

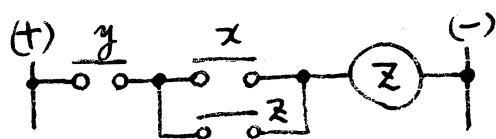
時間を入れたブール代数の公理系

日大 理工 数学科
高橋英之

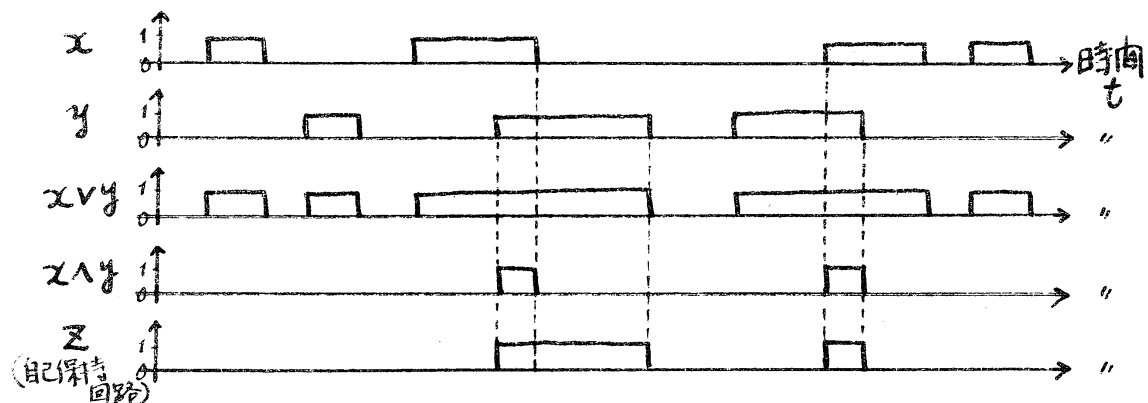
要約. 実数の集合 R (時間軸) から 2 値 $\{true, false\}$ への関数の全体を Σ とする。この Σ の上の演算子について論じる。これは通常、ブール代数を含んでより広い体系となる。シーケンス制御の自己保持回路に対応した演算子 H を導入し、この H に関する公理系を立て、多くの定理 (つまり H に関する公式) を導く。いくつかの小テーマに分けて論じる。

§1. 序論. シーケンス制御は時間に関係している。本稿は次の文献にヒントを得た:

杉原丈夫「時間の論理」 早稲田大学出版部 1974 年
他の文献についてはこの本の参考文献を参照されたい。
自己保持回路とは次のようなものである。



$$y \wedge (x \vee z) \rightarrow z.$$



自己保持回路 z は、 $x \wedge y$ ON が z の発火条件、それ以後は y ON が z の維持条件である。 x は関数: $R \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$ であり、 y も同様である。OR ($\vee$) や AND ($\wedge$) や自己保持回路は、 x の時間関数に対してひとつの時間関数を与える演算 (或は functional) であると思ふ。

定義. $\Sigma = \{x \mid x: R \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}\}$.

この Σ 上の演算子について研究する。

2項演算子: $\Sigma \times \Sigma \rightarrow \Sigma$, 単項演算子: $\Sigma \rightarrow \Sigma$.

定義. Σ の要素に対する等号 ($=$) を次のように定義する。

For $x, y \in \Sigma$, $x = y \iff \forall t (x(t) = y(t))$.

定義. Σ 上の演算子に対する等号を次のように定める。

単項演算子 $A = B \iff \text{for } \forall x \in \Sigma, Ax = Bx$.

2項 〃 $A = B \iff \text{for } \forall x \forall y \in \Sigma, xAy = xBy$.

§2. 2値のブール代数を Σ 上へ移すこと。

・ 2値 $\{\text{true}, \text{false}\}$ に対する通常のブール演算子はすべて

容易に Ω 上の演算子とみなすことができる。以下のように。

定義. $\forall x \forall y \in \Omega, \forall t \in R$ に対して

$$(x \wedge y)(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t) \wedge y(t), \quad (x \vee y)(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t) \vee y(t).$$

$$(x \rightarrow y)(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t) \rightarrow y(t), \quad (\neg x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \neg(x(t)).$$

すると2値のブール代数の公式はすべて Ω 上でも成立する。

例. 分配則. $x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \vee x \wedge z$... Ω の元として成立。

ブール値 true 及び false は Ω の中の元としては、恒等関数であると見做される。 $\text{true} \in \Omega, \text{false} \in \Omega$.

$$\text{true}(t) = \text{true} \text{ for } \forall t. \quad \text{false}(t) = \text{false} \text{ for } \forall t.$$

補題. For $x, y \in \Omega$, $x = y$ holds

$$\text{iff } (x \rightarrow y) = \text{true} \text{ and } (y \rightarrow x) = \text{true}.$$

注意 2値 true 及び false と、恒等関数 true 及び false を区別するために、前者を ON 及 OFF と呼ぶことがある。

注意 式 $f(x, y)$ が常時 true であるとき、 $f(x, y) = \text{true}$ と書く代りに単に $f(x, y)$ と書くことがある。また、公式の「for $\forall x \forall y \in \Omega$ 」という但し書きを省略することもある。この約束に従えば例えば上の補題は次のように書ける。

$$x = y \text{ iff } x \rightarrow y \text{ and } y \rightarrow x.$$

約束. 演算の優先順位について次の約束をする。 Ω 上で定義される (ブール演算子以外の) 演算子はすべて、 $\vee$ (OR) 及び $\wedge$ (AND) よりも演算の優先順位が高い、とする。

§3. 演算子 H に関する公理系.

終止条件 $x \wedge y \text{ ON}$ 、維持条件 $y \text{ ON}$ であるような自己保持回路を、演算子 H を用いて xHy と書くことにする。これを記号論理式で与えると —

定義 $(xHy)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \exists s (s \leq t \wedge x(t) \wedge y(t) \wedge \forall r (s \leq r \leq t \rightarrow y(r)))$

定義 $xHyHz \stackrel{\text{def}}{=} (xHy)Hz$.

$\neg HxHyHz \stackrel{\text{def}}{=} (\neg HxHy)Hz$ etc.

結合律は成立しない。 $xHyHz \text{ ON}$ のとき「現在 x である、その前は y だった、更にその前は x だった」の意味となる。 xHy に対する上の記号論理的定義から、以下の9つの基本命題 $A1 \sim A9$ が証明できる。

 H の公理系

A1. If $x_1 \rightarrow x_2$ and $y_1 \rightarrow y_2$ Then $x_1Hy_1 \rightarrow x_2Hy_2$.

A2. $xHy \rightarrow y$.

A3. $x \wedge y \rightarrow xHy$.

A4. $\text{false} Hx = \text{false}$.

A5. $xHy = (x \wedge y)Hy$.

A6. $(x \vee y)Hz = xHz \vee yHz$.

A7. $xH(yHz) = (yHz \wedge x)Hz$.

A8. $uHv \wedge xHy = (uHv \wedge x)H(v \wedge y) \vee (xHy \wedge u)H(v \wedge y)$.

A9. $xHy = xH(y \wedge \bar{z}) \vee (xHy \wedge \bar{z})Hy$.

この9つの命題は、 xHy の定義を前提にすれば互から証明される定理であるが、この9つを公理であると設定すれば、 xHy の記号論理式はこれら公理に対するひとつのモデルだということになる。以下、後者の見方をとる。これを公理系 $A1 \sim A9$ に対する自己保持回路モデルと呼ぶ。この公理系を用いて簡単な公式を証明してみよう。

定理 の中等律. $xHx = x$. $xHxHx = x$, etc.

$$2) \text{true} H x = x. \quad 3) x H \text{false} = \text{false}.$$

$$4) x H \text{false} H y = \text{false}.$$

$$5) x H y H y = x H y. \quad 6) y H x H y = x H y.$$

$$7) x H y \wedge x = x \wedge y.$$

$$8) (x \wedge z) H (y \wedge z) = x H (y \wedge z).$$

$$9) x H y \wedge z = x H y H (y \wedge z).$$

証. たとえば (1). $x = x \wedge x \rightarrow x H x$ by A3.

$x H x \rightarrow x$ by A2. 補題によって $x H x = x$.

(5). A7 で x を true に等しく置くと、

$$\text{true} H (y H z) = (y H z \wedge \text{true}) H z.$$

$$\therefore y H z = (y H z) H z \quad \text{by using (2).}$$

他も公理の機械的適用によって証明できる。

§4. 分配律.

色々な演算子を導入する毎にそれに関する分配律を証明す

ることが出来る。ここではその基本となる H の分配律を言う。

定理. 1) $(x \vee y)Hz = xHz \vee yHz$ --- A6.

$$2) xH(y \wedge z) = xHy \wedge xHz.$$

$$3) (x \wedge y)Hz \rightarrow xHz \wedge yHz. \quad \text{逆は不成立.}$$

$$4) xHy \vee xHz \rightarrow xH(y \vee z). \quad \text{逆は不成立.}$$

証. (2) を証明しよう。A8 を使う。

$$\begin{aligned} xHy \wedge xHz &= (xHy \wedge x)H(y \wedge z) \vee (xHz \wedge x)H(y \wedge z) \\ &= (x \wedge y)H(y \wedge z) \vee (x \wedge z)H(y \wedge z) \\ &= xH(y \wedge z) \vee xH(y \wedge z) = xH(y \wedge z). \end{aligned}$$

§5. 直列化公式.

公理 A8 の如く、AND で結ばれた左辺を、時間的順序について場合分けをして右辺で表わした公式を、直列化公式と呼ぼう。A8 は (2, 2) 変数の直列化公式である。

定理 1) (3, 2) 変数の直列化公式:

$$\begin{aligned} uHvHw \wedge xHy &= (uHvHw \wedge x)H(v \wedge y) \\ &\vee (uHv \wedge x)H(v \wedge y)H(w \wedge y) \vee (u \wedge xHy)H(v \wedge y)H(w \wedge y). \end{aligned}$$

2) (3, 3) 変数の直列化公式:

$$uHvHw \wedge xHyHz = \text{計 6 項の和 (省略).}$$

3) (4, 2) 変数の直列化 --- 計 4 項の和.

4) (2, 2, 2) 変数の直列化 --- 計 8 項の和.

など任意の種を和の形に直すことが出来る。

証. (1) $uHvHw \wedge xHy = (uHv)Hw \wedge xHy$

として直列化公理 A8 を適用すれば証明できる。他も同様
直列化公式を利用して証明される公式をいくつか挙げる。

定理 1) $xHy \rightarrow \overline{yH\bar{x}}$

2) $xHy \wedge \overline{yHz} \rightarrow xHz$.

3) $xHyHz \wedge zHyHx = yH(x \wedge z)$.

4) $xHyHz \wedge yHxHz = (x \wedge y)Hz$.

5) $xHuHy \wedge xHvHz \wedge \overline{xHy} \rightarrow xH(u \wedge v)Hy$.

証. (1) A8 によって

$$xHy \wedge \overline{yH\bar{x}} = (xHy \wedge \overline{y})H(y \wedge \bar{x}) \vee (\overline{yH\bar{x}} \wedge x)H(\bar{x} \wedge y) *$$

$xHy \rightarrow y$ だから $xHy \wedge \overline{y} = \text{false}$. 同様に $\overline{yH\bar{x}} \wedge x = \text{false}$.

故に、 $*$ = $\text{false}H(y \wedge \bar{x}) \vee \text{false}H(\bar{x} \wedge y)$

= false , by A4. 故に (1) が導かれる。

(2) も同様. (3) ~ (5) は左辺に (3, 3) 変数の直列化公式を適用すれば証明できる。

§6. 単項演算子 E 及び A と、様相論理の演算子 $\Diamond$ 及び $\Box$

定義. $Ex \stackrel{\text{def}}{=} xH\text{true}$ (記憶回路 (モデルの意味) ... x が ON になったことがある.)
 $Ax \stackrel{\text{def}}{=} \overline{xH\text{true}}$... 今までは x が ON であった.

定理 $A = \neg E \neg$, $E = \neg A \neg$,

$Ax \rightarrow x$, $x \rightarrow Ex$, $Ax \rightarrow Ex$,

$AA = A$, $EE = E$ などの公式が成り立つ。

証明は略す。なおこの結果は、Modal Logic の $\Diamond$ 及び $\Box$ の公式と比較すべきである。 $\Diamond x =$ 「 x であることは可能である。」
 $\Box x =$ 「 x であることは必然である。」

定理 E と A に関する双対原理がなりたつ。つまり、

$E \leftrightarrow A, \quad V \leftrightarrow \wedge, \quad \text{true} \leftrightarrow \text{false}$ という入れ替えをした等式も成り立つ。

定理 分配則も成り立つ。

$$E(x \wedge y) \rightarrow Ex \wedge Ey, \quad A(x \vee Ay) \rightarrow A(x \vee y),$$

$$E(x \vee y) = Ex \vee Ey, \quad A(x \wedge y) = Ax \wedge Ay.$$

定理 直列化公式: $Ex \wedge Ey = E(Ex \wedge y) \vee E(x \wedge Ey)$.

定理 1) $xHy \rightarrow Ex$ 2) $Ex \wedge Ay \rightarrow E(x \wedge Ay)$.

証. (2) を証明する。公理 $A9$ を使うのがミソである。

$$Ex = xH\text{true} \quad [A9 \text{ で } x \text{ を } Ax \text{ と置く}]$$

$$= xH(\text{true} \wedge Ay) \vee (xH\text{true} \wedge \overline{Ay})H\text{true} \quad *$$

$$* \text{ の 1 項} = (x \wedge Ay)H(Ay) \rightarrow E(x \wedge Ay).$$

$$* \text{ の 2 項} = (xH\text{true} \wedge E\overline{y})H\text{true} \rightarrow E\overline{y}$$

$$\therefore (xH\text{true} \wedge \overline{Ay})H\text{true} \wedge Ay \rightarrow E\overline{y} \wedge Ay = \text{false}.$$

$$\text{故に } Ex \wedge Ay \rightarrow E(x \wedge Ay) \quad \blacksquare$$

定理 1) $EAx \rightarrow AE x$, 但、逆は成立せず。 $EA \neq AE$.

2) $AEA = EA$. 3) 双対 $EAE = AE$ も成り立つ。

従ってまた、 $EAEA = EA$, $AEAE = AE$ である。

3) E と A からなる長さ 1 以上のシーケンスは、

E, A, EA, AE の 4 つだけである。

証明は略すが、①は $EAx \wedge EAx = \text{false}$ を直列化公式によって言うのがポイントである。

§ 7. 保存定理

Conservation Theorem (CT と略)

ある種の形をした一群の
公式を扱う。ある条件^Cのもと

Forward {Weak, Strong}
Backward {Weak, Strong}

とである性質^Pが保存されるという意味のものである。前向き
のものとは後向き^Cのものとがある。前向き^Cのものはある性質が
一旦成り立てばある条件下で以後も成り立つというもの。後
向き^Cのものは、ある性質が現在成り立っているなら、ある
条件下で過去にさかのぼっても成り立っていた筈だ、という
ものである。

1) Weak Forward CT. $pHc \rightarrow p$ という形のもの。

2) Strong Forward CT. $pHc = p$ " p は fixed point.

3) Weak Backward CT. $sHc \wedge p \rightarrow (s \wedge p)Hc$ という形

4) Strong Backward CT. $sHc \wedge p = (s \wedge p)H(c \wedge p)$ "

定理 Forward Conservation の例.

1) $(xHy)Hy = (xHy)$,

2) $(Ex)H\text{true} = Ex$, $(Ex)Hy \rightarrow Ex$,

3) $(Ax)Hx = (Ax)$,

$$4) \overline{(xHy)} H \overline{(x \wedge y)} = \overline{(xHy)}$$

(4)は自己保持回路モデルでは、「発火条件の $x \wedge y$ が OFF という条件は xHy OFF という性質を前向きに強保存する」という意味である。証明は略する。

Backward Conservation の一例をあげる。

$$\text{定理 } uHv \wedge Ax = (u \wedge Ax) H (v \wedge Ax).$$

自己保持回路モデルでは Ax は「今までずっと x ON であった」ことを意味する。現在 Ax が成立するなら過去のすべての時点で Ax であった事である。上の定理はそういう自明のことを述べている。証明は Aq を用いるのがポイントである。保存定理に関連していくつかの演算子を導入しその性質を述べよう。証明はすべて省略する。

定義 xPy <sup>自己保持回路
モデルにおける</sup> 意味: 「 x は y より早く始まった」

$$xPy \stackrel{\text{def}}{=} x \wedge y \wedge \neg Hx.$$

$$\text{定理 } 1) \text{推移律. } xPy \wedge yPz \rightarrow xPz.$$

$$2) \text{Forward Conservation. } (xPy) H (x \wedge y) = xPy.$$

$$3) \text{Backward Conservation.}$$

$$uH(x \wedge y) \wedge xPy = (u \wedge xPy) H (x \wedge y \wedge xPy).$$

$$\text{定義. } xSy \stackrel{\text{def}}{=} x \wedge y \wedge \neg (xPy) \wedge \neg (yPx).$$

モデルでの意味: 「 x と y は同時に始まった」

$$\text{定理 } 1) \text{推移律. } xSy \wedge ySz \rightarrow xSz.$$

2) 結合律 $xS(ySz) = (xSy)Sz.$

3) Forward Conservation. $(xSy)H(x \wedge y) = xSy.$

4) Backward Conservation.

$$uH(x \wedge y) \wedge xSy = (u \wedge xSy)H(x \wedge y \wedge xSy).$$

定義 単項演算 Fx . モデルでの意味: 「 x は始めて ON_{t_0, t_1} 」

$$Fx \stackrel{\text{def}}{=} x \wedge \neg (xH \text{ true } H \neg H \text{ true } H x)$$

定理 1) 射影演算子 $FF = F.$

2) Forward Conservation $(Fx)Hx = Fx.$

3) Backward Conservation $(u \wedge x)Hv \wedge Fx = (u \wedge Fx)H(v \wedge Fx)$

次に色々な保存定理の間の関係を示す定理を証明なしで言う。

定理. $pHc = p$ iff $pHc \rightarrow p$ and $p \rightarrow c.$

定理. 次の3つの条件は同値である。1) $pHc \rightarrow p.$

2) $(pHc \wedge \bar{p})Hc = \text{false}$ 3) $pHc = pH(c \wedge p).$

定理. $sHc \wedge p \rightarrow (s \wedge p)Hc$ --- Weak Backward

且つ $pHc \rightarrow p$ であるなら, --- Weak Forward

$sHc \wedge p = (s \wedge p)H(c \wedge p)$ である。 --- Strong Backward.

定理. $\bar{p}Hc \rightarrow \bar{p}$ ならば --- $\bar{p}$ の Weak Forward

$sHc \wedge p = (s \wedge p)H(c \wedge p)$ である。 --- p の Strong Backward.

定理 $sHc \wedge p = (s \wedge p)H(c \wedge p)$ ならば --- Strong Backward

$sHc \wedge p \rightarrow (s \wedge p)Hc$ である。 --- Weak Backward.

定理. もし $p_1Hc \rightarrow p_1$ 且つ $p_2Hc \rightarrow p_2$ ならば,

$$(P_1 \wedge P_2) H C \rightarrow P_1 \wedge P_2, \quad (P_1 \vee P_2) H C \rightarrow P_1 \vee P_2.$$

2) もし $P H C_1 \rightarrow P$ 且つ $P H C_2 \rightarrow P$ ならば

$$P H (C_1 \wedge C_2) \rightarrow P.$$

3) もし $P_1 H C_1 \rightarrow P_1$ 且つ $P_2 H C_2 \rightarrow P_2$ ならば

$$(P_1 \wedge P_2) H (C_1 \wedge C_2) \rightarrow P_1 \wedge P_2$$

$$(P_1 \vee P_2) H (C_1 \wedge C_2) \rightarrow P_1 \vee P_2.$$

強保存についても同様な公式が成立する。

§ 8. H の双対演算子 I .

定義: $x I y \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x H y}$. 従って $x H y = \overline{x I y}$.

定理. 双対原理が成り立つ。つまり、

$$H \leftrightarrow I, \quad \wedge \leftrightarrow V, \quad \text{true} \leftrightarrow \text{false}$$

という入れ替えを行った等式も成立する。

§ 9. H に関する公理系の無矛盾性・完全性・独立性

(i) 無矛盾性。公理系が無矛盾であることを言うには、何でもよい一つの式がその公理系から出て来ないことを言えばよい。

言うまでもなく矛盾した公理系からはすべての命題が導けるからである。我々の公理系 $A1 \sim A9$ からは例えば交換則

「 $x H y = y H x$ 」が導けない。証明は、公理系のモデルで

この式が成り立たないものが存在することを示せばよいが、自己保持回路モデルがそれであることは明らかである。

定理 公理系 $A1 \sim A9$ は無矛盾である。

(iii) 完全性 — 未解決。公理系 $A1 \sim A9$ のモデルは唯一ではない。

たとえば xHy として $x \wedge y$ をとるとすべての公理を満たす。

しかし xHy は交換則という公理系から導けない公式を満たす。

完全性を次のように定義する。H とゴール演算子からなる式

$$f(x, y, \dots, \wedge, \vee, \neg, H) = g(x, y, \dots, \wedge, \vee, \neg, H)$$

の集合を考える。 xHy として自己保持回路モデルを取るときに成立する皆のすべての等式が、H に属する公理系から導

かれるとき、その公理系は完全である、と呼びこことにする。

我々の公理系 $A1 \sim A9$ がこの意味で完全であるか否か —

これは未解決である。また独立性も open problem である。

§10. H 式の表現能力の限界。

xHy の flip-flop にあたるものだからこれで何でも作

れる筈だと思ふのは誤りである。infix operator という制限

をもっている。その制限を最もよく示すのが次の定理である。

補題. { Boolean constants : true & false

Boolean variable x .
operator $\wedge, \vee, \neg, H$

によって作られる式の値は、 x が十分多い回数だけ値を変え

たとえ究極的に (ultimately)、時間関数

true, x は false, x は x , x は $\neg x$

の値に一致するに到る。(証明は帰納法による。)

定理. H の式で counter を作ることはできない。

式の表現能力を増やしたいと思うなら、別種の演算子、
例えば $C_2 x$: 時間 $t \geq 0$ で x が ON になった t 回数を

mod 2 で数える単項演算

を導入すればよからう。本稿はこの問題には立ち入らない。

§11. 将来の経過を表わす演算子 $\tilde{H}$

xHy は過去の経過を表わす。反対に、将来の経過を表わす演算子 $\tilde{H}$ を考えよう。但、 $\tilde{H}$ は H から induce されるものではなく、全く別種の演算子である。 $\tilde{H}$ はもはや physical device には対応しない。 $x\tilde{H}y$ を次式で定義する。

定義 $(x\tilde{H}y)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \exists s (t \leq s \wedge x(s) \wedge y(s) \wedge \forall r (t \leq r \leq s \rightarrow x(r)))$
 xHy と $x\tilde{H}y$ とは完全に時間軸上での関係を左右逆にしたものである。 $\tilde{H}$ に関しては、 H に関する式を 左右対称にしたものが成り立つ。

$$\text{定義 } x\tilde{H}y\tilde{H}z \stackrel{\text{def}}{=} x\tilde{H}(y\tilde{H}z).$$

$$w\tilde{H}x\tilde{H}y\tilde{H}z \stackrel{\text{def}}{=} w\tilde{H}(x\tilde{H}y\tilde{H}z), \text{ etc.}$$

$\tilde{H}$ に関する公理系

$$\tilde{A}1. \text{ If } x_1 \rightarrow x_2 \text{ and } y_1 \rightarrow y_2 \text{ then } x_1\tilde{H}y_1 \rightarrow x_2\tilde{H}y_2.$$

$$\tilde{A}2. x\tilde{H}y \rightarrow x.$$

$$\tilde{A}3. x \wedge y \rightarrow x\tilde{H}y.$$

$$\tilde{A}4. x\tilde{H}\text{false} = \text{false}$$

$$\tilde{A}5. x\tilde{H}y = x\tilde{H}(x \wedge y)$$

$$\tilde{A}6. x\tilde{H}(y \vee z) = x\tilde{H}y \vee x\tilde{H}z.$$

$$\tilde{A}7. (x\tilde{H}y)\tilde{H}z = x\tilde{H}(x\tilde{H}y \wedge z)$$

$$\tilde{A}8. u\tilde{H}v \wedge x\tilde{H}y = (u \wedge x)\tilde{H}(u\tilde{H}v \wedge x) \vee (u \wedge x)\tilde{H}(x\tilde{H}y \wedge v)$$

$$\tilde{A}9. x\tilde{H}y = (x \wedge z)\tilde{H}y \vee x\tilde{H}(x\tilde{H}y \wedge z).$$

次に H と $\tilde{H}$ を共に含む式を变形してゆくために必要な公理

$A\tilde{A}1, A\tilde{A}2$ を述べる。

定義 $xHy\tilde{H}z \stackrel{def}{=} xHy \wedge y\tilde{H}z.$

補題 $(w \wedge xHy)\tilde{H}z = w \wedge xHy \wedge (w \wedge y)\tilde{H}z.$

$$A\tilde{A}1. (s \wedge u\tilde{H}v)Hw = (sH(u \wedge w) \wedge v)Hw \vee sH(u \wedge w) \wedge u\tilde{H}v.$$

$$A\tilde{A}2. u\tilde{H}(s \wedge vHw) = u\tilde{H}(v \wedge (u \wedge w)\tilde{H}s) \vee vHw \wedge (u \wedge w)\tilde{H}s.$$

この2つの公理によつて例えば次式のような場合分け公式が証明できる。なお上の2の公理で「十分」か否かは未解決である。

$$u\tilde{H}(vHwHx) = vHwHx \wedge u \vee vHw \wedge (u \wedge w)\tilde{H}x \\ \vee u\tilde{H}(v \wedge u)\tilde{H}(w \wedge u)\tilde{H}x.$$

§12. 結語.

本稿は人間の持っている時間に関する直観のごく一部を形式化したものである。筆者は今後は空間認識を研究したい。

参考文献.

1. 杉原文夫「時間の論理」早稲田大学出版部.
2. 内田種臣「様相の論理」 “ ”
3. H. Takahashi, "An Automatic-Controller Description Language." IEEE Trans. Software Eng. Jan. 1980.