

有限位数自己同型を用いた extended affine Lie algebra の構成について

On the construction of extended affine Lie algebras using finite order automorphisms

東京大学大学院数理科学研究科 直井克之 (Katsuyuki Naoi)
Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

概要

有限次元単純 Lie algebra と有限位数の自己同型を用いた extended affine Lie algebra の構成法について述べる。またこの構成を二つ考えたとき、構成される extended affine Lie algebra が同型となるための条件について述べる。

We mention the construction of extended affine Lie algebras from finite dimensional simple Lie algebras using finite order automorphisms, and we also mention the conditions for two extended affine Lie algebras constructed by this ways to be isomorphic.

1 序

extended affine Lie algebra (今後は EALA と書く) は affine Lie algebra を含むより大きな Lie algebra のクラスとして物理学者によって導入された [6]。(彼らは irreducible quasi-simple Lie algebra と呼んだ。) その後 [1] によって、厳密な定義が与えられるとともにルート系などの構造についても研究がなされた。

EALA の構成を考える場合に非常に重要となる Lie algebra のクラスとして、吉井 [11]

によって定義された Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus が挙げられる。Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus が EALA の構成において決定的な役割を果たすことは E. Neher [8] によって示された。すなわち、すべての EALA はある Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus から具体的に構成できることが示されたのである。この結果により、EALA を構成する事と Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus を構成することは本質的には同値だと言ってもよいことになる。

Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus の構成に関しては数多くの研究 ([4] [5] など) がなされているが、特に [2] は注目すべき結果であると思う。というのも、[2] では Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus の有限次元単純 Lie algebra と有限位数の自己同型を用いた構成について研究がなされており、これはまさに Kac による affine Lie algebra の構成 [7] の一般化を考えていることに他ならない。実際 [2] ではほとんどすべての Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus がこの構成法で構成できるという結果が得られており、この構成法は Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus を構成する上で（つまりは EALA を構成する上で）最も自然で扱いやすいもののひとつであると期待される。

しかし、話が全て affine Lie algebra の構成のように簡明かというところというわけではない。もっとも大きな問題として、ある単純 Lie algebra に対してどのように自己同型を選べば得られる Lie algebra が Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus となるかが定かではないのである。実際 [2] では、得られる Lie algebra が Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus となるための必要十分条件が与えられてはいるものの、それは非常にわかりにくいものであり、その条件を満たすような自己同型を見つけることはそれほど簡単ではないように思われるのである。

これらの問題を解決するために、私は [10] において Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus のみに話を限定せずに EALA を構成することを考えた。すなわち有限次元単純 Lie algebra と自己同型によって構成される Lie algebra（これらを multiloop Lie algebra と呼ぶことにする）全体について考え、これらの Lie algebra からやはり EALA が構成できることを示したのである。この結果をみると、これまで EALA を構成するためには Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus を構成する必要があるとばかり考えられてきたが、少なくともこの自己同型を用いる構成に関しては Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus を考える必要は必ずしもないということが分かる。また、2つの multiloop Lie algebra から得られる EALA が一致することと同値な条件も得ることができた。これらの結果は、特に EALA の分類を考えるにあたって力を発揮するであろうと期待している。

2 extended affine Lie algebra

まず extended affine Lie algebra について紹介する。

定義 2.1. $\mathbb{C}$ 上の Lie algebra E 、subalgebra $0 \neq H \subseteq E$ 、 E 上の双線形形式 $(\mid)$ が以下の条件 (EA1) $\sim$ (EA6) を満たすとき、三つ組 $(E, H, (\mid))$ は (または単に E は) extended affine Lie algebra (EALA) であるという。

(EA1) $(\mid)$ は非退化不変対称双線形形式である。

(EA2) H は有限次元で self-centralizing かつ ad-diagonalizable である。

上の 2 条件により、 E の H に関するルート空間分解 $E = \bigoplus_{\alpha \in R} E_\alpha$ が得られる。(ただし、 $R := \{\alpha \in H^* \mid E_\alpha \neq 0\}$)。また H^* 上にも双線形形式 $(\mid)$ が定義できる。この記号のもとで、 $R^0 := \{\alpha \in R \mid (\alpha \mid \alpha) = 0\}$ と定める。

(EA3) $\alpha \in R \setminus R^0$ に対し、 $x_\alpha \in E_\alpha$ は locally ad-nilpotent である。

(EA4) $R \setminus R^0$ は irreducible である。

(EA5) E_c を $\{E_\alpha \mid \alpha \in R \setminus R^0\}$ によって生成される E の subalgebra とするとき、 $\{e \in E \mid [e, E_c] = 0\} \subseteq E_c$ となる。

(EA6) $\langle R^0 \rangle \subseteq H^*$ は有限 rank の自由 abel 群となる。

例 2.2. 全ての affine Lie algebra が上の条件を満たすことは容易に確かめられる。逆に、EALA で条件 (EA6) における $\langle R^0 \rangle$ の rank が 1 となるものは affine Lie algebra のみであることが知られている [3]。このことから EALA は affine Lie algebra の自然な一般化であるといえることができる。

3 multiloop Lie algebra

有限次元単純 Lie algebra と有限位数自己同型から無限次元 Lie algebra を構成する multiloop realization と呼ばれる構成について紹介する。これ以後、正整数 n を固定する。

$\mathfrak{g}$: 有限次元単純 Lie algebra,

$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$: $\mathfrak{g}$ の互いに可換な有限位数自己同型の n 個の組

とし、各 σ_i の位数を m_i で表すこととする。 $(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

$$\mathfrak{g}^{(l_1, \dots, l_n)} := \left\{ g \in \mathfrak{g} \mid \sigma_i(g) = \exp\left(\frac{2\pi l_i \sqrt{-1}}{m_i}\right) g \text{ for } 1 \leq i \leq n \right\}$$

とおき、Lie algebra $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ を以下のようにして構成する。

$$L(\mathfrak{g}, \sigma) = \bigoplus_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n} \mathfrak{g}^{(l_1, \dots, l_n)} \otimes t_1^{l_1} \dots t_n^{l_n} \subseteq \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}].$$

$\mathfrak{g}^\sigma (:= \mathfrak{g}^{(0, \dots, 0)}) \neq 0$ と仮定する。このとき $\mathfrak{g}^\sigma$ が reductive となることは簡単に確かめられるので、Cartan subalgebra $\mathfrak{h}^\sigma \subseteq \mathfrak{g}^\sigma$ をとることができる。ここで $\mathfrak{h}^\sigma$ に関する $\mathfrak{g}$ の同時固有空間分解を $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in (\mathfrak{h}^\sigma)^*} \mathfrak{g}_\alpha$ と表す。このとき $\Delta := \{\alpha \in (\mathfrak{h}^\sigma)^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$, $Q := \mathbb{Z}\Delta$ とおくと、 $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ に以下のようにして $Q \times \mathbb{Z}^n$ -grading を定めることができる:

$$L(\mathfrak{g}, \sigma) = \bigoplus_{(\alpha, (l_1, \dots, l_n)) \in Q \times \mathbb{Z}^n} \mathfrak{g}_\alpha^{(l_1, \dots, l_n)} \otimes t_1^{l_1} \dots t_n^{l_n}.$$

Q に関する grading の定め方は $\mathfrak{h}^\sigma$ の取り方に依存しているため、 $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ を改めて $L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)$ と書くこととし、この $Q \times \mathbb{Z}^n$ -graded Lie algebra $L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)$ を multiloop Lie algebra (determined by σ) とよぶことにする。

注意 3.1. これ以後常に $\mathfrak{g}^\sigma \neq 0$ を仮定する。

上の構成において、 $\mathfrak{h}^\sigma$ は $\mathfrak{g}^\sigma$ の Cartan subalgebra であり、 $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra とは必ずしも一致しないことに注意が必要である。すなわち上の記号において Δ は、もはや単純 Lie algebra $\mathfrak{g}$ の（普通の意味での）ルート系ではないのである。しかし、($\mathfrak{g}^\sigma \neq 0$ の仮定の下では) 以下のような補題が成り立つ。

補題 3.2. 上の記号において、 Δ は既約な有限ルート系である。（ただし non-reduced な場合も起こりうる。）

4 Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus を用いた EALA の構成

本稿の目標は、multiloop Lie algebra を用いた EALA の構成について解説することであるが、その前に既に知られていた Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus を用いた EALA の構成について述べる。のちに述べるように、multiloop Lie algebra からここで述べられる構成と同じ方法でやはり EALA が構成できる。

以下、 Δ を必ずしも reduced ではない既約有限ルート系、 $\Delta_{\text{ind}} = \{\alpha \in \Delta \mid \frac{1}{2}\alpha \notin \Delta\}$ とし、 Q をルート格子 ($=\mathbb{Z}\Delta$) とする。

記号 4.1. $Q \times \mathbb{Z}^n$ -graded Lie algebra $L = \bigoplus_{(\alpha, \lambda) \in Q \times \mathbb{Z}^n} L_\alpha^\lambda$ に対し、以下のように集合

を定める。(ここで、 supp は support の略である。)

$$\text{supp}_Q(L) := \{\alpha \in Q \mid L_\alpha^\lambda \neq 0 \text{ for some } \lambda \in \mathbb{Z}^n\},$$

$$\text{supp}_{\mathbb{Z}^n}(L) := \{\lambda \in \mathbb{Z}^n \mid L_\alpha^\lambda \neq 0 \text{ for some } \alpha \in Q\},$$

$$\text{supp}_{Q \times \mathbb{Z}^n}(L) := \{(\alpha, \lambda) \in Q \times \mathbb{Z}^n \mid L_\alpha^\lambda \neq 0\}.$$

定義 4.2. $\mathbb{C}$ 上の $Q \times \mathbb{Z}^n$ -graded Lie algebra $L = \bigoplus_{(\alpha, \lambda) \in Q \times \mathbb{Z}^n} L_\alpha^\lambda$ が以下の条件 (LT1)-(LT4) を満たすとき、 L は Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus (of type Δ) であるという。

(LT1) $\text{supp}_Q(L) \subseteq \Delta \cup \{0\}$.

(LT2) (i) $(\Delta_{\text{ind}}, 0) \subseteq \text{supp}_{Q \times \mathbb{Z}^n}(L)$.

(ii) $(\alpha, \lambda) \in \text{supp}_{Q \times \mathbb{Z}^n}(L)$ かつ $\alpha \neq 0$ とする。

このとき $L_\alpha^\lambda = \mathbb{C}e_\alpha^\lambda, L_\alpha^{-\lambda} = \mathbb{C}f_\alpha^\lambda$ となる元 $e_\alpha^\lambda, f_\alpha^\lambda$ で、

$\beta \in Q, x_\beta \in L_\beta$ に対し、

$$[[e_\alpha^\lambda, f_\alpha^\lambda], x_\beta] = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} x_\beta$$

を満たすものが存在する。

(LT3) L は subspace $\{L_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ によって、Lie algebra として生成される。

(LT4) $\langle \text{supp}_{\mathbb{Z}^n}(L) \rangle = \mathbb{Z}^n$.

定義 4.3. Lie algebra L に対し、 $\text{End}_{\mathbb{C}}(L)$ の部分環 $C(L)$ を、

$$C(L) = \{A \in \text{End}_{\mathbb{C}}(L) \mid [A, \text{ad}(L)] = 0\}$$

と定め、これを L の centroid と呼ぶ。

$\mathbb{Z}^n$ -graded Lie algebra L とその上の双線型形式 $(\mid)$ が与えられたとする。 $\theta \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{C})$ に対し、 $\partial_\theta \in \text{End}_{\mathbb{C}}(L)$ を、

$$\partial_\theta(x^\lambda) = \theta(\lambda)x^\lambda \quad \text{for } \lambda \in \mathbb{Z}^n, x^\lambda \in L^\lambda$$

と定め、

$$\text{SCDer}(L) = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}^n} C(L)^\mu \cdot \{\partial_\theta \mid \theta(\mu) = 0\} \subseteq \text{End}_{\mathbb{C}}(L)$$

とおく。次に $\text{SCDer}(L)$ の $\mathbb{Z}^n$ -graded subalgebra D をとる。ただし、

$$\text{ev}(\lambda)(\partial_\theta) = \theta(\lambda)$$

によって定義される evaluation map $\text{ev} : \mathbb{Z}^n \rightarrow (D^0)^*$ が単射になると仮定する。また $C := \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}^n} (D^\mu)^*$ と定め、 $C^\mu = (D^{-\mu})^*$ によって C に $\mathbb{Z}^n$ -grading を定める。最後に 2-cocycle $\tau : D \times D \rightarrow C$ で、

$$\tau(D^{\mu_1}, D^{\mu_2}) = C^{\mu_1 + \mu_2} \quad \text{for } \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{Z}^n, \quad \tau(D, D^0) = 0,$$

$$\tau(d_1, d_2)(d_3) = \tau(d_2, d_3)(d_1) \quad \text{for } d_i \in D$$

を満たすものをとる。このとき、 $\sigma_D : L \times L \rightarrow C$ を

$$\sigma_D(x, y)(d) = (d(x)|y) \quad \text{for } x, y \in L, d \in D$$

と定義し、 $L \oplus C \oplus D$ 上にブラケット積を

$$\begin{aligned} [x_1 + c_1 + d_1, x_2 + c_2 + d_2] = & ([x_1, x_2] + d_1(x_2) - d_2(x_1)) \\ & + (\sigma_D(x_1, x_2) + d_1 \cdot c_2 - d_2 \cdot c_1 + \tau(d_1, d_2)) \\ & + [d_1, d_2] \quad \text{for } x_i \in L, c_i \in C, d_i \in D \end{aligned}$$

と定めることで、 $L \oplus C \oplus D$ は Lie algebra となる。この Lie algebra を $E(L, D, \tau)$ と表す。また、 $E(L, D, \tau)$ 上の双線型形式 $(|)$ を

$$(x_1 + c_1 + d_1|x_2 + c_2 + d_2) = (x_1|x_2) + d_1(c_2) + d_2(c_1)$$

と定める。このとき E. Neher [8] により、以下が成り立つ。

命題 4.4 ([8]). L が Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus であるとし、 $H := L_0^0 \oplus C^0 \oplus D^0$ とおく。このとき、ある L 上の双線型形式 $(|)$ が存在して、任意の D, τ に対し $(E(L, D, \tau), H, (|))$ は EALA となる。

注意 4.5. 上の構成において、 D, τ の選び方は一意ではない。よって Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus L が一つ与えられたとき、上の構成で得られる EALA は一般に複数ある。

5 multiloop Lie algebra を用いた EALA の構成

multiloop Lie algebra $L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)$ は $\mathfrak{g}^\sigma \neq 0$ であったとしても必ずしも Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus とはならない。例えば、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ とし、

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma = \text{Ad}(h)$$

とおくとき、

$$L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathbb{C}h) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} e \otimes t^{2n+1} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} f \otimes t^{2n+1} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} h \otimes t^{2n}$$

となり、この Lie algebra は (LT2) (i) を満たさないので Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus とはならない。そこで Lie $\mathbb{Z}^n$ -torus の定義よりやや弱い条件を満たす Lie algebra を考える必要がある。そのために以下の定義を準備する。

定義 5.1. Λ を可換群とし、 L を Λ -graded Lie algebra $L = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L^\lambda$ とする。

(1) $[L, L] \neq 0$ かつ L の graded ideal が 0 または L のみのとき、 L は graded-simple であるという。

(2) $C(L)$ は

$$C(L)^\lambda = \{c \in C(L) \mid c \cdot L^\mu \subseteq L^{\mu+\lambda} \text{ for } \mu \in \Lambda\}$$

と定めることで Λ -graded algebra となる。ここで L が graded-simple かつ $C(L)^0 = \mathbb{C} \cdot \text{id}$ となるとき、 L は graded-central-simple であるという。

$\mathbb{Z}^n$ -graded Lie algebra $L = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} L^\lambda$ に対し以下の条件 (L1) ~ (L4) を考える。

(L1) L は graded-central-simple である。

(L2) $C(L)$ は rank n の自由アーベル群の群環と同型。

(L3) L 上に非退化不変対称双線形形式 $(\mid)$ が存在して、

$$(x \mid y) = 0 \text{ for } x \in L^\lambda, y \in L^\mu \text{ if } \lambda + \mu \neq 0$$

を満たす。

(L4) L^0 の非自明な可換部分環 $\mathfrak{s}$ で L 上 ad-diagonalizable なものが存在して、 $L =$

$\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{s}^*} L_\alpha$ を L の $\mathfrak{s}$ に関するルート空間分解とするとき、 $\Delta := \{\alpha \in \mathfrak{s}^* \mid L_\alpha \neq 0\} \setminus \{0\}$ は既約な有限ルート系となる。(ただし、non-reduced なものも許す。)

このとき命題 4.4 とほぼ同様の証明によって以下の proposition が成り立つ。

命題 5.2. $\mathbb{Z}^n$ -graded Lie algebra L が (L1)-(L4) を満たすとき、 $H := \mathfrak{s} \oplus C^0 \oplus D^0$ とするとき、 $(E(L, D, \tau), H, (\mid))$ は EALA となる。

また、補題 3.2 を用いると以下を示すことができる。

定理 5.3 ([10]). 任意の multiloop Lie algebra $L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)$ は条件 (L1)-(L4) を満たす。しかも、(L4) の $\mathfrak{s}$ の性質を満たす部分環として $\mathfrak{h}^\sigma$ をとることができる。

命題 5.2 と定理 5.3 から、任意の multiloop Lie algebra から EALA が構成できることが分かる。

6 構成される EALA が同型となる条件

前節までで、multiloop Lie algebra から EALA が（より正確に言えば EALA の族が）構成できることを述べた。ここでは、2つの multiloop Lie algebra から得られる EALA が（EALA として）同型となるための条件について述べる。EALA の定義から、EALA として同型であるということは以下のように定義するのが自然である。

定義 6.1. $(E, H, (|))$, $(E', H', (|)')$ を EALA とする。このとき、Lie algebra isomorphism $\varphi : E \rightarrow E'$ で $\varphi(H) = H'$ を満たし、ある $0 \neq c \in \mathbb{C}$ に対し

$$(\varphi(x)|\varphi(y))' = c(x|y) \text{ for } \forall x, y \in E$$

となるものが存在するとき、 $(E, H, (|))$ と $(E', H', (|)')$ は EALA として同型であるという。

multiloop Lie algebra $L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)$ は定義より $Q \times \mathbb{Z}^n$ -graded Lie algebra であった。 $(Q$ は $\mathfrak{h}^\sigma$ に関する $\mathfrak{g}$ の root lattice とする。) ここで

$$R(L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)) = \{(\alpha, \lambda) \in Q \times \mathbb{Z}^n \mid L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)_{(\alpha, \lambda)} \neq 0\}$$

とおき、 $\langle R(L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)) \rangle \subseteq Q \times \mathbb{Z}^n$ で $R(L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma))$ が生成する $Q \times \mathbb{Z}^n$ の部分群を表すことにする。このとき自然に $L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)$ を $\langle R(L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)) \rangle$ -graded Lie algebra とみなすことができる。

さて、有限次元単純 Lie algebra $\mathfrak{g}$ に対し、二つの互いに可換な有限位数自己同型の n 個の組 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ を考えよう。ここで $\mathfrak{g}^\sigma \neq 0, \mathfrak{g}^\tau \neq 0$ を仮定し、 $\mathfrak{h}^\sigma, \mathfrak{h}^\tau$ をそれぞれの Cartan subalgebra とする。記号の簡略化のために、

$$\langle R_\sigma \rangle := \langle R(L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)) \rangle, \quad \langle R_\tau \rangle := \langle R(L(\mathfrak{g}, \tau, \mathfrak{h}^\tau)) \rangle$$

とおくとき、上で述べたことから multiloop Lie algebra $L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)$, $L(\mathfrak{g}, \tau, \mathfrak{h}^\tau)$ はそれぞれ $\langle R_\sigma \rangle$ -graded, $\langle R_\tau \rangle$ -graded とみなすことができる。このとき以下のような同値関係を考える。

定義 6.2. multiloop Lie algebra $L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)$, $L(\mathfrak{g}, \tau, \mathfrak{h}^\tau)$ に対し、ある Lie algebra isomorphism $\varphi : L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma) \rightarrow L(\mathfrak{g}, \tau, \mathfrak{h}^\tau)$ と group isomorphism $\psi : \langle R_\sigma \rangle \rightarrow \langle R_\tau \rangle$ が存

在して、

$$\varphi(L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)_{(\alpha, \lambda)}) = L(\mathfrak{g}, \tau, \mathfrak{h}^\tau)_{\psi((\alpha, \lambda))}$$

を満たすとき、 $L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)$ と $L(\mathfrak{g}, \tau, \mathfrak{h}^\tau)$ は support-isomorphic であるという。

すなわち、それぞれの multiloop Lie algebra を $\langle R_\sigma \rangle$ -graded Lie algebra および $\langle R_\tau \rangle$ -graded Lie algebra と思ったときに、互いが graded Lie algebra として同型であるとき support-isomorphic であるというのである。

この定義を用いると、以下のような定理を述べることができる。

定理 6.3 ([10]). 以下は同値。

- (i) $L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)$ と $L(\mathfrak{g}, \tau, \mathfrak{h}^\tau)$ から命題 5.2 によって得られる EALA の族は、EALA としての同型を除いて一致する、
- (ii) $L(\mathfrak{g}, \sigma, \mathfrak{h}^\sigma)$ と $L(\mathfrak{g}, \tau, \mathfrak{h}^\tau)$ は support-isomorphic である、
- (iii) $\exp(\text{ad}(\mathfrak{h}^\sigma)) \cdot \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ と $\exp(\text{ad}(\mathfrak{h}^\tau)) \cdot \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ は $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ において共役な可換部分群となる。

注意 6.4. 定理 6.3 (iii) の条件は有限次元単純 Lie group における可換部分群に関するものである。すなわち定理 6.3 は無限次元 Lie algebra の分類に関する問題を有限次元 Lie group の問題へと帰着できることを意味している。

参考文献

- [1] B. Allison, S. Azam, S. Berman, Y. Gao, and A. Pianzola, *Extended affine Lie algebras, Lie algebras and their root systems*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., vol. 603, Amer. Math. Soc., 1997.
- [2] B. Allison, S. Berman, J. Faulkner and A. Pianzola, *Multiloop realization of extended affine Lie algebras and Lie tori*, arXiv:0709.0975v2 [math.RA].
- [3] B. Allison, S. Berman, Y. Gao and A. Pianzola, *A characterization of affine Kac-Moody Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **185** (1997), no. 3, 671-688.
- [4] G. Berman, Y. Gao, and Y. Krylyuk, *Quantum tori and the structure of elliptic quasi-simple Lie algebras*, J. Funct. Anal. **135** (1996), 339-389.
- [5] G. Berman, Y. Gao, Y. Krylyuk, and E. Neher, *The alternative torus and the structure of elliptic quasi-simple Lie algebras of type A_2* , Trans. Amer. Math.

- Soc. **347** (1995), 4315-4363.
- [6] R. Høegh-Krohn and B. Torr  sani, *Classification and construction of quasisimple Lie algebras*, J. Funct. Anal. **89** (1990), no. 1, 106-136.
 - [7] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, third ed., Cambridge University Press, 1990.
 - [8] E. Neher, *Extended affine Lie algebras*, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. **26** (2004), no. 3, 90-96.
 - [9] ———, *Extended affine Lie algebras and other generalizations of affine Lie algebras - a survey*, arXiv:0805.3460 [math.RA].
 - [10] K. Naoi, *Multiloop Lie algebras and the construction of extended affine Lie algebras*, arXiv:0807.2019 [math.RA].
 - [11] Y. Yoshii, *Lie tori - a simple characterization of extended affine Lie algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **42** (2006), no. 3, 739-762.