

# Polynomial hulls of graphs on the torus

奈良教育大学 神保敏弥

(Toshiya Jimbo)

## 1. 問題と関連する結果

$K$  を  $\mathbb{C}^n$  のコンパクト部分集合とし、 $C(K)$  を  $K$  上の複素数値連続関数の Banach 環とする。 $f \in C(K)$  のノルムは sup-norm  $\| \cdot \|$  とする。関数  $f_1, \dots, f_m \in C(K)$  の多項式によって生成される関数環を  $[f_1, \dots, f_m; K]$  とおく。 $\mathbb{C}^n$  の座標  $z_1, \dots, z_n$  によって生成される  $K$  上の関数環を  $P(K)$  で表す。 $K$  の多項式凸包 polynomial hull  $\hat{K}$  は、

$$\hat{K} = \{z \in \mathbb{C}^n : |p(z)| < \|p\|, \text{ for every polynomial } p\}.$$

によって定義される。 $\hat{K} = K$  を満たすとき、 $K$  は多項式凸集合 polynomially convex set といわれる。関数  $f$  のグラフを  $\Sigma$ ,  $\Sigma_f$  または  $\Sigma(f, K)$  で表す、すなわち

$$\Sigma = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^{n+1} : z \in K\}.$$

$\pi$  は  $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$  への、 $\pi(z, z_{n+1}) = z$ ,  $z \in \mathbb{C}^n$  によって定義される射影とする。 $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ ,  $T = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$  とし、 $T^2 = T \times T$  とする。 $B = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 < 1\}$  とし、その境界である超球面を  $\partial B$  で表す。

グラフの多項式凸包については、次のような問題が最近研究されてきている。どんな  $K, f$  に対して、

(1) グラフ  $\Sigma_f$  は多項式凸集合となるか？ そのとき、近似問題  $P(\Sigma_f) = C(\Sigma_f)$  すなわち  $[z_1, \dots, z_n, f; K] = C(K)$  は成立するか？

(2)  $\hat{\Sigma} \neq \Sigma$  のとき、 $\hat{\Sigma} \setminus \Sigma$  の (解析) 構造はどうなっているか？  $\hat{\Sigma} \setminus \Sigma$  のハウスドルフ次元の最大となる例は何か？ などである。

$K$  が円周  $T$  の場合には、Wermer の maximality theorem によって、 $f \in C(T)$  のグラフについては、 $\pi(\hat{\Sigma}) = \bar{D}$  または  $\pi(\hat{\Sigma}) = T$  のいずれかが起こる。

$K$  が超球面  $\partial B$  の場合には、H. Alexander ([A1]) は、 $f \in C(T)$  のグラフについては常に  $\pi(\hat{\Sigma}) = \bar{B}$  が成立することを示した。さらに  $f$  が超球  $\bar{B}$  上で多重調和な関数  $g$  の  $\partial B$  上への制限関数ならば、 $\hat{\Sigma}_f = \Sigma(g, \bar{B})$  となることを示した。ハウスドルフ次元については、 $K$  が  $\mathbb{C}^2$  の超球  $\bar{B}$  の場合で、 $f(z_1, z_2) = z_1 \bar{z}_2$  の時、 $\hat{\Sigma} \setminus \Sigma$  は 6 次元になることが示されている ([AR])。

ここでは、 $K$  を  $\mathbb{C}^2$  内のトーラス  $T^2 = T \times T$  とし、関数  $f$  は主に同次多項式の複素共役関数の場合の結果を報告する。

定理. 自然数  $n$  と複素数  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $\lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$  に対して、 $J = \{j \in \{1, \dots, n\} : |\lambda_j| = 1\}$  とし、 $f(z_1, z_2) = (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_1 z_2) \cdots (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_n z_2)$  とおく。

- (1)  $J = \emptyset$  ならば、 $\hat{\Sigma} = \Sigma$ . さらに  $[z_1, z_2, f; T^2] = C(T^2)$ ,
- (2)  $J \neq \emptyset$  ならば、 $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{j \in J} \{(z_1, z_2, 0) : z_1 - \lambda_j z_2 = 0, z_2 \in D\}$ .

## 2. 補題と例

$M$  は  $\mathbb{C}^n$  のある開集合  $U$  の  $C^\infty$  級の実多様体とする。点  $x \in M$  での  $M$  の接空間を  $T_x M$  で表す。 $M$  が全実 totally real であるとは、各  $x \in M$  に対して  $T_x M$  が自明でない複素部分空間を含まないときをいう。すなわち、 $T_x M \cap iT_x M = \{0\}$ .

補題 1.  $\rho_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  を  $U$  での  $C^\infty$  級実数値関数とする。 $N = \{z \in U : \rho_j(z) = 0, j = 1, \dots, n\}$  とおく。 $N$  上で複素 Jacobian が  $\det(\frac{\partial \rho_j}{\partial z_k}) \neq 0$  を満たすとする。このとき、

- (1)  $N$  は  $U$  の totally real submanifold である。
- (2)  $f$  が  $U$  で  $C^\infty$  級関数ならば、グラフ  $\Sigma(f, N)$  はまた  $U \times \mathbb{C}$  内の totally real submanifold である。

補題 2. ([NW], cf. [AW2])

$M$  は  $U$  内の  $C^\infty$  級の totally real submanifold であるとする。このとき、

- (1) 点  $z^0 \in M$  に対して、 $\bar{B}_0 \cap M$  が多項式凸集合となる様な  $z^0$  を中心とする小さな超球  $B_0$  が存在する。
- (2)  $K$  が  $M$  内のコンパクト部分集合ならば、 $P(K) = C(K)$ .

この補題は、 $M$  が、totally real set の場合に拡張されている ([S1])。

$L$  は  $\mathbb{C}^2$  のある開集合内のコンパクト多項式凸集合とする。 $g$  と  $h$  は  $U$  で正則な関数とし、 $N = \{z \in U : \bar{g}(z) = h(z)\}$  とおく。

補題 3. コンパクト集合  $K$  が  $L \cap N$  に含まれるならば、 $\hat{K} \subset L \cap N$ .

さて、totally real の判定条件のために、

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial g(z)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial h(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial h(z)}{\partial z_2} \end{vmatrix}.$$

とおく。

補題 4. 点  $z_0 \in N$  が条件  $\Delta(z^0) \neq 0$  を満たすならば、 $B_0 \cap N$  が totally real submanifold である様な  $z^0$  を中心とする開球  $B_0$  が存在する。

証明.  $z_j = x_j + iy_j$  ( $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2$ ) とし、 $g = u + iv$ ,  $h = U + iV$  ( $u, v, U, V$  は実数値関数) とする。さらに  $\rho_1 = U - u_1$ ,  $\rho_2 = V + v$

とおくと、 $N = \{z \in U : \rho_j(z) = 0, j = 1, 2\}$  となる。Cauchy-Riemann の関係式によって、

$$\frac{\partial v}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} - i \frac{\partial v}{\partial y_j} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y_j} + i \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \frac{-i}{2} \frac{\partial u}{\partial z_j}.$$

を得る。簡単な計算によって、

$$\begin{aligned} \det \left( \frac{\partial \rho_j}{\partial z_k} \right) &= -i \{ (U_{z_1} - u_{z_1})(U_{z_2} + u_{z_2}) - (U_{z_2} - u_{z_2})(u_{z_1} + u_{z_1}) \} \\ &= -2i(U_{z_1}u_{z_2} - u_{z_1}U_{z_2}) = \frac{i}{2}(h_{z_2}g_{z_1} - h_{z_1}g_{z_2}). \end{aligned}$$

補題 1 によって、結論を得る。

$A$  は単位元を持つ可換 Banach algebra とし、 $\mathcal{M}(A)$  を  $A$  の極大イデアル空間とする。 $f \in A$  の Gelfand 変換を  $\hat{f}$  で表し、 $\hat{A} = \{\hat{f} : f \in A\}$  とおくと、 $\hat{A}$  の Shilov 境界を  $S(A)$  で表す。 $f_1, \dots, f_m \in A$  の合同スペクトルを

$$\sigma(f_1, \dots, f_m) = \{(\hat{f}_1(\varphi), \dots, \hat{f}_m(\varphi)) \in \mathbb{C}^m : \varphi \in \mathcal{M}(A)\}.$$

とおく。

補題 5 (cf. [AW2]).  $f_1, \dots, f_m$  は  $A$  の生成元とするならば、 $\sigma(f_1, \dots, f_m)$  は  $\mathbb{C}^m$  内の多項式凸集合である。さらに、 $\Phi(\hat{f}_1(\varphi), \dots, \hat{f}_m(\varphi))$  によって定義される写像  $\Phi : \mathcal{M}(A) \rightarrow \mathbb{C}^m$  は、 $\sigma(f_1, \dots, f_m)$  の上への位相同型である。

このことから、 $A = P(K)$  のとき、 $\mathcal{M}(P(K))$  と  $\hat{K}$  とは自然に同一視され、 $\hat{A} = P(\hat{K})$  と考えて良いことになる。そこで、Shilov の Idempotent theorem を  $P(K)$  に当てはめれば、次を得る。

補題 6.  $K$  が  $\mathbb{C}^n$  の連結部分集合ならば、その多項式凸包  $\hat{K}$  は、また連結集合である。

補題 7. (Rossi の local maximum modulus principle)

$\psi \in \mathcal{M}(A) \setminus S(A)$  に対して、 $\psi \in \mathcal{M}(A) \setminus S(A)$  内の  $\psi$  の開近傍を  $U$  とする。このとき、 $f \in A$  に対して、次を得る。

$$|\hat{f}(\psi)| \leq \max_{\varphi \in \partial U} |\hat{f}(\varphi)|.$$

補題 8.  $L$  は  $\mathbb{C}^2$  の開集合  $U$  内のコンパクト多項式凸連結部分集合とする。 $f$  と  $g$  は  $U$  で正則な関数とし、 $N = \{z \in U : f(z) = g(z)\}$  とおく。 $K$  は  $N \cap L$  に含まれるコンパクト部分集合とする。このとき、点  $z^0 \in N \cap L \setminus K$  が  $\Delta(z^0) \neq 0$  を満たすならば、 $z^0 \notin \hat{K}$ 。

証明.  $z^0 \in \hat{K} \setminus K$  とする。補題 2 と 4 から 次の様な  $z^0$  を中心とする小さな超球  $B_0$  が存在する:

$$\bar{B}_0 \cap K = \phi, \quad P(\bar{B}_0 \cap N) = C(\bar{B}_0 \cap N).$$

$V = N \cap \hat{K} \cap B_0$  とおき  $bV$  は  $\hat{K}$  内の  $V$  の境界とする。

もし  $bV = \phi$  ならば  $\hat{K}$  内で  $\bar{V} = V$  である。それ故、 $\bar{V} \cap \hat{K} \setminus V = \phi$ .  $\hat{K}$  は連結であるので このことは起こらない。

$bV \neq \phi$  ならば、次の様な関数  $f \in C(\bar{V})$  が存在する:

$$|f(z^0)| > 1, \quad \|f\|_{bV} < 1.$$

$P(\bar{V}) = C(\bar{V})$  であるので、 $f$  を近似する多項式  $p$  で、 $|p(z^0)| > 1$ ,  $\|p\|_{bV} < 1$  を満たすものが存在する。他方、Rossi の局所最大値の原理から  $|p(z^0)| \leq \|p\|_{bV}$  を得る。これは矛盾である。故に  $z^0 \notin \hat{K}$  となる。

次の補題は論文 [AR], [AW2] と全く同じ方法で示される。

補題 9.  $f \in C(T^2)$  とし、 $(z_1^0, z_2^0) \in T^2$  かつ  $(z_1^0, z_2^0, z_3^0) \in \hat{\Sigma}$  ならば  $z_3^0 = f(z_1^0, z_2^0)$  となる。

例 1. 自然数  $n$  に対して  $f(z_1, z_2) = \bar{z}_1^n$  とするならば、次を得る。

$$\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi)} \{(e^{i\theta}, z_2, e^{-ni\theta}) : z_2 \in D\},$$

それ故、 $\pi(\hat{\Sigma}) = T \times \bar{D}$ .

例 2. 自然数  $m, n$  に対して  $f(z_1, z_2) = \bar{z}_1^m \bar{z}_2^n$  とする。このとき、次を得る。

$$\hat{\Sigma} = \Sigma, \quad [z_1, z_2, f; T^2] = C(T^2).$$

例 3.  $f(z_1, z_2) = z_1 \bar{z}_2$  のグラフ  $\Sigma$  の多項式凸包は

$$\hat{\Sigma} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 = z_2 z_3, |z_2| \leq 1, |z_3| \leq 1\}$$

となる。この場合、 $\hat{\Sigma} \setminus \Sigma$  のハウスドルフ次元は 4 次元である。

### 3. 定理の証明

$a = \prod_{j=1}^n (1 + |\lambda_j|)$  とおく。 $\|f\|_{T^2} \leq a$  であるので  $\hat{\Sigma} \subset \bar{D}^2 \times a\bar{D}$ . トーラス  $T^2$  上で  $z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = 1$  であるので

$$N = \{(z_1, z_2, z_3) \in \bar{D}^2 \times a\bar{D} : z_3 - \prod_{j=1}^n (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_j \bar{z}_2) = 0, \\ z_1^n z_2^n z_3 - \prod_{j=1}^n (z_2 - \bar{\lambda}_j z_1) = 0\}.$$

とおけば、補題によって、 $\hat{\Sigma} \subset N$  を得る。 $E = \bar{D} \times \{0\} \cup \{0\} \times \bar{D}$  とおき、 $z_3$  を消去した式から、

$$M = \{(z_1, z_2) \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : \prod_{j=1}^n (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_j \bar{z}_2) = \frac{1}{z_1^n z_2^n} \prod_{j=1}^n (z_2 - \bar{\lambda}_j z_1)\}$$

とおく。 $M$  の totally real 性を判定するために、 $M$  を定義する式の左辺を  $\bar{g}(z_1, z_2) = f(z_1, z_2)$  右辺を  $h(z_1, z_2) = \frac{k(z_1, z_2)}{z_1^n z_2^n}$  ( $k(z_1, z_2)$  は多項式) とおくと、 $\Delta(z_1, z_2) = g_{z_1} h_{z_2} - g_{z_2} h_{z_1}$

$$= \frac{1}{z_1^{n+1} z_2^{n+1}} \{g_{z_1} (k_{z_2} z_1 z_2 - n z_1 k) - g_{z_2} (k_{z_1} z_1 z_2 - n z_2 k)\}.$$

この分子は次数  $n+1$  の同次多項式で、 $z_1^{n+1}$  と  $z_2^{n+1}$  の係数はそれぞれ  $-n^2 \bar{a}_n$  と  $n^2 a_n$  となる。それ故、totally real 性を判定出来ない集合を  $G = \{z \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : \Delta(z) = 0\}$  とおくと、次の式を満たす 0 でない複素数  $\mu_j$ ,  $j = 1, \dots, 2n$  が存在する:

$$G = \bigcup_{j=1}^{2n} \{z \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : \frac{z_2}{z_1} = \mu_j\}.$$

そこで

$$G_j = \{z \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : z_2 - \mu_j z_1 = 0\},$$

$$D_j^* = \{(z_1, z_2, 0) : z_1 - \lambda_j z_2 = 0, z_2 \in D\}$$

とおき、 $D_j = \pi(D_j^*)$  とおく。

さて、(2) の場合  $J \neq \phi$  なので  $j \in J$  とせよ。すると  $\{(z_1, z_2, 0) : z_1 - \lambda_j z_2 = 0, z_2 \in T\} \subset \Sigma$  であるので、 $D_j^* \subset \hat{\Sigma}$  を得る。今  $|\lambda_1| = 1$  と仮定すると、 $g = \bar{f} = (z_1 - \lambda_1 z_2) F(z_1, z_2)$ ,  $h = (z_1 - \lambda_1 z_2) H(z_1, z_2)$  ( $F, H$  は正則関数) とかけるので、 $(z_1, z_2) \in D_1$  ならば、 $\Delta(z_1, z_2) = 0$  を得る。

まず、 $J = \{1, \dots, n\}$  と仮定すると、点  $(z_1, z_2) \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E \cup \bigcup_{j=1}^n \pi(D_j))$  に対して、

$$|h(z_1, z_2)| = \left| \frac{(-\bar{\lambda}_1) \cdots (-\bar{\lambda}_n)}{z_1^n z_2^n} \prod_{j=1}^n (z_1 - \lambda_j z_2) \right| < |\bar{f}(z_1, z_2)|$$

となるので、 $(z_1, z_2) \notin M$ . ゆえに  $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{j \in J} D_j$ .

次に  $J \neq \phi$  かつ  $J \neq \{1, \dots, n\}$  とする。このとき  $J = \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $1 \leq k < n$  と仮定して良い。すると上での観察から  $\mu_j = \bar{\lambda}_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  となる。集合  $(M \setminus \bigcup_{j \in J} D_j) \cap G_j$  を考えるために、 $M$  の式に、 $z_2 = \mu_j z_1$  を代入して、次を得る。

$$|z_1|^{2n} = \frac{|\mu_j - \bar{\lambda}_{k+1}|}{|1 - \lambda_{k+1} \mu_j|} \cdots \frac{|\mu_j - \bar{\lambda}_n|}{|1 - \lambda_n \mu_j|} \frac{1}{|\mu_j|^n}.$$

このとき、 $|z_1|$  に解があれば、 $|z_1| = \rho_j$  とおく。 $M_j = (M \setminus \bigcup_{k \in J} D_k) \cap G_j$  とおく。

もし  $0 < \rho_j < 1$ , または  $\rho_j = 1$ ,  $|\mu_j| < 1$  のときは、

$$M_j \subset \bigcup_{j \notin J} \{(z_1, z_2) \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : z_1 - \lambda_j z_2 = 0, |z_2| = \rho_j\}$$

を得る (ただし、 $M_j$  は空集合でもよい)。それ故、 $\bigcup_j M_j \cap (\bigcup_j D_j \cup T^2) = \phi$  を得る。従って、次の条件を満たす  $\bigcup D_j \cup T^2$  の開近傍  $V$  が存在する： $V \cap (\bigcup D_j \cup T^2)$  が totally real submanifold である。補題によって、グラフ  $\Sigma(f, V \cap (\bigcup D_j \cup T^2))$  は totally real である。それ故、 $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{j \in J} D_j$ 。これ以外の  $\rho_j$  の場合には、 $M_j = \phi$  であるので問題ない。

(1)  $J = \phi$  の時、 $I = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : |\mu_i| = 1\}$  と置く。

(a) もし  $I = \phi$  ならば  $V \cap G = \phi$  である様な  $V$  の開近傍が存在する。それ故、 $\Sigma(f, V \cap M \setminus T^2)$  は totally real であるので、 $\hat{\Sigma} = \Sigma$  を得る。

(b) もし  $I \neq \phi$  かつ  $i \in I$  ならば、 $z_2 = \mu_i z_1$  を  $M$  の式に代入して  $|z_1|^{2n} = |\prod_j \frac{\mu_i - \lambda_j}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_i}| = 1$  を得る。故に、 $|z_1| = 1$ 。故に  $M$  は totally real であるのでグラフ  $\Sigma(f, M)$  もまた totally real である。故に、 $\hat{\Sigma} = \Sigma$ 。

最後に、この問題を考えていくうえで、阪井先生とのコミュニケーションと適切なアドバイスをいただいたことは大変有益で、支えとなりました。ここに感謝いたします。

## References

- [AR] P. Ahern and W. Rudin, 'Hulls of 3-spheres in  $\mathbb{C}^3$ ', Contemporary Math. 137 (1992) 1-27.
- [A1] H. Alexander, 'Polynomial hulls of graphs', Pacific J. Math. 147 (1991) 201-212.
- [AW1] H. Alexander and J. Wermer, 'Polynomial hulls with convex fibers', Math. Ann. 271 (1985), 99-109.
- [AW2] H. Alexander and J. Wermer, 'Several Complex Variables and Banach Algebras', Springer-Verlag, (1998).
- [JS] T. Jimbo and A. Sakai, 'Polynomially convex hulls of graphs on the sphere', Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 2795-2766.
- [NW] R. Nirenberg and R. O. Wells, Jr, 'Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold', Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969) 15-35.
- [S1] A. Sakai, 'On totally real sets', Geometric Complex Analysis edited by J. Noguchi et. al. World Scientific Publ. Co. (1996) 525-533.