

1 / f ゆ ら ぎ に つ い て

東工大理 寺田雅彦

1. 1 / f ゆ ら ぎ と は

フーリエ周波数 f に反比例するパワースペクトル密度をもつゆらぎを、「1 / f ゆらぎ」という。この 1 / f スペクトルは、電気抵抗体に直流電流を流しながらその両端に現れる電圧ゆらぎを測定し、そのパワースペクトル密度を求めたとき、低周波部分に現れる（図 1）。この部分のスペクトルレベルは、 I の 2 乗に比例しているの
で、電圧ゆらぎの原因が抵抗の値 R のゆらぎであることがわかる。
図 1 の高周波部分は熱雑音である。

2. 1 / f ゆ ら ぎ の 特 徴

1 / f ゆらぎの特色は、特徴的な時間スケール τ が存在しないことである。このため、 $f \rightarrow 0$ の極限でスペクトル $S(f)$ は発散し、 $S(f)$ の周波数についての積分も発散する。

（例）特徴的な時間 τ が存在する場合

電圧ゆらぎを $\delta v(t)$ とすると、 τ があるときには、自己相関関数は概ね

$$\langle \delta v(t) \delta v(t') \rangle \propto \exp(-t/\tau)$$

となる。Wiener-Khinchin の定理により、パワースペクトルは、図 2 のようなローレンツ型のスペクトル

$$S(f) \propto \tau / \{1 + (2\pi f\tau)^2\}$$

となり、 $f \rightarrow 0$ では $S(f)$ は定数となる。また、 $S(f)$ の周波数 f についての積分は、有限の値に収束する。

3. アランバリエンス

測定されたゆらぎが 1 / f ゆらぎかどうかを判断する場合に、アランバリエンス σ_{τ}^2 という量を用いることができる。ゆらいでいる量 $x(t)$ の時間区間 $[t_n, t_n + \tau]$ での時間平均を

$$y_n = 1/\tau \int_{t_n}^{t_n+\tau} dt x(t)$$

とする。ここで、隣接する平均値の分散がアランバリエンスとして定義される。

$$\sigma_{\tau}^2 = 1/2 \cdot \langle (y_n - y_{n+1})^2 \rangle$$

σ_{τ}^2 は、 $x(t)$ が 1 / f ゆらぎをしているときにのみ、 τ によらず一定となる。このこともまた、1 / f ゆらぎが特定の時間スケールを持たないことを表している。

4. H o o g e の経験則

$1/f$ に関する測定データは膨大な量であるが、H o o g e はこれらのデータを整理して、次のような関係を見いだした。電圧 V 、電流 I 、抵抗 R のゆらぎのパワースペクトル密度を、それぞれ $S_V(f)$, $S_I(f)$, $S_R(f)$ とすると、

$$S_V(f) / V^2 = S_I(f) / I^2 = S_R(f) / R^2 \\ = \alpha / N f$$

が多くのデータで成り立っている。ここで、 N は、試料の中に含まれる自由電荷の総数、 α は、 0.002 にほぼ等しい定数である。

5. M c W h o r t e r のモデル

緩和時間 τ を持った過程 $x(t)$ の自己相関関数 $C(t; \tau)$ は、

$$C(t; \tau) = \langle x^2 \rangle \exp(-t/\tau)$$

となるから、W i e n e r - K h i n c h i n の定理によってパワースペクトル密度は、

$$S(f; \tau) = \int C(t; \tau) \exp(2\pi i f t) dt \\ = 2\tau \langle x^2 \rangle / \{1 + (2\pi f \tau)^2\}$$

となる。更に、この緩和時間 τ が分布しており、 $a \delta \tau / \tau$ に等しいと仮定すると、上式は次のようになる。

$$S(f) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(f; \tau) (a/\tau) d\tau \\ = \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2a \langle x^2 \rangle / \{1 + (2\pi f \tau)^2\} d\tau \\ = (a \langle x^2 \rangle / \pi f) \{ \tan^{-1}(2\pi f \tau_2) \\ - \tan^{-1}(2\pi f \tau_1) \}$$

ここで、 τ_1 , τ_2 は緩和時間の下限と上限である。したがって、

$$1/\tau_2 \ll f \ll 1/\tau_1$$

という周波数領域では、上式は次のように近似される。

$$S(f) = a \langle x^2 \rangle / 2f$$

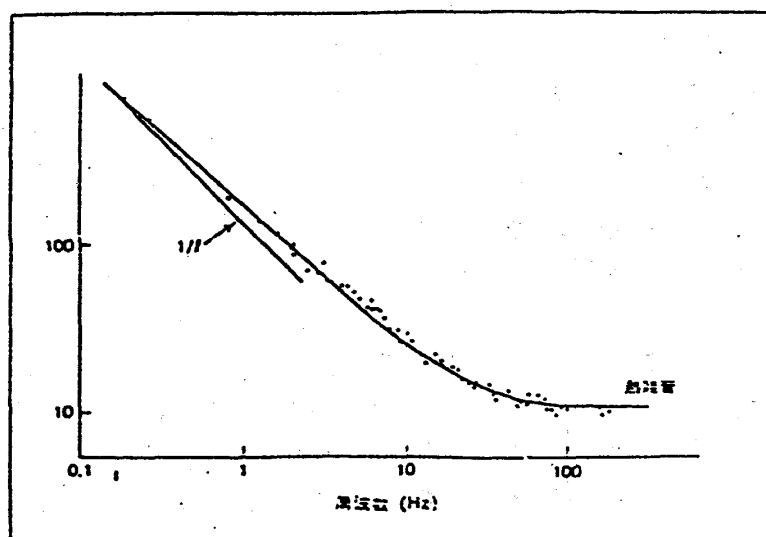
6. 他のシンブルなモデル

G e i s e l らの2次元周期ポテンシャル中の粒子の運動のモデルについては、R e f. 6、B a k らのモデルについては、R e f. 7を参照して下さい。

R e f e r e n c e

1. F. N. H o o g e, T. G. M. K l e i n p e n n i n g and L. K. J. V a n d a m m e : R e p. P r o g. P h y s. 44 (1981) 31 p.
2. P. D u t t a and P. M. H o r n : R e v. M o d. P h y s. 53 (1981) 497 p.

3. M. B. Weissman: Rev. Mod. Phys. 60 (1988) 537 p.
4. 武者利光: 第33回物性若手夏の学校テキスト (1988) 181 p.
5. 武者利光、北原和夫: 応用物理 58 (1989) 1688 p.
6. T. Geisel, A. Zacherl, and G. Radons: Z. Phys. B71 (1988) 117 p.
7. Per. Bak, Chao. Tang, and Kurt. Wiesenfeld: Phys. Rev. A38 (1988) 364 p.



〈図1〉 抵抗体に交流電流を流したときに、その両端に現れる電圧ゆがみのスペクトル

低い周波数に現れる $1/f$ スペクトルは抵抗の値のゆがみによるものであるが、高い周波数に現れるスペクトルは熱雑音そのものである。

〈図2〉 ローレンツ型のスペクトル

周波数よりも小さい周波数ではスペクトルは周波数にかかわらず一定の値をとるが、それよりも大きい周波数ではスペクトルの値は周波数の2乗に逆比例して減少する。

