

Riemann 面の正則族への Teichmüller 空間の応用

東北大・理 今吉洋一

ここでは、Imayoshi [6] の続きを取り扱うことにする。

$\bar{S}$ を 2 次元複素多様体, C を $\bar{S}$ の非特異な 1 次元解析的部分集合又は空集合とする。複素 z -平面において、 $D = \{z \mid |z| < 1\}$, $D^* = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$ とおく。さらに固有正則写像 $\pi: \bar{S} \rightarrow D^*$ は次の 2 条件を満たすものとする:

- 1) $\bar{S}$ の各点で π は最大階数をもつ,
- 2) $S = \bar{S} - C$ 及び $\pi = \pi|_S$ とおくとき、任意の $t \in D^*$ に対して、 t 上の fibre $S_t = \pi^{-1}(t)$ は S の既約な解析的部分集合で、Riemann 面とみて一定の finite type (g, n) である。ただし $3g - 3 + n \geq 0$ とする。

以上の条件を満たすとき、 (S, π, D^*) を type (g, n) の Riemann 面の正則族と呼ぶ。また S は D^* 上に type (g, n) の fibering (S, π, D^*) をもつと云う。

§1 では、このような (S, π, D^*) が与えられたとき、fibre S_t

$(t \in D^*)$ を Teichmüller 空間 $T(\mathcal{G})$ の点 t とみなし、 t の $t=0$ における挙動を調べる。(ただし、一般には、 t は多価な解析関数である。)

§2 では、§1 の結果を用いて $(\mathcal{G}, \pi, D^*)$ の completion $(\hat{\mathcal{G}}, \hat{\pi}, D)$ を一定の手続によって構成することを考える。そして、§3 では、 $\mathcal{G}$ から $\hat{\mathcal{G}}$ のなかへの正則写像 f の拡張定理を示す。ただし、 $\pi = \hat{\pi} \circ f$ とする。

§4 では、§2 及び §3 の応用として、代数曲面の一変化を調べる。同様に、§5 では、2次元 Stein 多様体の compactification と、 $\mathbb{C}^2$ の analytic automorphism が polynomial map になるための条件を取り扱う。

§1. type (g, n) の Riemann 面達の正則族 $(\mathcal{G}, \pi, D^*)$ の Teichmüller 空間 $T(\mathcal{G})$ への embedding と、その $t=1$ における挙動。

楕円変換をもたない第一種有限生成 Fuchs 群 $\mathcal{G}$ で、 $S = \mathbb{U}/\mathcal{G}$ が type (g, n) なるものを一つとり、 $\mathcal{G}$ の Teichmüller 空間を $T(\mathcal{G})$ と書く。各点 $\phi \in T(\mathcal{G})$ に対して、 $D_\phi = W_\phi(\mathbb{U})$, $\mathcal{G}_\phi = W_\phi \circ \mathcal{G} \circ W_\phi^{-1}$ とおく。

固定された一点 $t_0 \in D^*$ に対して、 $p_{t_0} \in T(\mathcal{G})$ で、 p_{t_0}/q_{t_0} が S_{t_0} と等角同値になるものを一つとる。 t_0 の十分小さな近傍 δ に対

して、一意的に正則写像 $\pi_0: \delta \rightarrow T(\mathcal{G})$ が定まり、 $\pi_0(z_0) = p_{z_0}$ かつ $z \in \delta$ に対して、 $D_{\pi_0(z)}/\mathcal{G}_{\pi_0(z)}$ は S_z と等角同値になる。そして、この π_0 は δ 内の任意の曲線に沿って解析接続可能である。

そこで、 z -平面における単位円板 $\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を covering map $p(z) = \exp(2\pi \frac{z+1}{z-1})$ をもつ $\tilde{D}$ の universal covering space と思う。この covering transformation group は $\gamma(z) = \frac{(1-2i)z-1}{z-(1+2i)}$ で生成される。また一点 $z_0 \in \tilde{D}$ を $p(z_0) = z_0$ となるようにとる。

$\tilde{D}$ は単連結であるから、一価な正則写像 $\tilde{\pi}: \tilde{D} \rightarrow T(\mathcal{G})$ があって、 $\tilde{\pi}(z_0) = p_{z_0}$ かつ、 $\forall z \in \tilde{D}$ に対して、 $D_{\tilde{\pi}(z)}/\mathcal{G}_{\tilde{\pi}(z)}$ は $S_p(z)$ と等角同値になる。

次に $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ の homotopical monodromy $\tilde{\mathcal{M}}$ を定義しよう。これは、 $\mathcal{G}$ の modular 群 $\text{Mod}(\mathcal{G})$ の元であって、 $\tilde{\pi}(\gamma(z)) = \tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\pi}(z))$ かつ $\forall z \in \tilde{D}$ を満たすものである。

Riemann の moduli space $R(g, n)$ とは、signature $(g, n; \infty, \dots, \infty)$ の nodes をもたない Riemann surfaces の isomorphism classes の全体である。また moduli space $M(g, n)$ とは、signature $(g, n; \infty, \dots, \infty)$ の nodes をもつものも含めた Riemann surfaces の isomorphism classes の全体である。このとき、 $M(g, n)$ は compact normal analytic space で、 $R(g, n)$ はその Zariski open subset になっている。(詳しくは、Bers [2], [3] を見よ。)

このとき、正則写像 $J: D^* \rightarrow R(g, n)$, $J(t) = [S_t]$ は、正則写像 $\hat{J}: D \rightarrow M(g, n)$ に拡張できることが証明される。そこで $\hat{J}(0) = [S_0]$ とおき、 S_0 の components $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$, nodes $P_1, \dots, P_k$ とする。

複素 s -平面における上半平面を H とし、等角写像 $\lambda: H \rightarrow \tilde{D}$, $\lambda(s) = \frac{s-i}{s+i}$ を考える。この λ によって、 H の帯状領域 $\{a < \operatorname{Re} s < b\}$ は、 $\tilde{D}$ における $\tilde{\Sigma} = 1$ の cusp にもつ cusp region Δ に写像される。

以上は述べたことと、deformation space $X(S_0)$ を用いることによつて、Imayoshi [6] と同様の議論から次の定理を得る。
($X(S_0)$ については、Bers [2] を見よ。)

Theorem 1. type (g, n) の Riemann 面の正則族 (S, Σ, D^*) が与えられたとき、 $\pi \phi_1 \in \overline{T(\mathcal{G})}$ が存在して、 $\tilde{\Sigma} = 1$ の cusp にもつ任意の cusp region Δ に対して、 Δ において $\tilde{\Sigma} \rightarrow 1$ のとき、 $\tilde{\Sigma}(\tilde{\Sigma})$ は ϕ_1 に一様に収束する。

そして、 $\tilde{\mathcal{M}}$ が有限位数であることと、 $\phi_1 \in T(\mathcal{G})$ であることか、また、 $\tilde{\mathcal{M}}$ が無限位数であることと、 $\phi_1 \in \partial T(\mathcal{G})$ であることか、

それぞれ同値である。

さらに、 $\tilde{S}$ が無限位数のとき、 ϕ_1 に対応する境界群 $G_1 = G_{\phi_1}$ は regular b-group である。

$$D_1 \cup \{ \text{fixed points of A.P.T. of } G_1 \text{ on } \partial D_1 \} / G_1$$

は nodes をもった type (g, n) の Riemann 面であって、かつ、 S_0 と analytically isomorphic である。ここで、 $P = \Omega(G_1) - \Delta(G_1)$, $\Omega(G_1)$ は G_1 の不連続領域, $\Delta(G_1)$ は G_1 の不変成分である。

§2. (S, π, ϕ) の completion $(\hat{S}, \hat{\pi}, D)$ の構成.

そのために、まずいくつかの準備をする。

1) $\mathcal{U}(0) = [S_0]$ に対して、 S_0 の 1 つの deformation space $X(S_0)$ とする。deformation $\alpha: S \rightarrow S_0$ を適当にとれば、 $[S, \phi_S, S_0] \in T(S)$ と $\phi_S \in T(\mathcal{U})$ に対応するものとするとき、 $\langle S_0, \alpha \circ \phi_S^{-1}, S_0 \rangle \in X(S_0)$ は、 $\mathcal{U} \rightarrow 1$ のとき $\langle id \rangle$ に収束するようにできる。

ここで S_{reg} と記述して、type (g, n) の Riemann 面 S' の各 puncture にそれぞれ 1 つの terminal な Riemann 面をくっつけて nodes をもつ compact な Riemann 面 $\alpha(S')$ を一定の手続きで作る。(詳しくは Bers [3] を見よ。ここでの記号は $\alpha(S')$ である。)

このとき、 $\forall \tilde{z} \in \tilde{D}$ に対して、 $\langle S_{\tilde{z}}, \alpha \circ f_{\tilde{z}}^{-1}, S_0 \rangle \in X(S_0)$ は parametrization space $X_\alpha(a(S_0))$ の点 $(\tau(\tilde{z}), t(\tilde{z}))$ で表わされるが、これから induced される deformation $\in \langle S_{\tau(\tilde{z}), t(\tilde{z})}, \alpha_{\tau(\tilde{z}), t(\tilde{z})}, S_0 \rangle$ と書く。また、各 j ($j=1, \dots, r$) に対して、 $\tilde{z}_j(\tilde{z})$ に対応する $T(\Sigma_j)$ の点を $[z_j, f_{j,\tilde{z}}, \Sigma_{j,\tilde{z}}]$ と表わす。

$\tilde{H}_j$ ($j=1, \dots, r$) を Σ_j の universal covering から決まる Fuchs 群とし、 $[z_j, f_{j,\tilde{z}}, \Sigma_{j,\tilde{z}}]$ に対応する $T(\tilde{H}_j)$ の点を $\phi_{j,\tilde{z}}$ で表わす。 $\langle a(S_{\tilde{z}}), \alpha \circ f_{\tilde{z}}^{-1}, a(S_0) \rangle$ は $X_\alpha(a(S_0))$ において $\langle id \rangle$ に収束するから、 $\phi_{j,\tilde{z}} \rightarrow 0$ in $T(\tilde{H}_j)$ as $\tilde{z} \rightarrow 1$ through Δ である。

一方、 $\langle S_{\tilde{z}}, \alpha \circ f_{\tilde{z}}^{-1}, S_0 \rangle = \langle S_{\tau(\tilde{z}), t(\tilde{z})}, \alpha_{\tau(\tilde{z}), t(\tilde{z})}, S_0 \rangle$ であるから、定義によつて、位相写像 $g_{\tilde{z}}: S_{\tau(\tilde{z}), t(\tilde{z})} \rightarrow S_{\tilde{z}}$ が存在して、 $\alpha_{\tau(\tilde{z}), t(\tilde{z})} = \alpha \circ f_{\tilde{z}}^{-1} \circ g_{\tilde{z}}$ 、かつ、 $g_{\tilde{z}}$ は $\alpha_{\tau(\tilde{z}), t(\tilde{z})}$ によつて S_0 の nodes に写される Jordan curves のまわりの 1 回の Dehn twists のある積 $d_{\tilde{z}}$ に、ある analytic isomorphism を合成したものと homotopic である。従つて、 $T(S)$ において、 $[S, f_{\tilde{z}}, S_{\tilde{z}}] = [S, d_{\tilde{z}} \circ g_{\tilde{z}}^{-1} \circ f_{\tilde{z}}, S_{\tau(\tilde{z}), t(\tilde{z})}]$ である。

ところで、上記の deformation $\alpha: S \rightarrow S_0$ は $S - \alpha^{-1}(\text{nodes})$ において locally quasiconformal であるとしてよい。また S_0 の各 node P_i ($i=1, \dots, k$) の任意の十分小さな近傍 δ_i に対して、quasiconformal mapping $h_{\tilde{z}}: S \rightarrow S_{\tau(\tilde{z}), t(\tilde{z})}$ で、 $[S, f_{\tilde{z}}, S_{\tilde{z}}] = [S, h_{\tilde{z}}, S_{\tau(\tilde{z}), t(\tilde{z})}]$ 、かつ、 $h_{\tilde{z}} = d_{\tilde{z}} \circ g_{\tilde{z}}^{-1} \circ f_{\tilde{z}}$ on $S - \alpha^{-1}(S)$ なるものが存在する。ここで $\delta = \bigcup_{i=1}^k \delta_i$ 。

す。 W_z は $[S, h_z, S_{\infty}(z), \epsilon(z)]$ から canonically に定まる $\mathbb{C}$ の quasiconformal automorphism で、下半平面 $\mathbb{L}$ では等角であって、 $z = -i$ の近くでは、 $W_z(z) = \frac{1}{z+i} + O(|z+i|)$ を満たすものとする。

$\pi_0: U \rightarrow S = U/\mathbb{Q}$ を natural projection とし、 $U_1 = U - \pi_0^{-1} \circ \alpha^{-1}(p_1, \dots, p_k)$ とおく。このとき、 $z=1$ を cusp にもつ任意の cusp region Δ に対して、族 $\{W_z\}_{z \in \Delta}$ は、 $z \rightarrow 1$ through Δ のとき、 U_1 上において、 U_1 上の locally quasiconformal mapping W_1 に広義一様収束し、この W_1 は一意に定まることが証明される。

2) 各 $z \in \tilde{D}$ に対して、 $\phi_z = \tilde{\phi}(z)$, $q_z = q_{\phi_z}$, $D_z = \Omega(q_z) - \Delta(q_z)$ とおく。ここで $\Omega(q_z)$ は q_z の不連続領域、 $\Delta(q_z)$ は下半平面 $\mathbb{L}$ に対応する $\Omega(q_z)$ の不変成分である。同様に、 $\phi_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \tilde{\phi}(z)$, $q_1 = q_{\phi_1}$, $D_1 = \Omega(q_1) - \Delta(q_1)$ とおく。 q_1 は quasi-Fuchsian group か又は regular b-group である。

各 $z \in \tilde{D}$ に対して、 $P_z \in \partial D_z$ 上の q_z の parabolic transformations の fixed points 全体の集合とし、 $\tilde{D}_z = D_z \cup P_z$ とおく。また、 P_1' は ∂D_1 上の q_1 の non-accidental parabolic transformations の fixed points 全体の集合とし、 P_1'' は ∂D_1 上の q_1 の accidental parabolic transformations の fixed points 全体の集合とする。そして、 $P_1 = P_1' \cup P_1''$, $\tilde{D}_1 = D_1 \cup P_1$ とおく。

以下のような集合連を考えよう。

$$\mathcal{D} = \{(\xi, w) \mid \xi \in \tilde{\mathcal{D}}, w \in D_\xi\},$$

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{(\xi, w) \mid \xi \in \tilde{\mathcal{D}}, w \in \tilde{D}_\xi\},$$

$$\mathcal{D}_1 = \{(1, w) \mid w \in D_1\},$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_1 = \{(1, w) \mid w \in \tilde{D}_1\}, \text{ 及 } u''$$

$$\hat{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}} \cup \mathcal{D}_1.$$

3) $\tilde{\mathcal{D}}$ に Hausdorff topology を自然に導入しよう。次のように基本近傍系を定める。

Case 1. $a = (\xi_0, w_0) \in \mathcal{D}$. $z_0 = W_{\xi_0}^{-1}(w_0)$ とおき、 $\tilde{\mathcal{D}}$ における ξ_0 中心の円板 E と、 $\mathcal{U}$ における z_0 中心の円板 K とする。このとき、 $\{(\xi, w) \mid \xi \in E, w \in W_\xi(K)\}$ が点 a における基本近傍系 $\mathcal{U}_a$ の元である。

Case 2. $a = (\xi_0, w_0) \in \tilde{\mathcal{D}} - \mathcal{D}$. $z_0 = W_{\xi_0}^{-1}(w_0)$ とおき、 $\tilde{\mathcal{D}}$ における ξ_0 中心の円板 E とする。 $\mathcal{U}$ 内の点 z_0 における horocycle C とする。つまり、 C は実軸に接する、 $\mathcal{U}$ 内の Euclidean circle である。 $K = \text{Int } C \cup \{z_0\}$ とおく。ここで、 $\text{Int } C$ とは、円周 C の囲む円板のことである。このとき、 $\{(\xi, w) \mid \xi \in E, w \in W_\xi(K)\}$ が $\mathcal{U}_a$ の元である。

以下、 $\mathcal{C}$ は、 $\mathcal{D}$ 内の点 $z=1$ における horocycle である。つまり、 $\mathcal{C}$ は circle ($|z|=1$) に $z=1$ で接する ($|z| \leq 1$) 内の Euclidian circle である。 $K = \text{Int } \mathcal{C} \cup \{1\}$ とおく。

Case 3. $a = (1, w_0) \in \mathcal{D}_1$, $z_0 = W_1^{-1}(w_0)$ とおき、 $\mathcal{U}$ 内の z_0 中心の円板 K をとる。このとき、 $\{(z, w) \mid z \in K, w \in W_{\mathcal{C}}(K)\}$ が $\mathcal{U}_a$ の元である。

Case 4. $a = (1, w_0) \in \widetilde{\mathcal{D}}_1 - \mathcal{D}_1$ with $w_0 \in \mathcal{P}_1'$, $z_0 = W_1^{-1}(w_0)$ とおく。 C は $\mathcal{U}$ 内の点 z_0 における horocycle とし、 $K = \text{Int } C \cup \{z_0\}$ とおく。
(この case のときは、 W_1, W_1^{-1} はそれぞれ点 z_0, w_0 を連続的に拡張できることに注意せよ。) このとき、 $\{(z, w) \mid z \in K, w \in W_{\mathcal{C}}(K)\}$ が $\mathcal{U}_a$ の元である。

Case 5. $a = (1, w_0) \in \widetilde{\mathcal{D}}_1 - \mathcal{D}_1$ with $w_0 \in \mathcal{P}_1''$. 点 w_0 に対応する S_0 上の node を s_0 とする。 S_0 における点 s_0 の十分小土な近傍 δ_0 をとり、 K は $\pi_0^{-1}(\delta_0)$ の一つの連結成分であって、 $W_1(K \cap \mathcal{U}_1)$ の境界点に点 w_0 があるものとする。このとき、 $\{(z, w) \mid z \in K, w \in W_{\mathcal{C}}(K)\} \cup \{a\}$ が $\mathcal{U}_a$ の元である。

以上のように $\{\mathcal{U}_a\}_{a \in \widehat{\mathcal{A}}}$ を定めれば、これは基本非帰系の公

理を満し、 $\hat{\mathcal{D}}$ 上に Hausdorff topology を induce する。以後、 $\hat{\mathcal{D}}$ には、この topology が入っているものとする。

4) 次に $\tilde{m}$ と $\mathbb{Q}$ が生成する $\mathcal{D}$ の analytic automorphism group $\mathcal{G}$ を考えよう。

$\omega \in N(\mathbb{G})$ は $\tilde{m} \in \text{Mod}(\mathbb{G})$ を induce するものとし、各自然数 n と各 $g \in \mathbb{Q}$ に對して、 $\omega_0 = g \cdot \omega^n$ とおく。各 $z \in \tilde{\mathcal{D}}$ に對して、 $w_z \in Q_{\text{norm}}(\mathbb{G})$ は $[S, R_z, S_{T(z)}, t(z)]$ から定まる $\mathbb{U}$ の quasiconformal automorphism とする。そして、 $\tilde{w}_z = (\omega_0)_*(w_z) = \alpha_z \circ w_z \circ \omega_0^{-1}$ とおく。ここで、 $\alpha_z \in SL(2, \mathbb{R})$ は、 $\tilde{w}_z \in Q_{\text{norm}}(\mathbb{G})$ となるようにとる。このとき、 $[\tilde{w}_z] = [w_{g^n(z)}]$ in $T(\mathbb{G})$ である。

また、 $W_z, \tilde{W}_z$ はそれぞれ $w_z, \tilde{w}_z$ から定まる $\mathbb{U}$ の quasiconformal automorphism で、下半平面では conformal なものとする。そして、

$$H_z(w) = [\omega_0]_*(w) = \tilde{W}_z \circ \omega_0 \circ W_z^{-1}(w)$$

とおけば、これは D_z から $D_{g^n(z)}$ の上への等角写像である。

$\tilde{g}_n$ は $(z, w) \in (D^n(z), [\omega_0]_*(w))$ に對する $\mathcal{D}$ の analytic automorphism とすれば、 $\mathcal{G} = \{\tilde{g}_n \mid g \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}\}$ は fixed-point-free な discrete subgroup of $\text{Aut}(\hat{\mathcal{D}})$ である。

5) 各 $\tilde{g}_n \in \mathcal{G}$ は、自然に次のようにして、 $\hat{\mathcal{D}}$ の homeomorphic automorphism に拡張される。

$\{W_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \Delta}$ のときと同様にして、 $\{\tilde{W}_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \Delta}$ も、 $\tilde{z} \rightarrow 1$ through Δ のとき、 $\tilde{U}_1 = \omega_0(U_1)$ 上で、 $\tilde{U}_1$ 上の locally quasiconformal mapping $\tilde{W}_1$ に一様収束し、また、 $\{H_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \Delta}$ は、 $\tilde{z} \rightarrow 1$ through Δ のとき、 D_1 上で、 D_1 の conformal automorphism H_1 に一様収束することが、それぞれ証明される。

ところで、 G_1 は a quasi-Fuchsian group, 又は, a regular b-group であるから、 D_1 の各 component は, a quasi-circle で囲まれる。従って、Carathéodory の定理より、 D_1 上の conformal automorphism H_1 は、 $\bar{D}_1$ 上の homeomorphic automorphism $\hat{H}_1$ に拡張される。

そこで、 $\hat{g}_n$ の $\hat{\mathcal{D}}$ 上への拡張 $\hat{g}_n$ として、各 $(1, w) \in \hat{\mathcal{D}}_1$ に対して、 $\hat{g}_n(1, w) = (1, \hat{H}_1(w))$ とおく。

このとき、 $\hat{g}_n$ は、 $\hat{\mathcal{D}}$ の homeomorphic automorphism であることが、証明できる。

6) そこで、商空間 $\mathcal{G} = \hat{\mathcal{D}} / \mathcal{G}$ に normal complex structure を導入したい。(この $\mathcal{G}$ が、 $\mathcal{G}$ の completion になるべきものである。)

homotopical monodromy $\tilde{M} \in \text{Mod}(\mathcal{G})$ に対応する元 $f_* \in \text{Mod}(\mathcal{S})$ とする。

正則写像 $J: D^* \rightarrow R_{(g,n)}$, $J(e) = [S_e]$ が、正則拡大 $\hat{J}: D \rightarrow M_{(g,n)}$ with $\hat{J}(0) = [3_0]$ をもち、 $X(S_0)$ における $\langle \text{id} \rangle$ の連続 N で、 N は有

有限群 $\Gamma_0(S_0)$ について stable で、かつ、 $N/\Gamma_0(S_0)$ が $M(g, n)$ における $[S_0]$ の近傍になることから、ある正整数 p が存在して、 f^p は α によって S_0 上の nodes に写される S 上の Jordan curves のまわりの p 回の Dehn twists のある積と homotopic である。

そこで、 S -平面において、 $E = (|S| < 1)$, $E^* = (0 < |S| < 1)$ とおく。写像 $k: E \rightarrow D$ は $k(S) = S^p$ とする。

(S, π, ν^*) から relation $\tau = S^p$ によって作られる正則族 $(\mathcal{X}, \pi, E^*)$ を考える。すると、各 $S \in E^*$ を $\langle a(S), a(\alpha \circ f_S^{-1}), a(S_0) \rangle$ に写す写像 $K: E^* \rightarrow X_\alpha(a(S))$ は一価正則であるから、 K は正則拡大 $\hat{K}: E \rightarrow X_\alpha(a(S_0))$ with $\hat{K}(0) = \langle \text{id} \rangle$ をもつ。

各 $S \in E$ に対して、真 $\hat{K}(S)$ によって定まる Kleinian group $\mathcal{H}(S)$ とし、その不連続領域のうち、 S_0 に対応する部分を $\Omega(S)$ と書く。

以下の集合を考えよう。

$$\mathcal{X}_1 = \{ (S, [z]) \mid S \in E^*, [z] \in \Omega(S)/\mathcal{H}(S) \text{ with the images of all elliptic vertices removed} \},$$

$$\hat{\mathcal{X}}_1 = \{ (S, [z]) \mid S \in E^*, [z] \in \Omega(S)/\mathcal{H}(S) \text{ with the images of all elliptic vertices identified} \}.$$

このとき、作りのより、 $\mathcal{X}_1, \hat{\mathcal{X}}_1$ はともに 2 次元複素多様体であり、 $\mathcal{X}_1$ は $\hat{\mathcal{X}}_1$ の Zariski open subset である。さらに、 $\pi_1: \mathcal{X}_1 \rightarrow E^*$, $\hat{\pi}_1: \hat{\mathcal{X}}_1 \rightarrow E^*$ を projections とすれば、 $(\mathcal{X}_1, \pi_1, E^*)$ は type (g, n) の正則族になり、 $(\hat{\mathcal{X}}_1, \hat{\pi}_1, E^*)$ は type $(g, 0)$ の正則族になる。

§1と同様にして、 $(\mathcal{X}, \pi, E^*)$ 及び $(\mathcal{X}_1, \pi_1, E^*)$ の $T(G)$ への analytic embedding (many-valued) をそれぞれ Ξ 及び Ψ とする。

そのとき、適当な $p=p_1$ をとれば、 $\Xi = \Psi$ on E^* で、かつ、

$(\mathcal{X}, \pi, E^*)$ と $(\mathcal{X}_1, \pi_1, E^*)$ とは同じ homotopical monodromy $\tilde{M}_1$ をも

つとしてよい。従って、このとき、 $(\mathcal{X}, \pi, E^*)$ と $(\mathcal{X}_1, \pi_1, E^*)$ は

同値なものになる。

さらに、次のような集合を考えよう。

$$\mathcal{X}_0 = \hat{\mathcal{X}}_1 \cup \{(0, [z]) \mid [z] \in \mathcal{Q}(0)/H(0) \text{ with the images of all elliptic vertices of } H(0) \text{ corresponding to the fixed points of non-accidental parabolic transformations}\}$$

$$\hat{\mathcal{X}}_0 = \hat{\mathcal{X}}_1 \cup \{(0, [z]) \mid [z] \in \mathcal{Q}(0)/H(0) \text{ with the images of all elliptic vertices of } H(0), \text{ where related elliptic vertices are identified.}\}.$$

このとき、 $\mathcal{X}_0$ は二次元複素多様体になり、Imayoshi [6], Theorem

4 の証明と同様にして、 $\hat{\mathcal{X}}_0$ 上に自然に normal complex structure

$\mathcal{Q}$ が入り、 $\mathcal{Q}|_{\mathcal{X}_0}$ は、 $\mathcal{X}_0$ 上にもともと与えられている complex

structure と一致し、 $\mathcal{X}_0$ は $\hat{\mathcal{X}}_0$ の Zariski' open subset になる。

$\pi_0: \hat{\mathcal{X}}_0 \longrightarrow E$ を natural projection とする。

ここで、 $\tilde{M}_1$ に対応する $w \in N(G)$ に対して、 $w_1 = w|_1$ とおけば、

w_1 は $\tilde{M}_1$ を induce する。さらに、 G の単位元 I に対して、 $\mathcal{Q}$ の

元 $\hat{I}_0$ は $\hat{\mathcal{X}}_1$ に制限したとき、その action が trivial であること

に注意せよ。

また、 $\mathcal{U}$ と $\mathcal{G}$ から生成される $\mathcal{G}$ の subgroup を $\mathcal{G}_1$ とし、 $\mathcal{G}_1$ に対応する $\hat{\mathcal{G}}$ の subgroup を $\hat{\mathcal{G}}_1$ とする。

正則写像 $P_1: \tilde{D} \rightarrow E^*$ は $P_1(z) = P_1(z)^0$ for $z \in \tilde{D}$ となるものとする。各 $S \in E^*$ に対して、 $D_S = \pi_1^{-1}(S) = \Omega(S)/H(S)$ とおき、その compact 化を $\hat{D}_S$ とすれば、 $\hat{D}_S = \hat{\pi}_0^{-1}(S)$ である。同様に、 $D_0 = \Omega(0)/H(0)$ with the images of all related elliptic vertices identified とおき、その compact 化を $\hat{D}_0$ とすれば、 $\hat{D}_0 = \hat{\pi}_0^{-1}(0)$ である。

7) 双正則写像 $\mathcal{D}/\mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$ が次のように canonically に構成される。

各 $\tilde{z} \in \tilde{D}$ と各 $[z] \in D_{\tilde{z}}/\mathcal{G}_{\tilde{z}}$ に対して、

$$F_{\tilde{z}}([z]) = h_{\tilde{z}} \circ \pi_0 \circ W_{\tilde{z}}^{-1}(z)$$

とおく。ここで、 $h_{\tilde{z}}: S \rightarrow S_{\tau(\tilde{z})}$, $\tau(\tilde{z}) = A_{P_1(\tilde{z})}$, $\pi_0: U \rightarrow S$,

$W_{\tilde{z}}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ は以前の通りとする。このとき、 $F_{\tilde{z}}: D_{\tilde{z}}/\mathcal{G}_{\tilde{z}} \rightarrow A_{P_1(\tilde{z})}$

は単射同値である。さらに、 $(\tilde{z}, z)$ と $(\tilde{z}', z')$ が $\mathcal{G}_1$ で同値ならば、 $F_{\tilde{z}}([z]) = F_{\tilde{z}'}([z'])$ となる。従って、 $\{F_{\tilde{z}}\}$ は双正則写像

$\mathcal{D}/\mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$ を induce する。

そして、この写像は topological homeomorphism $\hat{F}_1: \hat{\mathcal{D}}/\hat{\mathcal{G}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{D}}_1$ に拡張されることを証明される。

8) 一方, G の fiber space $F(G)$ の analytic automorphism $[\omega]^*$ は, a finite subgroup Γ of the analytic automorphism group $\mathcal{D}/g_1$ を induce する。そして, 各元 $\gamma \in \Gamma$ は, $\widehat{\mathcal{D}}/g_1$ の homeomorphic automorphism $\widehat{\gamma}$ に拡張される。 $\widehat{\Gamma} = \{\widehat{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\}$, $\widehat{\Gamma}_0 = \widehat{\mathfrak{F}} \circ \widehat{\Gamma} \circ \widehat{\mathfrak{F}}^{-1}$, $\widehat{\Gamma}_0 = \widehat{\mathfrak{F}} \circ \widehat{\Gamma} \circ \widehat{\mathfrak{F}}^{-1}$ とおく。 $\widehat{\mathfrak{F}}_0$ は normal complex space であるから, 各元 $\widehat{\mathfrak{F}}_0 \circ \widehat{\gamma} \circ \widehat{\mathfrak{F}}_0^{-1} \in \widehat{\Gamma}_0$ は, $\widehat{\mathfrak{F}}_0$ の analytic automorphism である。従って, Cartan の定理より, $\widehat{\mathfrak{F}}_0/\widehat{\Gamma}_0$ は, normal complex space になり, $\widehat{\mathfrak{F}}$ は, biholomorphic mapping of $S_1 = (\mathcal{D}/g_1)/\Gamma = \mathcal{D}/g$ onto $\widehat{\mathfrak{F}}_0/\widehat{\Gamma}_0$ を induce し, この mapping は, $\widehat{S} = (\widehat{\mathcal{D}}/g_1)/\widehat{\Gamma} = \widehat{\mathcal{D}}/g$ から $\widehat{\mathfrak{F}}_0/\widehat{\Gamma}_0$ の上への homeomorphism に拡張される。この同一視によって, $\widehat{S} = \widehat{\mathcal{D}}/g$ 上に a normal complex structure が入る。

そして, $\pi_1: S_1 \rightarrow D^*$, $\pi: \widehat{S} \rightarrow D$ は natural projections とすれば, (S, π, D^*) と (S_1, π_1, D^*) は equivalent であり $(\widehat{S}, \widehat{\pi}, D)$ は (S_1, π_1, D^*) の completion になっている。

故に, $\widehat{S} = \widehat{\mathcal{D}}/g$ は a normal complex space になり, $\widehat{\pi}: \widehat{S} \rightarrow D$ は natural projection とすれば, $(\widehat{S}, \widehat{\pi}, D)$ は (S, π, D^*) の completion である。

以上によって, 次の定理を得る。

Theorem 2. type $(3, n)$ の Riemann 面達の正則族 (S, π, D^*) が

与えられたとき、この正則族の completion $(\hat{\mathcal{G}}, \hat{\pi}, D)$ が canonically に構成できて、 $\hat{\mathcal{G}}$ は 2-dimensional normal complex になる。

各 $t \in D^*$ に対し、 $\hat{\mathcal{G}}_t = \hat{\pi}^{-1}(t)$ は nonsingular な type $(g, 0)$ の compact Riemann 面であり、 $\hat{\mathcal{G}}_0 = \hat{\pi}^{-1}(0)$ は singular fibre における可能性がある。

§3. An extension Theorem.

Theorem 3. $\tilde{\mathcal{G}}$ を 2 次元複素多様体、 $\tilde{\pi}$ を $\tilde{\mathcal{G}}$ から単位円板 D の上への proper holomorphic mapping とし、 $\tilde{\mathcal{G}}$ の 1 次元 analytic subset C があって、 $\tilde{\mathcal{G}}_0 = \tilde{\pi}^{-1}(0)$, $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}} - \tilde{\mathcal{G}}_0 \cup C$, $\pi = \tilde{\pi}|_{\mathcal{G}}$ とおくと共に、 $(\mathcal{G}, \pi, D^*)$ は、type (g, n) の Riemann 面達の正則族になるものとする。ただし、 $3g - 3 + n \geq 0$ 、

$(\hat{\mathcal{G}}, \hat{\pi}, D)$ は Theorem 2 において、canonically に構成された $(\mathcal{G}, \pi, D^*)$ の completion とする。

このとき、すべての正則写像 $f: \mathcal{G} \rightarrow \hat{\mathcal{G}}$ with $\pi = \hat{\pi} \circ f$ は、有理写像 $\hat{f}: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \hat{\mathcal{G}}$ に拡張され、 $\hat{f}$ の不確定点は $\tilde{\mathcal{G}}_0 \cup C$ の特異点達のなかに存在する可能性がある。

この定理の証明は、 $\hat{\mathcal{G}}$ の構成法から、Imayoshi [6] のなかで、

Kobayashi's extension theorem を用いたのと同様の議論によって得られる。

§4. 代数曲面の一貫化への応用.

まず, Griffiths [5] による代数多様体の一貫化定理を述べよう。ここでは、特に、Bers [1], [4] に従って、代数曲面の一貫化について説明する。

1) X を $\mathbb{C}$ 上の 2 次元, 既約, 非特異な射影的代数多様体とする。以下このようなものを代数曲面と呼ぶ。 X_1 は X の空でない Zariski open subset とする。 X は適当な射影空間 $\mathbb{P}_N$ に埋め込まれておりものとする。このとき、同じ次数の、 $N+1$ 変数の 2 つの齊次多項式 P_0, P_1 と、non-empty Zariski open subsets $Y \subset X_1, Z \subset \mathbb{P}_1$ が存在して、各点 $S \in \mathbb{P}_N$ に對して、 $\pi(S) = (P_0(S), P_1(S))$ とおけば、 π は Y から Z の上への正則写像であって、 Y の各点で maximal rank, かつ、 $\forall z \in Z$ に對して、 $S_z = \pi^{-1}(z) \cap Y$ は a Riemann surface of (fixed) finite type (g, n) with $3g-3+n \geq 0$ とできる。 Z の universal covering space $\tilde{Z}$ は、単位円板としてよい。

2) さて、 G は elliptic transformations を含まない、第一種有限生成 Fuchs 群で、 $S = \mathbb{U}/G$ は type (g, n) になるものとする。

一点 $z_0 \in \mathbb{Z}$ に対して、 $p_0 \in T(G)$ は、 $D_{p_0}/G_{p_0} \cong S_{z_0}$ なるものとする。 $\mathbb{Z}$ における z_0 の十分小さな近傍 δ をとれば、一意的に正則写像 $\pi: \delta \rightarrow T(G)$ があって、 $\pi(z_0) = p_0$ かつ $D_{\pi(z)} / G_{\pi(z)} \cong S_z$ for $z \in \delta$ となる。そして、 π_0 は、 $\mathbb{Z}$ 内の任意の曲線に沿って解析接続可能である。

$p: \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{Z}$ を covering map とし、点 $\tilde{z}_0 \in \tilde{\Sigma}$ で $p(\tilde{z}_0) = z_0$ なるものとする。 $\tilde{\Sigma}$ は単連結であるから、正則写像 $\pi: \tilde{\Sigma} \rightarrow T(G)$ ぞ、 $\pi(\tilde{z}_0) = p_0$ かつ、 $\forall \tilde{z} \in \tilde{\Sigma}$ に対して、 $D_{\pi(\tilde{z})} / G_{\pi(\tilde{z})} \cong S_{p(\tilde{z})}$ となるものが存在する。

そこで、

$$\mathcal{D} = \{(\tilde{z}, w) \mid \tilde{z} \in \tilde{\Sigma}, w \in D_{\pi(\tilde{z})}\}$$

とおけば、 $\mathcal{D}$ は $\mathbb{C}^2$ 内の単連結な bounded Bergmann domain になる。
($\mathcal{D}$ は位相的には cell と同値である。)

群 G は、 $\mathcal{D}$ 上に次の rule によって、a discrete fixed-point-free group of analytic automorphisms を induce する：

$$g(\tilde{z}, w) = (\tilde{z}, W_{\pi(\tilde{z})} \circ g \circ W_{\pi(\tilde{z})}^{-1}(w)), \quad g \in G.$$

商空間 $\mathcal{D}/G$ は、2-dim. complex manifold であり、canonical projection $\Pi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/G$ は universal covering である。

$\mathcal{D}$ の点 $(\tilde{z}, a)$ は、a pair $(\tilde{z}, a)$ with $\tilde{z} \in \tilde{\Sigma}$, $a \in S_{p(\tilde{z})} \subset Y$ such that

$\pi(a) = p(\tilde{z})$ とみなすことが出来る。このような pair $(\tilde{z}, a)$ に
 対して、 $\tilde{\pi}(\tilde{z}, a) = a$ とおけば、 $\tilde{\pi} \circ \pi: \tilde{X} \rightarrow Y$ は universal
 covering である。

そこで、§2における Riemann 面の正則族の完備化の議論
 を用いて、Griffiths' uniformization theorem of algebraic
 surfaces を精密化する事を考える。以下は §2 における記
 号をそのまま用いることにする。

3) Γ を universal covering $p: \tilde{Z} \rightarrow Z$ の covering transformation
 group とすれば、 Γ は単位円板 $\tilde{Z}$ 上の、有限生成第一種 Fuchs
 群である。 $\mathcal{C}$ を Γ の parabolic elements の fixed points 全体の集
 合とする。各 $\tilde{z}_0 \in \mathcal{C}$ に対して、 $\mathbb{P}(\tilde{z}_0) = \lim_{\tilde{z} \rightarrow \tilde{z}_0} \mathbb{P}(\tilde{z})$ とおく。こ
 れで、極限は、 $\tilde{z}_0$ に cusp をもつ $\tilde{Z}$ 内の cusp region においてと
 るものとする。各 $\tilde{z} \in \tilde{Z} \cup \mathcal{C}$ に対して、 $D_{\mathbb{P}(\tilde{z})} = \Omega(G_{\mathbb{P}(\tilde{z})}) - \Delta(G_{\mathbb{P}(\tilde{z})})$,
 $\mathcal{P}_{\mathbb{P}(\tilde{z})}$ = the set of all fixed points of parabolic elements of $G_{\mathbb{P}(\tilde{z})}$
 on $\partial D_{\mathbb{P}(\tilde{z})}$ とおく。

そして、

$$\hat{\mathcal{D}} = \{(\tilde{z}, w) \mid \tilde{z} \in \tilde{Z} \cup \mathcal{C}, w \in D_{\mathbb{P}(\tilde{z})} \cup \mathcal{P}_{\mathbb{P}(\tilde{z})}\}$$

とおく。 $\hat{\mathcal{D}}$ の各点を cusp point と呼ぶ。 §2 で述べたよ
 うに、 $\hat{\mathcal{D}}$ には自然に Hausdorff topology が入る。

4) Γ または G のおよび、 $\mathcal{D}$ の analytic automorphism を induceし、 $\widehat{\mathcal{D}}$ の homeomorphic automorphism に拡張される。このようにして、 Γ と G から生成される discrete fixed-point-free group of analytic automorphisms of $\mathcal{D}$ を g とし、 g のおよび $\widehat{\mathcal{D}}$ に拡張して得られる group of homeomorphic automorphisms of $\widehat{\mathcal{D}}$ を $\widehat{g}$ とする。

そのとき、 $S = \mathcal{D}/g$ は、a two dimensional complex manifold であり、 Υ と canonically に biholomorphically equivalent である。この identification によって、 $S = \Upsilon$ と見れば、 $\mathcal{D}$ が Υ の universal covering space であり、 g がその covering transformation group である。

さらに、 $\widehat{S} = \widehat{\mathcal{D}}/\widehat{g}$ は、a two dimensional compact normal complex space になり、Theorem 3 より、 $\widehat{S}$ と X は双有理型同値である。

以上によって、次の定理を得る。

Theorem 4. X を代数曲面とし、 X_1 は X の non-empty Zariski' open subset とする。そのとき、non-empty Zariski' open subset $\Upsilon \subset X_1$ があって、 Υ の universal covering space $\mathcal{D}$ が canonically に構成できて、 $\mathbb{C}^2$ 内の bounded Bergman domain になり、位相的に

には、a cell である。

さらに、 $\mathcal{U}$ にすべてこの cusp points を付加した集合を $\widehat{\mathcal{U}}$ とし、 $\mathcal{G}$ を covering transformation group とすれば、 $\widehat{\mathcal{U}}$ には自然に Hausdorff topology が入り、 $\mathcal{G}$ の各元は、 $\widehat{\mathcal{U}}$ の位相自己同型写像に拡張でき、それらで作られる群を $\widehat{\mathcal{G}}$ とすれば、 $\widehat{\mathcal{S}} = \widehat{\mathcal{U}} / \widehat{\mathcal{G}}$ は a two dimensional compact normal complex space になり、 X と $\widehat{\mathcal{S}}$ は双有理型同値である。

§ 5. 2次元 Stein 多様体の compactification への応用

一般に、compact complex space M が、complex manifold X の compactification であるとは、analytic subset T of M があって、 X と $M - T$ が双正則になることを言う。

ここでは、一定の holomorphic fibering をもつ 2次元 Stein 多様体の compactification について考える。

Theorem 5 $\mathcal{S}$ を 2次元 Stein 多様体、 R を compact Riemann 面、 R_0 を a Zariski open subset of R とする。正則写像 $\pi: \mathcal{S} \rightarrow R_0$ があって、

1) $\mathcal{S}$ の各点において π は maximal rank,

2) $\forall t \in \mathbb{R}$ に對して, $S_t = \bar{E}(t)$ は, a Riemann surface of fixed finite type (g, n) with $3g-3+n \geq 0$.
とする。

このとき, S の compactification $\hat{S}$ が canonically に構成でき、 $\hat{S}$ は 2-dim. normal complex space で、かつ、代数曲面と双有理型同値になる。さらに、 S の任意の compactification は、 $\hat{S}$ と双有理型同値である。

この $\hat{S}$ の構成は Theorem 2 で与えられ、 $\hat{S}$ が代数曲面と双有理型同値であることは、Kodaira の分類理論 (解析曲面についての) から得られる。また、 S の任意の compactification が $\hat{S}$ と双有理型同値になることは、Theorem 3 から示される。

Notice

1) $3g-3+n < 0$ ならば、 S の compact 化で、代数曲面とは、
いって双有理同値にならないものがある。その例として、
 $S = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ を考える。

$\mathbb{C}^2$ の点 (z, w) を $(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w, \frac{1}{2}w)$ に写す linear automorphism of $\mathbb{C}^2$ から生成される群を G とする。そして、Hopf 曲面

$\widehat{S} = \mathbb{C}^2 - \{0\} / \mathbb{Q}$ を考えれば、これは $S^1 \times S^3$ と diffeomorphic になるのど、その first Betti number は 1 (奇数) となつて、Kähler manifold ではない。従つて、 $\widehat{S}$ は代数曲面ではない。さらに、 $\widehat{S}$ 上には有理型函数は定数しかなく、non-singular elliptic curve $C = \{(z, 0) \mid z \in \mathbb{C}^*\} / \mathbb{Q}$ 以外には、 $\widehat{S}$ 上に analytic curve が存在しないことがわかる。また、 $S = \widehat{S} - C$, $\pi([z], [w]) = \exp(2\pi i \frac{z}{w})$ for $(z, w) \in \mathbb{C}^2 - \{w=0\}$ とおけば、対応 $([z], [w]) \mapsto (\exp(2\pi i \frac{z}{w}), w \exp(\frac{z}{w} \log z))$ によつて、 S と $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ は双正則であり、 $(S, \pi, \mathbb{C}^*)$ は type (0, 2) の holomorphic fibering になる。

従つて、 $S \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ の compactification として、代数曲面と双有理型同値でない Hopf 曲面が存在することになる。

2) Theorem 3 と 5 の応用として、Kiguka による $\mathbb{C}^2$ の analytic automorphism から polynomial map になるための定理 (to appear) を得ることにできることを述べる。

$P(x, y)$ を定数でない、2変数 x, y の多項式とする。 $k \in \mathbb{C}$ に対して、 $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x, y) - k = 0\}$ の各既約成分 S_k を P の prime surface と呼ぶ。 S_k の desingularization から type (g, n) がとき、 S_k は type (g, n) であるといふ。すると、有限個の k を除いて、すべての S_k は fixed finite type (g_0, n_0) になる。 $3g_0 - 3 + n_0 \geq 0$

のとき、 P は一般型であると言う。

このとき、Kigaka による、 $\mathbb{C}^2$ の analytic automorphism が、polynomial map になるための定理として次のものがある。

Theorem (Kigaka) T を $\mathbb{C}^2$ の analytic automorphism とする。ある general type の polynomial P があって、 $P \circ T$ もまた、polynomial になれば、 T は polynomial map である。

Theorem 3, 5 の応用として、この定理が得られることを述べる。

任意の polynomial map P に対して、適当に polynomial P_0 と一変数の polynomial φ をとれば、 $P = \varphi(P_0)$ 、かつ、有限個の c を除いて、 P_0 の任意の定数値 $\{P_0 - c = 0\}$ は既約になるようにできる。従って、もともと、有限個の c を除いて、 P の任意の定数値 $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x, y) - c = 0\}$ が既約としてよい。

$Q = P \circ T$ とおく。このとき、 $\mathbb{P}_2$ 内の analytic curves C_1, C_2 があって、 $S_1 = \mathbb{P}_2 - C_1$, $S_2 = \mathbb{P}_2 - C_2$, $\pi_1 = P|_{S_1}$, $\pi_2 = Q|_{S_2}$, $R = \mathbb{P}_1$ - a set of finite points とおけば、 (S_1, π_1, R) , (S_2, π_2, R) は、holomorphic family of Riemann surfaces of type (g_0, n_0)

with $3g_0 - 3 + n_0 \geq 0$ とある。そして、 T は $\pi_1 = \pi_2 \circ T$ とある
biholomorphic mapping T_0 of S_1 onto S_2 を induce する。

$(\hat{S}_1, \hat{\pi}_1, \mathbb{P}_1)$ 及 $(\hat{S}_2, \hat{\pi}_2, \mathbb{P}_2)$ 及 (S_1, π_1, R) 及 (S_2, π_2, R)
の Theorem 5 において構成した completions とする。

$j_1: S_1 \rightarrow \hat{S}_1$, $j_2: S_2 \rightarrow \hat{S}_2$ を inclusion maps とすれば、

Theorem 3 より、 j_1, j_2 は、それぞれ、biholomorphic extensions

$\hat{j}_1: \mathbb{P}_2 \rightarrow \hat{S}_1$, $\hat{j}_2: \mathbb{P}_2 \rightarrow \hat{S}_2$ を induce する。同様に、biholomorphic

mapping $j_2 \circ T_0 \circ j_1^{-1}: j_1(S_1) \rightarrow j_2(S_2)$ は、 $\hat{S}_1$ から $\hat{S}_2$ の上への

biholomorphic extension をもつ。従って、analytic automorphism

$T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ は biholomorphic extension $\hat{T}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ をもつ。

故に $\hat{T}$ は rational map であり、 $T = \hat{T}|_{\mathbb{C}^2}$ は holomorphic

であり、 T は polynomial map になる。

References

- [1] L. Bers, Uniformization, Moduli and Kleinian groups,
Bull. of London Math. Soc. 4 (1972), 257-300.
- [2] ———, Spaces of degenerating Riemann surfaces,
in "Discontinuous groups and Riemann surfaces",
Ann. of Math. Studies 79, Princeton Univ. Press, (1974),
43-55.
- [3] ———, Deformations and Moduli of Riemann surfaces
with nodes and signatures, Math. Scand. 36 (1975), 12-16.
- [4] ———, On Hilbert's 22nd problem,
proceedings of Symposia in pure mathematics,
Volume 28 (1976), 559-609.
- [5] P. A. Griffiths, Complex analytic properties of
certain Zariski open subsets on algebraic varieties,
Ann. of Math. 94 (1971), 21-55.
- [6] Y. Iwayoshi, Holomorphic families of Riemann surfaces
and Teichmüller spaces, to appear.
- [7] ———, Applications of Teichmüller spaces
to uniformization of algebraic surfaces and compactification
of two dimensional stein manifolds, to appear.