

退化した放物型方程式

京大 理 猪狩 勝寿

§.1 序論

Kowalewskian type の方程式に対する コーシー問題の適切性 (ε -適切, あるいは L^2 -適切) に関しては, 多くの優れた研究が発表され, その結果 双曲性という概念が明確にされてきた。それと比べ, Kowalewskian である方程式に対する コーシー問題の適切性に関しては, 変係数の場合, まだ未知のことが多岐にわたると思われる。(定係数の場合 Hadamard の条件が, 係数がそのみの 函数 の場合, Petrowsky の定理が 適切 (クラス $\mathcal{D}_{L^2}$ で) であるための必要十分条件として知られている)。

この小論において, 次のような偏微分方程式に対する コーシー問題の適切性を, クラス $\mathcal{D}_{L^2}$ で, 考える。

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - a(x, t; \frac{\partial}{\partial x}) u(x, t) = f(x, t),$$

$$a(x, t; \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|m| \leq m} a_m(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^m, \quad m \text{ は正の定数}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

得られた結果は、§2 の定理である。これは、“Kowalewskian である偏微分方程式に対する コーシー問題の適切性の条件を求める”という目的に対する小さな一歩でしかない。しかし、作用素 $A(x, t; \frac{\partial}{\partial x})$ の本質性が退化した場合の本質相が、ある程度特徴づけられていると見られる（特に条件 (C.2)）。

§2 コーシー問題の適切性 (必要条件).

まず、適切性の定義を与えよう。

定義 (適切性). $f=0$ とする。 (1) に対する コーシー問題が 適切であるとは、次の (i) (ii) を満たすことである。

- (i) 任意の $u_0(x) \in \mathcal{D}_x^\infty$ に対し、 $u(x, 0) = u_0(x)$ とする (1) の解 $u(x, t) \in \mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_x^\infty)$ が一意的に存在し、かつ
- (ii) 対応: $u_0(x) \mapsto u(x, t)$ が、 $\mathcal{D}_x^\infty$ から $\mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_x^\infty)$ への連続写像である。

(1) に対する コーシー問題が適切であるためには、まず、

$$(2) \quad \text{Real part } a_{2m}(x, 0; i\xi) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

が必要である ($a_{2m}(x, t; i\xi)$ は $a(x, t; i\xi)$ の $2m$ 次斉次部分)。これは溝畑教授の結果 [1] の特別な場合である。我々の目的は、更に精細な必要条件を求めることである。具体的に述べると

問題 $a_{2m}(x, 0; \frac{\partial}{\partial x})$ が退化したとき、即ちある $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\xi^0 (\neq 0) \in \mathbb{R}^n$ があって、

$$(3) \quad \text{Real part } a_{2m}(x_0, 0; i\zeta^0) = 0$$

となる場合, コーシ-問題が適切であるために, 低階にいたる条件を課すべきか?

得るべき結果は次のようなものである。

条件.1 $a(x, t; \xi)$ の主要部の係数は実数値函数。

条件.2 (係数の滑らかさ)

$|v| = 2m$ なら, $t \mapsto a_{\nu}(x, t) \in \mathcal{D}_x^\infty$ は 2 回連続的に微分可能。

$|v| \leq 2m-1$ なら, $t \mapsto a_{\nu}(x, t) \in \mathcal{D}_x^\infty$ は連続。

また, ξ の齊次多項式 $h_2(x; \xi)$ を次式で定義する,

$$(4) \quad h_2(x; \xi) = \sum_{|v|=2} \frac{1}{v!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^v a_{2m}(x, 0; \xi) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^v a_{2m}(x, 0; \xi).$$

次の定理が成立する。

定理 条件.1, 2 を仮定する。ある $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ があって

$$(C.1) \quad a_{2m}(x_0, 0; i\xi^0) = 0$$

$$(C.2) \quad h_2(x_0, \xi^0) = 0$$

$$(C.3) \quad \frac{\partial a_{2m}}{\partial t}(x_0, 0; i\xi^0) \geq 0$$

を満たすなら, (1) に対する コーシ-問題が, $t=0$ のある近傍で, クラス $\mathcal{D}_x^2$ で適切であるためには,

$$(C.4) \quad \text{Real part } a_{2m-1}(x_0, 0; i\xi^0) = 0$$

が必要である。

特に, $m \geq 2$ のときには, (C.3) を除いても正しい。

注意1 定係数のときには、条件 (C.2), (C.3) は自ずと満され、定理は、Hadamard の条件より 直ちに従う。

注意2 (2) を前提とすれば、条件 (C.1) ~ (C.4) はすべて、空間変数の正則を変換に対し、invariant である。

注意3 条件 (C.2) は $a_{2m}(x, 0; \frac{\partial}{\partial x})$ の楕円性の退化の様相に関連している。例えば、 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ は (C.2) を満し、 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ は (C.2) を満さない。

証明の方針は、基本的には、溝畑[1] の方法に沿っている。紙数の都合で証明は割愛するが、近々[5] が発表される予定があるので、参照されたい。その後、三宅氏が同様の問題を、他の観点から考察し、その結果が発表される筈である、[6]。

§.3 定理に関連するいくつかの例

条件1 で、主要部が実係数といたが、次の竹内氏の例、[4] は一般的に言って、条件1 は落せないことを示している。

例.1 $a(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, は実数値函数とする。

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = f$$

に対するコーシー問題は、 $a(x) \in \mathcal{B}^\infty \cap L^1$ ならば、 $\mathcal{D}_{L^2}$ -適切である。

$a(x)$ が 0 でない実定数ならば、コーシー問題は適切でないことは、Hadamard の条件より容易にわかる。だから、条件 1 を仮定せずに、各点的考察をするのは無理であると思われる。

つづいて、条件 (C.2) が証明のための人為的条件ではない (初めはそうであったが) ことを次の例により示そう。

例 2 $a(x_1), b(x_1)$ は $\mathbb{R}^m$ に属する x_1 のみの函数 (実数値) で、 $a(x_1) \geq 0$, $a(0) = 0$, $a''(0) > 0$ であり、さらにある正定数 δ で $a(x_1) \geq \delta \min(1, |x_1|^2)$ を満たすものがあるとする。このとき、

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + b(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(x, t) = f(x, t)$$

に対するコーシー問題は、もし

$$|b(0)|^2 \leq \frac{1}{2} a''(0)$$

を満たすなら、 $\mathcal{D}_2^\infty$ -適切である。

この例は、定理において、条件 (C.2) を満たすだければ、条件 (C.4) は必ずしも必要でないことを示している。

最後に、条件 (C.3) の役割を明確にするために、 $m=1$ としても、係数が x のみの函数である場合、即ち方程式

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial t} u - \left(\sum_{j,k=1}^n a_{j,k}(t) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum b_j(t) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(t) \right) u = f$$

を考えよう。係数は t の連続函数 ($a_{j,k}(t)$ が実数値でなくともよい) とする。Petrovsky の定理により、次の命題が得られる。

命題 ある $\xi^0 (\neq 0) \in R^n$ に対し, 正定数 C_1 が $\forall t^p (> 2)$ があり, $t=0$ のある近傍で

$$\int_0^t x_0 \sum a_{jk}(s) \xi_j^0 \xi_k^0 ds \leq C_1 t^p$$

が成りたてば, (7) に対するコーシー問題は $\mathcal{D}_{L^{\infty}}$ -適切であるために

$$\sum_{j=1}^m b_j(s) \xi_j^0 = 0$$

であることが必要である。逆に ある正定数 C_2 があって

$$\int_0^t \min_{|s|=1} \operatorname{Re} \sum a_{jk}(s) \xi_j \xi_k ds \geq C_2 t^2$$

が $t=0$ のある近傍で成りたてば, (7) に対するコーシー問題は, 任意の低階に於いて, $t=0$ のある近傍で, $\mathcal{D}_{L^{\infty}}$ で適切である。

附 記

これまで, Kowalewskian である偏微分方程式に対するコーシー問題の適切性を, 必要条件の側から見てきたが, 逆は? 勿論放物型方程式や Schrödinger 方程式が属することは周知のことである。ここに, 放物性が退化した方程式に於て, 筆者の得た結果を併記し, 参考にする。これは, (1) に於て, 特に $m=1$ の場合に限られており, $m \geq 2$ の場合は unknown である。最近阪大の梶氏が $m \geq 2$ の場合もこので, 一つの興味ある結果を得ておられる。しかし, 以下に述べる結果と重複する点は少ないと思われる。最後に初期-境界値問題についても一言触れたい。

I. 非線形式をもつ 2 階の偏微分作用素 (退化した楕円型作用素) 即ち, $\sum a_{j,k}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x)$, $\sum a_{j,k}(x) \xi_j \xi_k \geq 0$, に対する境界値問題の一般的考察は, Fichera に始まり, Oleinik, Kohn-Nirenberg 等により, 詳しく研究された。特に, O. A. Oleinik は, 退化した放物型方程式:

$$(A.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - A(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = f(x,t)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad A = \sum a_{j,k}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum b_j(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x,t) \quad (2.1)$$

任意の x, ξ, t に対して

$$(A.2) \quad \sum a_{j,k}(x,t) \xi_j \xi_k \geq 0$$

を仮定する。係数は滑らかな実数値函数とする。

に対するコーシー問題および第 1 種境界値問題の generalized solution の存在 (一意性) ^{定理} を得た。

コーシー問題の generalized solution とは: $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$

で考える。 $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ および $f(x,t) \in L^2(G)$ に対し

$$\int \left(u \left(-\frac{\partial}{\partial t} - A^* \right) \varphi \right) dx dt = \iint f \varphi dx dt + \int u_0(x) \varphi(x,0) dx$$

を満たす $u(x,t) \in L^2(G)$ のことをいふ。ここで, $\varphi(x,t)$ は, $\varphi(x,T) = 0$

となる有界な support をもつ, 任意の滑らかな函数とする。

また, 第 1 種境界値問題の generalized solution とは:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 内の領域とし, その境界を $\partial\Omega$ とする。 $(x,t) \in \Omega \times [0,T] (= G \text{ とおく})$

を考える。 $f(x, t) \in L^2(G)$ に対し, $\varphi(x, T) = 0$, $\varphi(x, t)|_{\partial\Omega} = 0$ とする有界な support を持つ任意の滑らかな函数 $\varphi(x, t)$ に対し

$$\iint u \left(-\frac{\partial}{\partial t} - A^* \right) \varphi \, dx \, dt = \iint f \varphi \, dx \, dt$$

を満たす $u(x, t) \in L^2(G)$ のこゝで与える。 A^* は A の formal adjoint を表す。

上述の Oleinik の結果に対し, (A1) を発散方程式とみて, 解けるかどうかという疑問が生ずる。即ち, $E_t^0(L^2) \cap E_t^1(\Omega_{L^2})$ に解を求めることである。筆者の得た結果を次に述べる。

II. コーシー問題について

(A.1) に対し, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ とし, (A.2) と, さらに, 次の条件を仮定する。

条件.1 $a_{j,k}(x, t)$ は実数値函数であり, $E_t^0(\mathcal{B}_x^2)$ に属する。さらに $b_j(x, t)$ は $E_t^0(\mathcal{B}_x^1)$ に, $c(x, t)$ は $E_t^0(\mathcal{B}_x^0)$ に属する。

条件.2 $\left| \sum_j b_j(x, t) \xi_j \right|^2 \leq \text{const.} \sum_{j,k} a_{j,k}(x, t) \xi_j \xi_k$
が任意の $(x, t, \xi) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ。

注意. 条件 (A.2) は講和の条件 (2) に対応する。また, われわれの定理の必要条件 (C.4) は条件 (2) により, 保証される。しかし前述の 18.2 は以下の結果には含まれない。

まず, エネルギー評価が成り立つ。

命題 A.1 $0 \leq t \leq T, (T > 0)$ とする。 $f(x, t) \in E_t^0(L^2_x)$ で,

$u(x,t) \in E_t^0(L_x^2) \cap E_t^1(\mathcal{D}_x^2)$ は (a.1) の解とする。このとき、 $u(x,t)$

および $f(x,t)$ に無関係な定数 γ があって

$$(a.3) \quad \|u(x,t)\|_{L_x^2} \leq e^{\gamma t} \|u(x,0)\|_{L_x^2} + \int_0^t e^{\gamma(t-s)} \|f(s)\|_{L_x^2} ds$$

がなりたつ。

また、解の一意的存在を示す次の定理が得られる。

定理 A.1 任意の初期データ $u_0(x) \in L_x^2$ および $f(x,t) \in E_t^0(L_x^2)$ に対し、 $u(x,0) = u_0(x)$ とする (a.1) の解 $u(x,t) \in E_t^0(L_x^2) \cap E_t^1(\mathcal{D}_x^2)$ が一意的に存在する。

さらに、解の滑らかさに関する定理が得られる。但し、

条件 1 は次の条件で置き換える。

条件 1' $a_j(x,t)$ は実数値函数で、 $E_t^0(\mathcal{B}_x^{m+2})$ に属し、 $b_j(x,t)$ および $c(x,t)$ はそれぞれ $E_t^0(\mathcal{B}_x^{m+1})$, $E_t^0(\mathcal{B}_x^m)$ に属する。ここで $m = 0, 1, 2, \dots$ 。

(a.2), 条件 1' および 条件 2 を仮定すれば

定理 A.2 $u_0(x) \in \mathcal{D}_x^m$, $f(x,t) \in E_t^0(\mathcal{D}_x^m)$ とすれば、
解 $u(x,t)$ は $E_t^0(\mathcal{D}_x^m) \cap E_t^1(\mathcal{D}_x^{m-2})$ に属する。

II. 初期-境界値問題について

R^n の中の 閉じた 超曲面 Σ で 囲まれた 内部 または 外部領域を Ω とする。 Σ の近傍で定義された 滑らかな 函数 $\varphi(x)$ があって、 Σ は

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{on } \Sigma \quad (\text{但し } |\text{grad } \varphi(x)| \neq 0)$$

で表わされるとする。さらに一般性を失わずに

$$\varphi(x) < 0 \quad \text{in } \Omega, \quad |\text{grad } \varphi| = 1 \quad \text{on } \Sigma$$

を仮定する。(a.1)において、 A の係数は $H^2(\Omega)$ に属する x のみの実数値函数とし、次の仮定をおく:

仮定 1. $\sum a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq 0, \quad x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$

仮定 2. $\sum a_{jk}(x) \varphi^{(j)}(x) \varphi^{(k)}(x) \neq 0 \quad \text{on } \Sigma.$

まず、境界 Σ の trace について考えよう。

$$(a.4) \quad \mathcal{O}_\Sigma(A) = \{u(x); u(x) \in L^2(\Omega), Au(x) \in L^2(\Omega)\}$$

$$\|u\|_{\mathcal{O}_\Sigma}^2 = \|u\|^2 + \|Au\|^2$$

とする。すると、次の命題が得られる。

命題 A.2 $\mathcal{O}_\Sigma(A)$ から $H^{-1/2}(\Sigma) \times H^{-3/2}(\Sigma)$ への線型写像

$$\gamma: u(x) \longmapsto (\gamma(u), \gamma(\frac{\partial u}{\partial \nu}))$$

で次の性質を満たすものが、一意的に存在する。

(a) γ は連続写像

(b) 有界な support をもつ任意の $v(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ に対し、Green の公式

$$(v, Au) - (A^*v, u) = \langle v, \gamma(\frac{\partial u}{\partial \nu}) \rangle_\Sigma + \langle bv, \gamma(u) \rangle_\Sigma - \langle \frac{\partial v}{\partial \nu}, \gamma(u) \rangle_\Sigma$$

が成り立つ。ここで、 $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum a_{jk}(x) \varphi^{(j)}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}$, $b = (b_j - a_{jk}^{(k)}) \varphi^{(j)}(x)$.

注意. 特に、 $u(x) \in C^2(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{O}_\Sigma(A)$ のとき

$$\gamma(u) = u(x)|_\Sigma, \quad \gamma(\frac{\partial u}{\partial \nu}) = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Sigma$$

が命題 A.2 より容易に従う。

この命題を土台にして、境界値問題 (Dirichlet 又は Neumann) を考えよう。

$$(a.5) \quad \mathcal{D}_1(A) = \{ u; u \in C_1(A), \gamma(u) = 0 \}$$

$$\mathcal{D}_2(A) = \{ u; u \in C_2(A), \gamma(\frac{\partial u}{\partial \nu}) + \frac{1}{2} b \gamma(u) = 0 \}$$

とすれば、次の命題を得る。

命題 A.3 A は $\mathcal{D}_i(A)$, $i=1$ or 2 , を定義域として, $L^2(\Omega)$

での閉作用素であり, ある β があって, $\lambda > \beta$ に対し, A のレゾルバント $(\lambda - A)^{-1}$ が存在し, しかも

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leq \frac{1}{\lambda - \beta}, \quad \forall \lambda > \beta$$

がなりたつ。

故に, Hille-Yosida の定理が適用されて, 初期-境界値問題

$$(I.B.P.) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - A(x, \frac{\partial}{\partial x}) u(x,t) = f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \gamma(u) = 0 \quad (\text{又は } \gamma(\frac{\partial u}{\partial \nu}) + \frac{1}{2} b \gamma(u) = 0) \end{cases}$$

に対し, 次の定理を得る。

定理 A.3 $f(t), Af(t) \in \mathcal{E}_t^0(L^2)$ とする。任意の $u_0(x)$

$\in \mathcal{D}_i(A)$, $i=1$ or 2 , に対し, 初期-境界値問題 (I.B.P.) の解

$u(x,t) \in \mathcal{E}_t^1(L^2(\Omega))$ が一意的に存在する。

これまで、証明をなし、定理を引挙してきた。証明には、我々は、mollifier を用いる。その際、作用素と mollifier の コミューター の処理が問題となる。なぜなら、我々は、2階の作用素を扱っており、もはや Friedrichs の補題は使えなから。しかし、それに代る次の補題 (Friedrichs の補題の拡張) がこの問題を解決する。

補題 P_ε^* を Friedrichs の mollifier とする、その際特に P_ε とし 偶函数を用いる。 $a(x) \in W^2(R^n)$ は実数値函数、 $u(x)$ は $L^2(R^n)$ の元とすると、 $|\alpha| \leq 2$ に対し、次の (i), (ii) が成り立つ:

(i)
$$\left| \operatorname{Re} (P_\varepsilon^* u, [P_\varepsilon^*, a(x)] \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u) \right| \leq \operatorname{const.} \|u\|^2$$

(ii)
$$\operatorname{Re} (P_\varepsilon^* u, [P_\varepsilon^*, a(x)] \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u) \rightarrow 0 \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow +0.$$

尚詳しくは、[12] を参照された。初期-境界値問題に対しては、まだ不満な点も多い。 A の係数の x のみの函数とした点、境界 Σ が A に対して、non-characteristic とした点、等々。これらの解決は今後を期する。

参考文献

- [1] S. Mizokata : Some remarks on the Cauchy problem, J.M. Kyoto Univ. 1-1, 109-127 (1961)
- [2] Y. Hasegawa : Strongly p -parabolic systems, Proc. J. A., 37 473-477 (1961)

- [3] 清畑 茂 : 偏微分方程式論, 岩波.
- [4] 竹内 = 印 : 修士論文 (京大 '69).
- [5] K. Igari : Well-posedness of the Cauchy problem for some evolution equations, (to appear) Pub. R.I.M.S. vol. 9, No. 3 (1973).
- [6] M. Miyake : Degenerate parabolic differential equations, to appear
- [7] G. Fichera : On a unified theory of boundary value problems for elliptic parabolic equations of second order, Boundary problems in differential equations, Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis. 1960, 97 ~ 120.
- [8] O. A. Oleinik : Linear equations of second order with non-negative form, M. Sbornik, 69 (1966) 111 ~ 140. Eng. translation Amer. Math. Soc.
- [9] Kohn - Nirenberg : Non-coercive boundary value problems, C.P.A.M., 18 (1965) 443 - 492.
- [10] — : Degenerate elliptic parabolic equations of second order., C.P.A.M., 20 (1967), 797 - 872.
- [11] Lax - Phillips : Local boundary conditions for symmetric dissipative operators, C.P.A.M., 13 (1960), 427 - 455.
- [12] K. Igari : Degenerate parabolic differential equations,

Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ. vol. 9, No. 2 (1973), to appear.