

$$r_m'(P, \phi) \leq \beta, \quad P \in \mathcal{P} \quad (3.1)$$

が与えられ、対象となる決定関数 ϕ が $\mathcal{P}$ によって制限されるといふ問題がある。

このような意味において、 $P \in \mathcal{P}$ であれば $\phi_P^* \in \Phi_P^*$ があることを仮定し、 $\phi_{\hat{P}_m}^*$ を基にする経験分布 $\hat{P}_m$ が $\omega \in \Omega$ に固定するとき、 $\hat{P}_m \in \mathcal{P}$ であるように $\hat{P}_m$ を構成することと考える。

Th. 3.1.

次の条件を仮定する。

- ① $\mathcal{P}$ は弱収束の位相 $\sigma(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ に導かれるとき、 σ -compact である。
- ② 次の性質をもつ一般化された経験分布 $\hat{P}_m$ が与えられ

で11るとする。

1° $B \in \mathcal{B}$ を固定した場合, $\tilde{P}_m(B|x^{(m)})$ は $\mathcal{X}^m$ の有限個の点を除き, $x^{(m)} \in \mathcal{X}^m$ の連続関数である。

2° ①によって, $\inf_{P \in \mathcal{P}} d_{\mathcal{B}'}(\tilde{Y}_m, P)$ を実現する $P \in \mathcal{P}$ が, $x^{(m)} \in \mathcal{X}^m$ を固定するとき, 存在するが, ある例外集合 $W \in \mathcal{U}$; $\nu(W) = 0$ があって, $\omega \notin W$ であれば, $x^{(m)}(\omega)$ を固定するとき, 上述の $P \in \mathcal{P}$ が一意に定まる。(B' の Prop. 1.1 の仮定を参照と証明)

以上の条件の下で, 一般化された経験分布 $\tilde{P}_m \in \mathcal{X}^m$ の $\mathcal{X}^m$ を固定するとき, $\tilde{P}_m(\cdot|x^{(m)}) \in \mathcal{P}$ 存在するように, しかも $\omega \notin W$ であれば $\inf_{P \in \mathcal{P}} d_{\mathcal{B}'}(\tilde{Y}_m, P)$ を実現するように構成することができる。■

注意1. 距離 $d_{\mathcal{B}'}$ に11ても同様の議論ができる。■

注意2 特に, $\mathcal{P}$ が μ に支配され (μ は $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ 上の σ -有限測度) $P \in \mathcal{P}$ の μ に関する密度 $dP/d\mu$ が μ に11て自乗可積分であるような μ が存在するとき, $d_{\mathcal{B}'}$ あるいは $d_{\mathcal{B}}$ あるいは μ に関する L_2 -ノルムが可能な空間 $\mathcal{Q}' \supset \mathcal{P}$ を考えた方が, より具体的に議論ができる。すなわち, $\mathcal{P}$ が $\mathcal{Q}'$ に11て完備かつ凸であることを仮定すれば, $\tilde{Y}_m$ から $\mathcal{Q}'$ の射影を $\tilde{P}_m$ とすればよいことになる。その場合 $\tilde{P}_m$ としては, 例えば Parzen [1] などの密度 $dP/d\mu$ の推定関数を用いればよい。この辺の具体的な最良は紙数の関係で省略することにする。■

§4. Bayes 解, ミニマックス解の一致性の応用

§2, §3 の結果として Bayes 解, ミニマックス解の一致性を示すのに, $\Phi_{P_m}^*$ に応用することが出来る。その場合, §2 の注意 1 に示されているように, 収束の $P \in \mathcal{P}$ に関する一様性を前提にしておく。また Bayes 解の存在というときは, Φ_P^* , $\Phi_{P_m}^*$ の $P \in \mathcal{P}$ に関する可測性が本問題に与えなければならない。これらの議論は紙数の都合上省略する。

§5. 特殊な場合への応用 — 最適領域の推定の問題.

$X \in \mathcal{X}$ による実値, 可分距離空間としておく。この領域 Φ とは, $0 \leq \phi(x) \leq 1$ なるような $\mathcal{B}$ -可測関数である。この Φ の全体を Φ とする。 $(X, \mathcal{B})$ 上の 0-有界測度 μ について,

$$\int_X f(x) \phi(x) d\mu \leq c \quad (c = c) \quad (5.1)$$

を制約条件として,

$$\int_X g(x) \phi(x) d\mu, \quad P \in \mathcal{P} \quad (5.2)$$

を最大にする $\Phi_P^* \in \Phi$ を推定する α の問題となる。ただし g は μ -可積分な与えられた実関数。

情報の空間として $(X^n, \mathcal{B}^n, P^n)$ を考え, Φ_P^* の推定として $\Phi(x, x^n)$ を考える。損失, 危険は

$$L(P, \Phi) = \int_X g(x) (\Phi_P^*(x) - \Phi(x, x^n)) P(dx) \quad (5.3)$$

$$r_n(P, \Phi) = \int_{X^n} \int_X g(x) (\Phi_P^*(x) - \Phi(x, x^n)) P(dx) P^n(dx) \quad (5.4)$$

とある。④ < < < である場合は、 ϕ^* , $\phi_{\tilde{P}_{m_1}}^*$ の explicit form を求めることができる。[5]。この結果に Prop. 1.1. を適用すると、 $\phi_{\tilde{P}_{m_1}}^*$ の一様性の十分条件として、 λ の関係を導く。

各 $x_0^{(m)} \in \mathcal{X}^m$ を固定するとき、

$$\begin{aligned} (\partial \phi_{\tilde{P}_{m_1}}^*(x, x_0^{(m)}))^\delta &= \psi(x, x_0^{(m)}) ; g(x) \frac{d\tilde{P}_{m_1}}{d\mu}(x, x_0^{(m)}) - \lambda_{m_1}(x, x_0^{(m)}) f(x) \\ &= 0 \quad \text{for } \delta \end{aligned} \quad (5.5)$$

として、 $(\partial \phi_{\tilde{P}_{m_1}}^* \in \mathcal{L}^2 \text{ もあるとして } \lambda_{m_1} \text{ が存在する [5])$

$$\sup_n P((\partial \phi_{\tilde{P}_{m_1}}^*)^\delta) \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0) \quad (5.6)$$

or a.e. $\omega(\nu)$ に $\cap$ して成立することである。

収束の一様性, Bayes 解, $\equiv$ マークス解に $\cap$ しては略。

文 献

- [1] Parzen, E.: "On estimation of a prob. density func. & mode," A.M.S., 33 (1962)
- [2] Dudley, R.H.: "Convergence of Baire measures," Studia Math., 27 (1966)
- [3] Billingsley & Topsøe: "Uniformity in weak convergence," Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, verw. Geb. 7, 1~16 (1967).
- [4] Parthasarathy, K.R., "Prob. measures on metric spaces," Academic Press (1967)
- [5] Noda & Taga, "Minimax estimation method for the optimum decomposition of a sample space based on prior information," A.I.S.M., Vol. 23, 1971.