



新量子力學の發展 (3)

コペンハーゲンに於て ペ・ヨルダン

(Die Naturwissenschaften 誌 1927 第 30 號所載)

4. 『q-數』の理論

量子力學のマトリックス理論は、前節に於て述べたるが如く、其の本質に於ては、週期的な或は多重に週期的な型の運動を理論的に取扱ふ爲めには充分足りる所のものであるが、然しながら一度斯くの如き運動の解析的研究をなさざれば、次の様な事情の爲めに非常に其の範圍が狭められて来る。即ち丁度時間の週期的な函數である様な座標に限らねばならぬのである。然るに例へば水素原子問題に際して其の極座標 r, φ をマトリックス的に表はす事は不可能である。如何となれば（古典的な理論に従つて言へば） φ は決して時間の週期的函數ではないからである。同様にしてマトリックス理論の骨組では古典論に於ける所謂『角座標』(Winkelkoordinaten) にアナログなものは何もないのであるが而も此の角座標は、御存知の通り古典理論に於ては運動を最も簡単に表はす事が出来るのである。最後に、例へば、最も簡単な而も一般に可能な運動である所の直線慣性運動(Geradlinige Trägheitsbewegung) の如きも、それが全く aperiodisch な性質のものであると言ふ事の爲めにマトリックス理論の縄張り外にある。若し週期的な運動を取扱ふ爲めに、もつと多くの解析的運動自由度を執り、同時に又 aperiodisch な運動をも完全に理論の中に引き入れやうと欲するならば、量子論的な量のハイゼンベルグ式マトリックス表現法の必然的な一般化をな

さねばならない。上に述べた Heisenberg のマトリックスは實際、例へばエネルギーと言ふやうに時間的に常數であるやうな如何なる量も丁度對角線マトリックスとして表はれて来るやうな種類のものである。然しながら、吾人は他の種のマトリックスを定義して、對角線マトリックスが全く他の意味をもつやうにする事が出来るのである。理論を斯ふ言ふ風にして一般的に表はす事に到る道は主として Schrödinger の根本的研究に依つて開鑿せられた。其の一般的な議論は前に述べた Dirac 及び Jordan の論文中有るが、此の事に關しては後で詳細に述べるであらう。

然しながら aperiodisch な運動等を純粹に型の通りに取扱ふ事や、就中、週期的なシステムに角變數を導入すると言ふ事は、すでに、Schrödinger の理論をまたなくとも、もつと範圍の狭い手段でもなし遂げる事が出来る。此の目的の爲めには、先づ第一に今まで研究された量子力學的な量のマトリックス的な表現法を全く止めてしまひ、そして、力學的な量の間に、其の記號的な和と積とに依つて作られた關係のみについて仕事をする。そうすると、此の場合には力學的な量は言はば『超複素數』(hyperkomplexe Zahlen)とも言ふべきものと考へられ、此の數は——丁度例へばあの Quaternionen と同じ様に、唯 Kommutativ の法則即 ($ab=ba$) だけは例外であるが、すべての普通の計算規則に従ふ事になる。Dirac は、此の方法を始めて發表したのであるが、彼は普通の數即ち『c-數』(c-Zahlen) に對して此の様な數に『q-數』(q-Zahlen)と言ふ名前を導入した。

此の事も亦唯一つの自由度を有するシステムに就て説明すれば充分である。エネルギー W は p と q との函數である。即ち $W=H(p, q)$ 。すべて此れ等の量 W, p, q は、今はマトリックスとしては考へず、『q-數』と見なす。同様に、時間も亦一つの『q-數』であり、そして W 及び t なる量に對しては交換規則 $Wt-tW=\frac{h}{2\pi i}$ が成立する。換言すれば、 W 及び t は p 及 q から一つのカノニツシユな轉換に依つて出て來べきである。一つの週期的運動の場合には他のカノニツシユな轉換に依つて、丁度古典的理論の作業變數及角變數(Wirkungs-und Winkelvariabeln)に相等する J, w なる二つの量を得る事が出来る。故にこれ等の J, w は同様に交換規則 $Jw-wJ=\frac{h}{2\pi i}$ を充

たす。而して p 及び q なる量は w の週期的函数であつて、其の係数は尙ほ J の如何に依る。即ち、

$$p = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} p_{\tau}(J) e^{2\pi i \tau w}, \quad q = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} q_{\tau}(J) e^{2\pi i \tau w}.$$

扨て今、斯くの如き二つのフリエ級数を乗する、即ち例へば pq を作るならば、吾人は次の式を得る。

$$pq = \sum_{\tau \sigma} p_{\tau}(J) e^{2\pi i \tau w} q_{\sigma}(J) e^{2\pi i \sigma w};$$

古典的理論に従ふと、吾人は此の式を計算しかへて直ちに

$$pq = \sum_{\tau \sigma} p_{\tau}(J) q_{\sigma}(J) e^{2\pi i (\tau + \sigma) w}$$

なる形にする、かうして再びはじめの同じ型の級数を得る事が出来たわけである。然しながら『 q -数』の場合には、實際 J と w とは交換する事は出来ないから、上の様な變形は之れをなす事が出来ない。此の場合には(容易に證明する事が出来るやうに)寧ろ次の式が成立する: 即ち、

$$pq = \sum_{\tau \sigma} p_{\tau}(J) q_{\sigma}(J + \hbar) e^{2\pi i (\tau + \sigma) w}.$$

此の公式は然しながら、容易に説明されるやうに、『 q -数』をもつて定義されたフリエの係数が、正に Heisenberg の乗法則に依つて相乗せられると言ふ事を示すものである! 此の際上の p 及び q に對するフリエの級数には正しい量子論的の振動数が入つて来る。而も茲には全く外の quasi-klassisch な振動数が這入つて来るかのやうに見える。然しながら若し q 或は p を時間に就て微分するならば正しい量子論的な振動数が現はれて来ると言ふ事は容易に論證する事が出来る。

古典的な理論と量子論との對應原理的な類似は、明らかに此の論據に依つて特に明白に現はれて来る。以前には吾々は Heisenberg のマトリックス要素を、古典的理論のフリエ係数と何か或る象徴的な相似性を有するやうなものに見なした。然し今では吾人は、マトリックス要素を嚴密な數學的な意味に於ける實際の量子論的フリエ係数として認める爲めにはたゞ不可交換的乗積法を導入すれば充分であると言ふ事を知つた。又『 q -数』を數式立てる事に依つて、大きな量子数(比較的小さな $\hbar$ に際して)の領域に於ては古典的理論と量子論とは實際、豫期せねばならぬやうに、漸近的に相

一致すると言ふ事も亦容易に證明される。如何となれば、此の際交換規則の $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$ は p と q とは正確に古典的にコムターチフに振舞ふのではないが、然し大體コムターチフに行動すると言ふ言ふ風に言ひ表はされるからである。コムターチフな行動からの離れは h に比例する、故に單に小さな補正に過ぎない。即ち此の小さな補正に依つて、量子力學は古典論的力學と數學的に異なるのである。『 q -數』を導入する事に依つて理論が得る所の此の內面的完結は、如何なるカノニツシユな轉換も $P_k = T p_k T^{-1}$ $Q_k = T q_k T^{-1}$ なる形で表はす事が出来ると言ふ事が今や甚だ容易に證明される事にも表はれる。此の法則は、『 q -數』をもつて數式立てた量子力學が或る點に於ては古典論的力學よりもより複雑であると言ふやうな事ではなく寧ろそれと反對により簡單であると言ふ事の丁度よい一例をなすものである。即ち、古典的理論では、例外なしにすべてのカノニツシユな轉換を網羅する様な簡單な表し方は存在しないのである。然しながら上のカノニツシユな轉換の表はしから、古典理論へのもつて狭義な文字通の相似性をもつやうな他の表し方をも得る事が出来るのである。更に又、Dirac が示した様に、『 q -數』に依つて、質點の相對論的力學を四つの座標 x, y, z, ict 全部に對して對稱的な形に表はす事の可能性を得るのである。即ち、マトリックス理論の始めの形に於ては、先づあまり満足でない方法で空間的座標 x, y, z をマトリックスとし、時間 t (從つて同様に ict) はこれに反して普通の數として考へねばならなかつたのであるが、今や x, y, z, ict 四つ共にみな『 q -數』として現れて來る。此の際力學的方程式を一つの非常に華麗な數式に組立てる事が可能になつてゐる——然かも此れからは其の最後の成績に關しては原形のマトリックス理論的の規約から出て來るのと同じものが得られるのである。最後に話さねばならぬ事は、Wentzel がその非常に大膽なるそして天才的な方法で、『古典的』量子論に於て非常に效果多いものとして確かめられた Sommerfeld の複素數積分の方法を『 q -數』をもつて量子論的に類推して出す事が出來た事である。

『 q -數』の方法に依れば量子力學的のフリエ係數は『 q -數』と置く事の出来る所の作業變數の函数として誘出する事が出来ると言ふ事は吾人の既に見

た所である。然しながら Heisenberg のマトリックス要素や、或は一般に實驗的事實と比較する事の出来る量を得る爲めには、吾人は此のフリエの係数は量子数 m, n 従つて普通の『 c -數』の函数として決定せねばならぬ。Dirac に倣つて撰ばれる此のやり方は次の事から成り立つてゐる。即ち、『 q -數』の方法に依つて計算された函数に於て、簡単に『 q -數のアルグメント』 $]$ をつまり普通の數に依つて置きかへるのである。若し『 q -數』の理論の公式を物理學的に説明しやうと欲するならば、何か之れに似寄つたやり方が、自然各々の問題に應用せられねばならないであらう。そして此れに對して一般的な原理が知られて居ない限り、アペリオディシユなシステムを『 q -數』の方法で規則通りに取扱ふ事が出来る所で、それは大して物理學的に利用は出来まい。吾人は後で、此の『 q -數』の理論に於て未解決の儘で殘された問題を如何にして一般的に解答する事が出来るかを見るであらう。

然し今茲で更に特別な點を明らかにして置こう。『 q -數』の理論のフリエの係數から Heisenberg のマトリックス要素を得る爲めには、作業變數に對して、何か任意の『 c -數』と言ふ様なものではなく h の丁度整數倍のみを代入せねばならぬ。此の事は、量子力学を『 q -數』で數式立てる事には運動方程式や交換規則の外に尙ほ一つ特種な『量子撰』(Quantelung)が必要であると言ふ事を示すものである。Heisenberg のマトリックスの根據は次の様な事であつた。即ち第一に力學的諸量のマトリックス的表し方、マトリックスの乘法であり、第二にはカノニシユな交換規則であつた。Heisenberg の理論では特種な『量子撰』と言ふやうなものは最早や必要ではなかつた。然しながら『 q -數』理論に於ては此の『量子撰』が新しく現はれて來る。而して此の『量子撰』は未だ完全に正體を掴む事は出来ぬが、より深い物理學的な意義を有するに違ひないと言ふ事は疑はんことを欲するも得べからざる所のものとなる。

『量子撰』の此の物理學的意味を明らかにしたのが Schrödinger であつた。即ち、Schrödinger が發見したやうに、吾人は今まで考へられて居たのはまるきり他の方面から原子の正確な力学に突入する事が出来るのである。Schrödinger の研究が出發した所の事實は Heisenberg の思想の據つて起つた所とは遙かに離れて居る。故に以下其の Schrödinger が出發した事實に就いて數言を費すのが順序であらうと考へる。(荒木俊馬譯)