

超幾何関数における stratification、外積構造、漸近挙動、接続係数

熊本大学理学部 原岡喜重 (Yoshishige Haraoka)
Department of Mathematics, Kumamoto University

I. M. Gel'fand らにより定式化された Grassmann 多様体上の超幾何関数は、青本和彦らにより研究されていた局所係数の homology、cohomology 理論をいわば射影化・普遍化したもので、その枠組みにより超幾何関数たちのなす集合に多くの自然な構造が入ることが発見されてきた。さらに、合流型の超幾何関数とその延長上に自然に現れ、それらは既知の重要な合流型超幾何関数を含む大きな族をなし、そこには豊かな構造が入ることも分かっている。今、その構造を生かして個々の（合流型）超幾何関数の性質を研究する時期が来ていると考える。

一つの大きな目標は、合流型超幾何関数の大域挙動・漸近挙動を、統一的に記述することである。合流型超幾何関数は、一般には指数関数を含む被積分関数の多重積分で与えられ、そういった積分の解析に関しては振動積分論・特異点理論など多くの研究がある。それに対して「構造を生かした」解析は、合流操作などにより漸近挙動や接続係数を記述することを想定しており、新しいアプローチを与えられると思われる。今回はその第一歩として、非合流型（確定特異点型）超幾何関数の大域挙動を調べる試みを述べることにする。

§1. (k, n) 型超幾何関数の外積構造 Grassmann 多様体上の超幾何関数は、 $k < n$ なる自然数の組を用いて (k, n) 型超幾何関数と呼ばれる。それは厳密にはある線形 holonomic 系の解として定義されるが、積分表示を持つので、ここでは積分表示を与えることで紹介したい。

次のものを用意する。

$$z = \begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & \cdots & z_{0\,n-1} \\ z_{10} & z_{11} & \cdots & z_{1\,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{k-1\,0} & z_{k-1\,1} & \cdots & z_{k-1\,n-1} \end{pmatrix} \in M(k, n; \mathbb{C}),$$

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \quad \text{with} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = -k.$$

z の第 i 列を z_i で表す：

$$z = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}), \quad z_i = \begin{pmatrix} z_{0i} \\ z_{1i} \\ \vdots \\ z_{k-1\,i} \end{pmatrix}.$$

各 i に対し z_i を係数に持つ $t = (t_1, t_2, \dots, t_{k-1})$ の 1 次式を $\ell_i(t)$ とおく：

$$\ell_i(t) = z_{0i} + t_1 z_{1i} + t_2 z_{2i} + \cdots + t_{k-1} z_{k-1\,i}.$$

このとき (k, n) 型超幾何関数は、積分

$$\varphi(z) = \int_{\Delta} \prod_{i=0}^{n-1} \ell_i(t)^{\alpha_i} dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1}$$

で与えられる。ここに Δ は多価関数 $\prod_{i=0}^{n-1} \ell_i(t)^{\alpha_i}$ に対応する twisted $(k-1)$ -cycle であり、 $z \in M(k, n; \mathbf{R})$ の場合は $\mathbf{R}^{k-1}$ 内の超平面 $\ell_i(t) = 0$ たちで限られる chamber に取れる。
 $\varphi(z)$ は regular holonomic 系を満たし、その singular locus は

$$\det(z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k}) = 0 \quad (i_1 < i_2 < \cdots < i_k),$$

その階数は $\binom{n-2}{k-1}$ であることが知られている。

Grassmann 多様体上の超幾何関数の集合には様々な構造が入ることが知られているが、そのうちの一つである外積構造を説明する。写像

$$\iota: M(2, n) \rightarrow M(k, n)$$

$$z = \begin{pmatrix} \cdots & z_{0i} & \cdots \\ \cdots & z_{1i} & \cdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cdots & (z_{0i})^{k-1} & \cdots \\ \cdots & (z_{0i})^{k-2} z_{1i} & \cdots \\ \cdots & (z_{0i})^{k-3} (z_{1i})^2 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & z_{0i} (z_{1i})^{k-2} & \cdots \\ \cdots & (z_{1i})^{k-1} & \cdots \end{pmatrix}$$

を Veronese 写像という。Veronese 写像による像は、 $M(k, n)$ の中で非常に薄い集合をなす。 $z \in M(2, n)$ の像 $\iota(z)$ を係数に持つ 1 次式を考える。すなわち、 $0 \leq i \leq n-1$ に対し、

$$\begin{aligned} \bar{\ell}_i(t) &= (1, t_1, t_2, \dots, t_{k-1})(\iota(z))_i \\ &= (z_{0i})^{k-1} + t_1 (z_{0i})^{k-2} z_{1i} + t_2 (z_{0i})^{k-2} (z_{1i})^2 + \cdots + t_{k-1} (z_{1i})^{k-1} \end{aligned}$$

とおく。このとき、次が成立する。

定理 ([Ter])

$$\int_{D_P} \prod_{i=0}^{n-1} \bar{\ell}_i(t)^{\alpha_i} dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = \det \left(\int_{I_{P_\mu}} \prod_{i=0}^{n-1} (z_{0i} + s z_{1i})^{\alpha_i} s^{\nu-1} ds \right)_{1 \leq \mu, \nu \leq k-1}.$$

定理に現れる twisted cycles D_P 、 I_{P_μ} らはあるルールに則って決まるものだが、ここでは説明を省く。この定理は、1 次式たちの決める超平面配置が Veronese 像になるという特別な場合には、多重積分で与えられる超幾何関数が単積分で与えられる超幾何関数たちを用いて記述されるということを語っている。多重積分の解析は幾何学的にも難しいので、それが

単積分で記述できるというこの定理はある場合には非常に有用で、たとえば [MSTY] では monodromy 表現を計算するのに利用している。

我々は、 (k, n) 型超幾何関数の大域挙動を調べようと思う。 (k, n) 型超幾何関数は regular holonomic 系の解となることから、そのためには各特異集合の近くで特徴的な漸近挙動をする解 (exponent を持つ解) を特定し、そういった解を別の特異集合の近くへ解析接続していったとき、その別な特異集合の近くで既に特定されている解たちとの間に成り立つ線形関係を求めればよい。すなわち接続問題を解くことになる。そして接続問題は、解析接続の道をどの様に記述するか、という大きな問題を除けば、積分表示があることにより、特徴的な漸近挙動をする解を与える twisted cycle を特定しさえすれば、twisted homology 群の演算の問題に帰着することが分かる。そこで我々は、そのような twisted cycle と漸近挙動の関係を記述することを目標にする。

§2. $(2, n)$ 型超幾何関数の漸近挙動 目論見としては、外積構造を利用して多重積分で定義される超幾何関数の挙動を、単積分で定義される超幾何関数すなわち $(2, n)$ 型超幾何関数に帰着させて調べようと思う。そのため $(2, n)$ 型超幾何関数の挙動について調べていこう。

いま

$$z = \begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & \cdots & z_{0n-1} \\ z_{10} & z_{11} & \cdots & z_{1n-1} \end{pmatrix} \in M(2, n; \mathbb{C}),$$

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = -2$$

をとり、各 i について

$$\zeta_i = -\frac{z_{0i}}{z_{1i}}$$

とおくと、 $(2, n)$ 型超幾何関数は次のように書き表せる。

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \int_{\Delta} \prod_{i=0}^{n-1} (z_{0i} + tz_{1i})^{\alpha_i} dt \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} z_{1i}^{\alpha_i} \int_{\Delta} \prod_{i=0}^{n-1} (t - \zeta_i)^{\alpha_i} dt. \end{aligned}$$

twisted cycle Δ は、二つの ζ_i, ζ_j を結ぶ道で与えられる。 ζ_i たちの配置は、複素平面内で次のようになっているとしよう。

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & & \circ & \circ \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \cdots & \zeta_{n-1} & \zeta_n =: \zeta_n \end{array}$$

図 1

ここで $\zeta_0 =: \zeta_n$ とおいた。 $i \neq j$ に対し

$$[ij] := \det \begin{pmatrix} z_{0i} & z_{0j} \\ z_{1i} & z_{1j} \end{pmatrix}$$

とおくと、holonomic 系の singular locus は $[ij] = 0$ ($i \neq j$) で与えられる。
いま singular locus $[12] = 0$ における挙動を調べることにする。

$$\varphi_{ij}(z) := \int_{\zeta_i}^{\zeta_j} \prod_{k=0}^{n-1} (z_{0k} + tz_{1k})^{\alpha_k} dt$$

とおこう。まず $\varphi_{12}(z)$ を調べてみる。 $\zeta_1 \rightarrow 0$ 、 $\zeta_2 \rightarrow 1$ となる affine 変換

$$\tau = \frac{t - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}$$

により、

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(z) &= \prod_{i=0}^{n-1} z_{1i}^{\alpha_i} (-1)^{\alpha_1+1} (\zeta_1 - \zeta_2)^{\alpha_1+\alpha_2+1} \prod_{i \neq 1,2} (\zeta_1 - \zeta_i)^{\alpha_i} \\ &\quad \times \int_0^1 \tau^{\alpha_1} (1-\tau)^{\alpha_2} \prod_{i \neq 1,2} \left(1 - \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_i} \tau\right)^{\alpha_i} d\tau \\ &= \left(-\frac{z_{11}}{z_{12}}\right)^{\alpha_1+1} \prod_{i \neq 1,2} [i1]^{\alpha_i} \cdot [21]^{\alpha_1+\alpha_2+1} \\ &\quad \times \int_0^1 \tau^{\alpha_1} (1-\tau)^{\alpha_2} \prod_{i \neq 1,2} \left(1 - \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_i} \tau\right)^{\alpha_i} d\tau \end{aligned}$$

となる。

$$\mu(z) := \left(-\frac{z_{11}}{z_{12}}\right)^{\alpha_1+1} \prod_{i \neq 1,2} [i1]^{\alpha_i}$$

とおけば、 $[12] \rightarrow 0$ のとき $\zeta_1 - \zeta_2 \rightarrow 0$ となることから $\varphi_{12}(z)$ が

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(z) &\sim [21]^{\alpha_1+\alpha_2+1} \mu(z) \int_0^1 \tau^{\alpha_1} (1-\tau)^{\alpha_2} d\tau \\ &= [21]^{\alpha_1+\alpha_2+1} \mu(z) B(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1) \end{aligned}$$

という挙動をする exponent を持つ解であることが分かる。さらに特徴的なことは、この挙動に現れる Beta 関数 $B(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1)$ は、 $(2, 3)$ 型超幾何関数と見なすことができるということである。 $(2, n)$ 型超幾何関数を与える n 個の 1 次式のうち $n-2$ 個が $\zeta_1 - \zeta_2 \rightarrow 0$ により消えたことで $(2, 3)$ 型超幾何関数が現れてきたのである。

$(2, n)$ 型超幾何関数を与える holonomic 系の階数は $n-2$ であるので、あと $n-3$ 個の解を持ってこない基本解系が構成できない。それら $n-3$ 個は、 $[12] = 0$ において正則な

関数に取れることが、次のようにして分かる。 $\varphi_{12}(z)$ に対して行った計算を、 ζ_1 の代わりに ζ_i を、 ζ_2 の代わりに ζ_{i-1} を充ててなぞると、

$$\varphi_{ii-1}(z) = \left(-\frac{z_{1i}}{z_{1i-1}} \right)^{\alpha_i+1} \prod_{j \neq i-1, i} [ji]^{\alpha_j} \cdot [i-1, i]^{\alpha_{i-1}+\alpha_i+1} \\ \times \int_0^1 \tau^{\alpha_i} (1-\tau)^{\alpha_{i-1}} \prod_{j \neq i-1, i} \left(1 - \frac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{\zeta_i - \zeta_j} \tau \right)^{\alpha_j} d\tau$$

となることが分かる。いま $i \geq 4$ とすると、積分の前にかかる factor は $[12] = 0$ で正則であり、さらに ζ_k たちの配置が図 1 よりさらに詳しく

$$(2.1) \quad |\zeta_1 - \zeta_2| < |\zeta_2 - \zeta_3| < |\zeta_3 - \zeta_4| < \cdots$$



図 2

となっていたとすると、

$$\left| \frac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{\zeta_i - \zeta_j} \right| < 1 \quad j \neq i, i-1$$

となるので、積分の中の

$$\left(1 - \frac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{\zeta_i - \zeta_j} \tau \right)^{\alpha_j}$$

も $[12] = 0$ で正則。したがって $\varphi_{ii-1}(z)$ は $[12] = 0$ で正則になる。こうして $[12] = 0$ で正則な $\varphi_{43}(z)$, $\varphi_{54}(z)$, ..., $\varphi_{nn-1}(z)$ という $n-3$ 個の解が見つかり、これらが線形独立であることが分かるので、先の $\varphi_{12}(z)$ と合わせて、 $[12] = 0$ における特徴的な挙動をするメンバーによる基本解系が構成できた。 $\varphi_{43}(z)$, ... が正則であることを言うために、 ζ_j たちの配置を (2.1) のように仮定したが、(2.1) は open な条件であり、holonomick 系の singular locus $[ij] = 0$ に抵触せずにはずすことができるので、(2.1) を仮定せずに正則であることが分かる。

$\varphi_{ii-1}(z)$ たちの $[12] \rightarrow 0$ における挙動については、 $[12] \rightarrow 0$ に従って

$$\begin{pmatrix} z_{02} \\ z_{12} \end{pmatrix} \rightarrow c \begin{pmatrix} z_{01} \\ z_{11} \end{pmatrix}$$

となるであろうから (c は定数)、

$$(z_{01} + tz_{11})^{\alpha_1} (z_{02} + tz_{12})^{\alpha_2} \rightarrow c^{\alpha_2} (z_{01} + tz_{11})^{\alpha_1 + \alpha_2}$$

となるので、 $\varphi_{i,i-1}(z)$ を定義する 1 次式が一つ減り、 $(2, n-1)$ 型超幾何関数により記述されることが分かる。

以上をまとめておこう。

Proposition 2.1. $[12] \rightarrow 0$ において、

$$\begin{aligned}\varphi_{12}(z) &\sim [12]^{\alpha_1+\alpha_2+1} \mu(z) \cdot ((2, 3) \text{ 型超幾何関数}), \\ \varphi_{i,i-1}(z) &\sim ((2, n-1) \text{ 型超幾何関数}), \quad (4 \leq i \leq n)\end{aligned}$$

という挙動をする基本解系が取れる。

ところで $[12] \rightarrow 0$ においてたとえば $\varphi_{23}(z)$ がどんな振る舞いをするかを知りたいければ、Cauchy の積分定理による

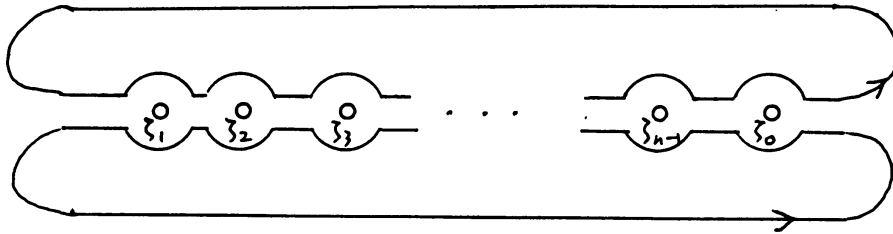


図 3

すなわち図 3 の道に沿った積分が消えることから得られる 1 次関係式と Proposition 2.1 を組み合わせるとよい。 $\varphi_{23}(z)$ については、 $[12] = 0$ で exponent を持つ $\varphi_{12}(z)$ と正則な解との線形結合になることが分かる。そして $\varphi_{23}(z)$ は $[23] = 0$ における exponent を持つ解になるので、 ζ_1 と ζ_3 を入れ替えるという z の解析接続により、その $\varphi_{23}(z)$ が $[12] = 0$ における基本解系のどのような 1 次結合で表せるかという接続問題は、twisted cycles の追跡により解明されることになるのである。

§3. $(3, n)$ 型超幾何関数の漸近挙動 多重積分で与えられる超幾何関数の挙動の解析に移ろう。簡単のため $(3, n)$ 型超幾何関数について考えることにする。

$$z = \begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & \cdots & z_{0,n-1} \\ z_{10} & z_{11} & \cdots & z_{1,n-1} \\ z_{20} & z_{21} & \cdots & z_{2,n-1} \end{pmatrix} \in M(3, n; \mathbf{R}),$$

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbf{C}^n, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = -3$$

をとる。多重 cycles を扱うため、 z を実係数にとっていることに注意する。

$$\begin{aligned}\ell_i(t) &= z_{0i} + t_1 z_{1i} + t_2 z_{2i} \quad (0 \leq i \leq n-1) \\ H_i &= \{\ell_i(t) = 0\} \in \mathbf{R}^2\end{aligned}$$

とする。いま H_i たちの配置が図のようになっているとしよう。

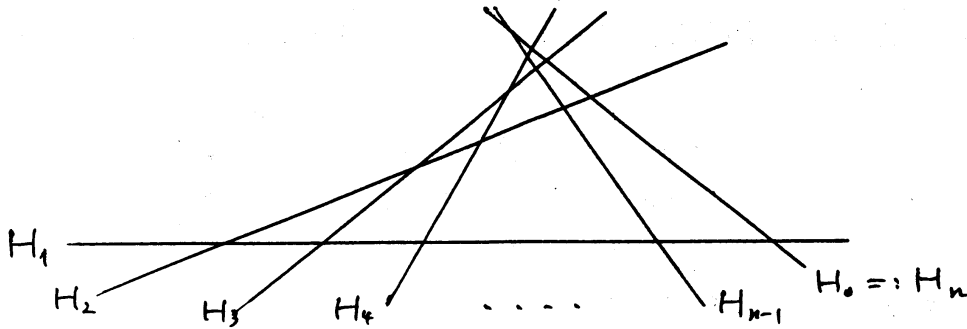


図 4

H_i たちで限られる領域を Δ とするとき、

$$\varphi_{\Delta}(z) = \int_{\Delta} \prod_{i=0}^{n-1} \ell_i^{\alpha_i} dt_1 \wedge dt_2$$

とおく。

$$[ijk] := \det \begin{pmatrix} z_{0i} & z_{0j} & z_{0k} \\ z_{1i} & z_{1j} & z_{1k} \\ z_{2i} & z_{2j} & z_{2k} \end{pmatrix}$$

とおく。holonomic 系の singular locus は $[ijk] = 0$ ($0 \leq i < j < k \leq n-1$) であった。

さて $[123] = 0$ における挙動を調べることにしよう。 H_i, H_j, H_k で限られる cycle を Δ_{ijk} とし、

$$\varphi_{ijk}(z) := \varphi_{\Delta_{ijk}}(z)$$

とする。当初の目論見では外積構造を利用して多重積分を調べようとしていたが、実は generic な singular locus は Veronese 像によっては実現されないことに気がつく。たとえば $[123] = 0$ について考えると、これは generic には 3 本の lines H_1, H_2, H_3 が 1 点で交わる状況に対応している。つまり $[123]$ を定める行列の 3 つの列は線形従属だがあらゆる 2 つの列は線形独立、というのが generic な状況である。しかるに、 $[123] = 0$ を Veronese 像で実現しようとすると、必然的に 2 つの列が線形従属という形でしか実現できない。

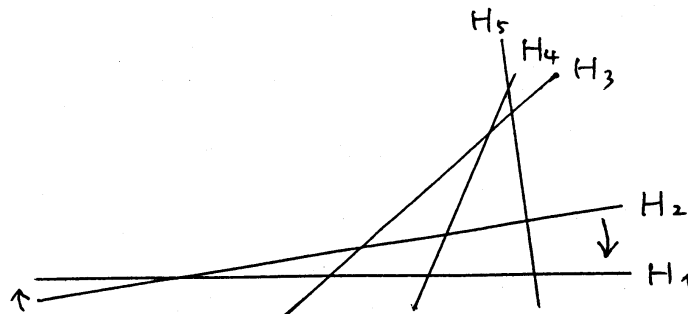


図 5

したがって外積構造のことは一旦忘れて、まじめに多重積分の与える超幾何関数の挙動を見ていくことにする。

まず $\varphi_{123}(z)$ の挙動を調べる。 H_1 を $\tau_2 = 0$ に、 H_2 を $\tau_1 = 0$ に、 H_3 を $\tau_1 + \tau_2 = 1$ に写す affine 変換

$$(1, \tau_1, \tau_2) = (1, t_1, t_2)A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

をほどこすと、

$$\begin{aligned} \varphi_{123}(z) &= \mu(z)[123]^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2} \\ &\times \int_{\Delta_0} \tau_1^{\alpha_2} \tau_2^{\alpha_1} (1 - \tau_1 - \tau_2)^{\alpha_3} \\ &\times \prod_{m \neq 1,2,3} \left(1 - \frac{[123][1m]}{[12m][13]} \tau_1 - \frac{[123][2m]}{[12m][23]} \tau_2 \right)^{\alpha_m} d\tau_1 \wedge d\tau_2 \end{aligned}$$

となる。但し

$$\begin{aligned} [ij] &:= \det \begin{pmatrix} z_{1i} & z_{1j} \\ z_{2i} & z_{2j} \end{pmatrix}, \\ \mu(z) &:= (-1)^{\alpha_2} [12]^{-\alpha_3 - \sum_{m \neq 1,2,3} \alpha_m - 1} [13]^{-\alpha_2 - 1} [23]^{-\alpha_1 - 1} \prod_{m \neq 1,2,3} [12m]^{\alpha_m}, \end{aligned}$$

$$\Delta_0 := \{(\tau_1, \tau_2); 0 \leq \tau_1, 0 \leq \tau_2, \tau_1 + \tau_2 \leq 1\}$$

とおいた。したがって $[123] \rightarrow 0$ においては、

$$\begin{aligned} \varphi_{123}(z) &\sim \mu(z)[123]^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2} \\ &\times \int_{\Delta_0} \tau_1^{\alpha_2} \tau_2^{\alpha_1} (1 - \tau_1 - \tau_2)^{\alpha_3} d\tau_1 \wedge d\tau_2 \end{aligned}$$

という挙動をすることが分かる。右辺の積分は、Beta 関数の拡張であるが、あるいは (3, 4) 型超幾何関数とみなすのが自然であろう。こうして $[123] = 0$ において singular な解が見つかり、その挙動も調べられた。

§2 と同様に、残り階数 -1 個分の $[123] = 0$ において正則な解がとれることがわかる。ここでは、例として $H_0, H_{n-1}, H_{n-3}, H_{n-4}$ で限られる cycle Δ_1 を考えてみよう。

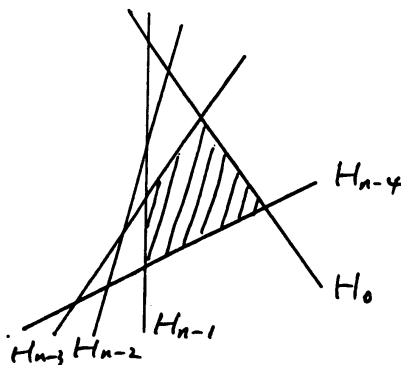


図 6

$$H_0 \rightarrow \{\tau_2 = 0\}, \quad H_{n-1} \rightarrow \{\tau_1 + \tau_2 = 1\}, \quad H_{n-4} \rightarrow \{\tau_1 = 0\}$$

となる affine 変換 $(t_1, t_2) \rightarrow (\tau_1, \tau_2)$ を行くと、 $\varphi_{123}(z)$ に対する計算と同様にして、

$$\begin{aligned} \varphi_{\Delta_1}(z) &= \int_{\Delta_1} \prod_{i=0}^{n-1} \ell_i^{\alpha_i} dt_1 \wedge dt_2 \\ &= \mu_1(z) [0, n-4, n-1]^{\alpha_0 + \alpha_{n-4} + \alpha_{n-1} + 2} \\ &\quad \times \int_{\Delta'_1} \tau_1^{\alpha_{n-4}} \tau_2^{\alpha_0} (1 - \tau_1 - \tau_2)^{\alpha_{n-1}} \\ &\quad \times \prod_{m \neq 0, n-1, n-4} \left(1 - \frac{[0, n-4, n-1][0m]}{[0, n-4, m][0, n-1]} \tau_1 - \frac{[0, n-4, n-1][n-4, m]}{[0, n-4, m][n-4, n-1]} \tau_2 \right)^{\alpha_m} d\tau_1 \wedge d\tau_2 \end{aligned}$$

を得る。ここに Δ'_1 は次の cycle である。

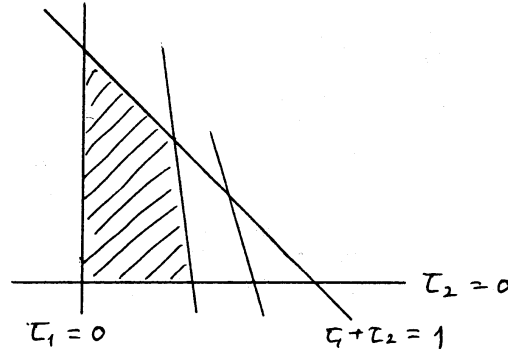


図 7

$\mu_1(z)$ については説明を省くが、

$$\#\{0, n-1, n-4\} \cap \{1, 2, 3\} \leq 1$$

であれば $[123] = 0$ で正則になることは分かる。よってあとは、

$$\omega_m := \frac{[0, n-4, n-1][0m]}{[0, n-4, m][0, n-1]} \tau_1 + \frac{[0, n-4, n-1][n-4, m]}{[0, n-4, m][n-4, n-1]} \tau_2$$

とおくとき、

$$(3.1) \quad |\omega_m| < 1 \quad (m \neq 0, n-1, n-4)$$

を示せば $\varphi_{\Delta_1}(z)$ が $[123] = 0$ で正則になることが分かるのである。さて Δ'_1 は多角形 (四角形) なので、各頂点で (3.1) を示せば十分である。まず頂点 $(\tau_1, \tau_2) = (0, 0)$ については明らかに成立。頂点 $(\tau_1, \tau_2) = (0, 1)$ について考えてみる。この頂点においては、

$$(3.2) \quad \omega_m = \frac{[0, n-4, n-1][n-4, m]}{[0, n-4, m][n-4, n-1]}$$

であるが、この絶対値を評価する必要がある。§2 では点 ζ_i たちの並び方から評価ができたが、いまの場合は lines H_i たちの配置の様子からこれを評価するのはなかなか難しそうである。

そこで、外積構造の話を思い出してみる。正確には、Veronese 写像を利用するのである。いま z が

$$y = \begin{pmatrix} y_{00} & y_{01} & \cdots & y_{0\,n-1} \\ y_{10} & y_{11} & \cdots & y_{1\,n-1} \end{pmatrix} \in M(2, n; \mathbf{R})$$

の Veronese 像に近いとしよう。Veronese 像 $\iota(y)$ そのものであれば、(3.2) の右辺の分母分子に現れる行列式は Vandermonde determinant になるので、 ω_m の値は簡単に計算できるようになる。

$$\eta_i := -\frac{y_{0i}}{y_{1i}}$$

とおくと、結果は

$$\omega_m = \frac{\eta_0 - \eta_{n-1}}{\eta_0 - \eta_m}$$

と簡潔に表せる。したがって η_i たちが

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & & \eta_{n-1} & \eta_n =: \eta_\infty \end{array}$$

図 8

というように配置されているとすると、 $m \neq 0, n-1, n-4$ に対して $|\omega_m| < 1$ が成り立つことが分かる。(3.1) は open な条件なので、 z が Veronese 像 $\iota(y)$ そのものでなくても十分それに近ければ、やはり成立する。

残り二つの頂点での評価を行う。

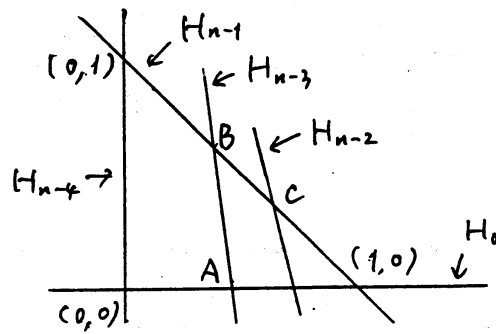


図 9

頂点 A の座標は

$$\left(-\frac{[0, n-1][n-4, 0, n-3]}{[0, n-4, n-1][0, n-3]}, 0 \right)$$

である。これを ω_m の定義に代入し、 z が Veronese 像 $\iota(y)$ に近いということで計算すると、

$$\omega_m \approx \frac{\eta_{n-4} - \eta_{n-3}}{\eta_{n-4} - \eta_m}$$

となり、 η_i たちの配置 (図 8) によって $|\omega_m| < 1$ が実現できることが分かる。最後に頂点 B での評価を考える。次のような工夫が必要であろう。まず $m = n-3$ のときは、 B において $\omega_{n-3} = 1$ となることに注意する。次に $m = n-2$ のときは、頂点 C において $\omega_{n-2} = 1$ となり、また頂点 $(0, 1)$ では $m = n-2$ に対しても $|\omega_m| < 1$ が成り立っていたので、その間にある頂点 B においてやはり $|\omega_{n-2}| < 1$ が成り立つことになる。 $m \leq n-5$ に対しては、頂点 $(1, 0)$ において

$$\omega_m \approx \frac{\eta_{n-4} - \eta_{n-1}}{\eta_{n-4} - \eta_m}$$

であり、やはり η_i たちの配置から $|\omega_m| < 1$ が分かる。よって $(0, 1)$ と $(1, 0)$ の間にある頂点 B においても (3.1) が成立することになる。

以上によって (3.1) が cycle Δ_1' 上で成立することが分かったので、 $\varphi_{\Delta_1'}(z)$ が $[123] = 0$ において正則になることが示された。証明においては z が $y \in M(2, n; \mathbf{R})$ の Veronese 像に近く、 y から決まった η_i たちの配置が図 8 のようになっていることを仮定していたが、これらは open な条件であり、holonomic 系の singular locus に触れずに解消することができるので、 z が単に図 4 の状態になっていればやはり正則であることが成り立つ。他の cycle についても同様であり、十分な個数の正則解がそろえられることも示されるが、ここでは省略する。

最後に、上で考察した正則解の $[123] = 0$ における挙動について考えよう。 $(2, n)$ 型超幾何関数の場合には、singular locus が、2 本の 1 次式が定数倍の関係になるということに対応していたので、正則な解の挙動は積分内の 1 次式が一つ減った $(2, n-1)$ 型超幾何関数で記述されることになったのであった。ところが $(3, n)$ 型超幾何関数 (一般に (k, n) 型超幾何関数 $(k \geq 3)$) においては、singular locus は Veronese 像でない限りいくつかの hyper plane が一致するというのではなく、hyper plane たちの交わり方が generic でなくなるという

ことで実現されるので、正則な解の挙動が $(3, n-1)$ 型超幾何関数で記述されるということにはならないのである。退化した超平面配置に対応する超幾何関数は、 (k, n) 型超幾何関数の世界では stratification を構成し、退化と strata との間に対応が築かれる。その言葉で言えば、正則な解の挙動は、対応する strata に属する超幾何関数で記述できる、と言える。以上の現象を表にまとめると、次のようになるであろう。

挙動	exponent solution	holomorphic solution
$(2, n)$ 型超幾何関数	$(2, 3)$ 型超幾何関数	$(2, n-1)$ 型超幾何関数
(k, n) 型超幾何関数 ($k \geq 2$)	$(k, k+1)$ 型超幾何関数	(k, n) 型超幾何関数の strata

References

- [A] K. Aomoto, On the structure of integrals of power products of linear functions, Sci. Papers, Coll. Gen. Educ., Univ. Tokyo **27** (1977), 49-61.
- [G] I. M. Gel'fand, General theory of hypergeometric functions, Soviet Math. Dokl. **33** (1986), 573-577.
- [H] Y. Haraoka, Confluence of cycles for hypergeometric functions on $Z_{2,n+1}$, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 675-712.
- [IK1] K. Iwasaki and M. Kita, Exterior power structure on the twisted de Rham cohomology of the complements of real Veronese arrangements, J. Math. Pures Appl. **75** (1996), 69-84.
- [IK2] -, Twisted homology of the configuration spaces of n -points with applications to hypergeometric functions, Kumamoto J. Math. **12** (1999), 9-72.
- [K] H. Kimura, On Wronskians of the generalized confluent hypergeometric functions, preprint (1994).
- [KHT1] H. Kimura, Y. Haraoka and K. Takano, The generalized confluent hypergeometric functions, Proc. Japan Acad., **68** (1992), 290-295.
- [KHT2] -, On confluences of the general hypergeometric systems, Proc. Japan Acad., **70** (1994), 47-49.
- [MSY] K. Matsumoto, T. Sasaki and M. Yoshida, The monodromy of the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the hypergeometric function of type $(3,6)$, Internat. J. Math., **3** (1992), 1-164.
- [MSTY] K. Matsumoto, T. Sasaki, N. Takayama and M. Yoshida, Monodromy of the hypergeometric differential equation of type (k, n) I, Duke Math. J. **71** (1993), 403-426.
- [T] T. Terasoma, Exponential Kummer coverings and determinant of hypergeometric functions, Tokyo J. Math. **16** (1993), 497-508.