

CP^N 上の主束のトラス還元

広大理 土井 英雄 (Hideo Doi)

0. 入門

G を $\mathbb{C}$ 上の連結簡約代数群, T を極大トラス, N_T を G における T の正規化部分群, $W_T := N_T/T$ とする. $\lambda \in \text{Hom}(\mathbb{C}^*, T)$ を用いて定義される $P^\lambda = (\mathbb{C}^{N+1} \setminus 0)/\mathbb{C}^*$ 上の主 G 束 $(\mathbb{C}^{N+1} \setminus 0) \times_{\lambda^{-1}G}$ を $E(\lambda)$ と書く. P^1 上の正則主 G 束は, すべて $E(\lambda)$ の形になることが知られている, [G]. E を P^N 上の正則主 G 束とする. $L \in \text{Gr}$, P^N 中の射影直線達の作る Grassmann 多様体, に対して $E(\lambda)|L = E|L$ によって $\lambda_L := \lambda \in \text{Hom}(\mathbb{C}^*, T)/W_T$ を定めると, generic な L に対して $\lambda_L = \lambda$ は一定になる. このとき E を λ 型 と称えることにする. $Fl := \{(x, L) \in P^N \times \text{Gr}; x \in L\}$ とおき, 図式 $P^N \xleftarrow{\mu} Fl \rightarrow \text{Gr}$ を通して E を記述し, Leiterer 氏に従って μ^*E から ある種の gauge potential を構成することができる. 主結果は 1.5 で, gauge potentials が $E(\lambda)$ のそれと等値になるための充分条件を与えるものである. 応用として, E の generic line L の高次無限小近傍 $L^{(i)}$ でのふるまいを調べることにより 次を得る.

0.1 定理 E を P^N 上の λ 型の正則主 G 束, $m = \max \langle \lambda, \alpha \rangle$; $\alpha \in R := \text{Root}(G, T)$ とする. もし 任意の generic line L に対して, $E|L^{(m+2)} = E(\lambda)|L^{(m+2)}$ ならば, $E = E(\lambda)$ である.

これは、 GL_n に対する [L, 1.1. Theorem] の一般化になっている。また トーラス還元 に関する一寸おもしろい帰結を導くこともできる。

0.2 定理 $E \rightarrow P^N$ を正則主G束とする。もし P^N 中の ある 射影平面 P^2 において、 $E|P^2 = E(\lambda)|P^2$ ならば、 $E = E(\lambda)$ である。

これは、vector束に対する [OSS, Ch.I 2.3.2 Theorem] の一般化になっている。なお 以下において扱う対象はすべて holomorphic category におけるモノである。

1. P^1 領域上の主束

領域 $X \subset P^N$ に対して、 $Gr(X) = \{L \in Gr; L \subset X\}$, $Fl(X) = \nu^{-1} Gr(X)$ とおく。 $Gr(X)$ が連結 $\mu: Fl(X) \rightarrow X$ が全射 であるとき、 X を P^1 領域と呼ぶ。 $P^N \xleftarrow{\mu} Fl \xrightarrow{\nu} Gr$ を取り扱うために 標準座標を導入する。 $e_0, e_1, \dots, e_N$ を C^{N+1} の基底とし $C^{N+1} = W = \sum C e_i, i \geq 2$ とおく。 $W^2 = W \times W \hookrightarrow Gr$ を $(W_0, W_1) \rightarrow C(e_0 + W_0) + C(e_1 + W_1)$, $W^2 \times P^1 \rightarrow P(W^6) := (C^{N+1} \setminus W)/C^\times$ を $(W_0, W_1, t_0, t_1) \rightarrow t_0(e_0 + W_0) + t_1(e_1 + W_1)$, で定義する。このとき $W^2 \times P^1 \hookrightarrow Fl \subset P^N \times Gr$ であり、 ν は射影 $W^2 \times P^1 \rightarrow W^2$ となる。また、この座標による同一視は、自由に用いる。

1.1 例 $Y = Y_0 \times Y_1 \subset W^2$ の領域に対し、 $\mu(Y \times P^1)$ は $P(W^6)$ 内の P^1 領域である。したがって、 P^N 中の射影直線 L に対し、 L に収縮する P^1 領域の族が存在する。

X は、いつも $P(W^6)$ 内の P^1 領域を表すものとする。 $(t_0, t_1) \in P^1$ の非斉次座標、 t

$= t_+ = t_0/t_1, t_- = t_1/t_0$ を用いて, $X'_\pm := \text{Gr}(X) \times \{|t_\pm| < 2\} \subset W^2 \times P'$, $X_\pm := \mu X'_\pm \subset P^\sim$ とする. $X = X_+ \cup X_-$ 上の主束 E が変換関数 $f_{+-} := f: X_+ \cap X_- \rightarrow G$ により定義されているとする. $f \circ \mu(W, \cdot) : \{1/2 < |t| < 2\} \rightarrow G$ の Birkhoff 分解 $a \lambda b$ が, " a, b は $W \in \text{Gr}(X) \subset W^2$ について正則, $\text{Ad} \lambda(t)b = 1 + O(t^{-1}) \quad t \rightarrow \infty$ " となるように取れるとき, " E は λ -gauge にある." と言う.

1.2 補題. λ 型の正則主 G 束 $E \rightarrow X$ に対し, $L \subset X$ を generic line, L に充分近い $L' \in \text{Gr}$ について $E|_{L'} = E(\lambda)|_{L'}$, とする. このとき, $Y \cdots L$ を含む P' 領域で $E|_Y$ が λ -gauge にある ... が存在する.

したがって 局所的(?) に考える場合 " $\text{in } \lambda\text{-gauge}$ " を かなり一般的に想定できる.

W^2 の座標を (W_{0j}, W_{ij}) とする. W^2 上の正則関数 f に対し $d^+f := \sum (\partial_{ij} f - t \partial_{ij} f) dW_{0j}$ とおく, ∂_{ij} は W_{ij} に関する微分 t は P' の座標に対応するものであるが, 形式的助変数として扱う. また 1形式 $\varphi = \sum \varphi_j dW_{0j}$ に対し, $d^+\varphi := \sum d^+\varphi_j dW_{0j}$ とおく.

領域 $D \subset W^2$ 上の $\mathfrak{g}$ 値 1形式 $\theta = \sum \theta_j dW_{0j}$ が (i) $d^+\theta + \theta \wedge \theta = 0$,

(ii) root 分解に応じて $\theta = \theta_\pm + \sum \theta_\alpha$; $\alpha \in R$ と表すとき, $\langle \lambda, \alpha \rangle \leq -2$ ならば $\theta_\alpha = 0$,

となっているとき, λ -gauge potential と呼ばれる. ただし $\mathfrak{g}, t$ は G, T の Lie 環. $Q_\lambda :=$

$\{g \in G; \lim_{t \rightarrow 0} \text{Ad} \lambda(t)g \text{ が } G \text{ 内に存在する}\}$, $A_\lambda := E(\lambda) \rightarrow P'$ の正則 gauge 変換群

とおく. $Q_\lambda = KN$ を Levi 分解, $N \cdots \text{unipotent}$ とする. $R_N = N$ の roots $= \{\alpha \in R; \langle \lambda, \alpha \rangle > 0\}$ とおく. このとき A_λ は $\{h = h(t) : \mathbb{C} \rightarrow Q_\lambda; \text{正則}, h = h_K h_N \quad h_K \in K, h_N$

$\in N$ と分解するとき, h_K は定数, $h_N = \prod X_\alpha(f_\alpha) \quad \alpha \in R_N$, $X_\alpha(\cdot)$ root 部分群, f_α は

高々 $\langle \lambda, \alpha \rangle$ 次の多項式 $\{$ と自然に同一視できる。 θ, θ' を D 上の λ -gauge potentials とする。

$C: D \rightarrow \mathfrak{h}_\lambda$ 正則写像で $\theta' = C^{-1}d^*C + \text{Ad } C^{-1}\theta$ となるものが存在するとき, θ と θ' は λ 同値である, という。ここで λ -gauge potentials は, "t" を含まない対象であることに注意しておく。

1.3 補題 + 定義 $E \rightarrow X$ を λ -gauge にある主 G 束, f を E の特定された変換関数, $a \lambda b$ を $f \circ \mu$ の特定された Birkhoff 分解とする。このとき $\theta := a^{-1}d^*a$ は λ -gauge potential である。

λ -gauge potentials の効用は, 次が成立することである。

1.4 命題 E, E' を X 上の λ -gauge にある主 G 束, θ, θ' をその λ -gauge potentials とする。

(i) $E \simeq E' \Rightarrow \theta, \theta'$ は λ 同値。

(ii) $\mu: \text{Fl}(X) \rightarrow X$ の fibers が連結のとき, θ, θ' が λ 同値 $\Rightarrow E \simeq E'$ 。

明らかに 0 は $E(X)$ の λ -gauge potential である。したがって λ -gauge potential が 0 と λ 同値 になるための良い 充分条件を見い出すことが重要になってくる。

1.5 定理 $D \subset W^2$ 凸領域, $\theta = \sum \theta_{\alpha j} dW_{\alpha j}$ を D 上の $\text{Lie } \mathfrak{h}_\lambda$ 値 1 形式 とする。 $\text{Lie } \mathfrak{q}_\lambda = \text{Lie } K + \sum \mathfrak{g}_\alpha$; $\alpha \in R_N$ に応じて $\theta = \theta_K + \sum \theta_\alpha$ と分解するとき, θ_K は W_1 について定数, $\theta_\alpha = \sum \theta_{\alpha j} d^j$ $0 \leq j \leq \langle \lambda, \alpha \rangle$ において, $\theta_{\alpha j}$ は W_1 について高々 $\langle \lambda, \alpha \rangle - j$ 次の多項式 であると仮定する。もし, $d^*\theta + \theta \wedge \theta = 0$ ならば, $C: D \rightarrow$

故に正則写像で、i) $Q_\lambda = KN$ に応じて $C = C_K C_N$ と分解するとき C_K は W_1 について定数
 $C_N = \prod \chi_\alpha(f_\alpha)$ $\alpha \in R_N$, $f_\alpha = \sum f_{\alpha j} t^j$, $0 \leq j \leq \langle \lambda, \alpha \rangle$ において $f_{\alpha j}$ は W_1 について高々 $\langle \lambda, \alpha \rangle - j$ 次の多項式、ii) $\theta = C^{-1} d^* C$ となるものが存在する。

2. トーラス還元

$E \rightarrow P^N$ を λ 型の主 G 束で 0.1 の条件を満たすものとする。 P^1 領域 X で、 $E|X$ が λ -gauge
にあるものをとり、 θ をその λ -gauge potential とする。 仮定により任意の $x \in Gr(X) = W^2$ に対し、射影
直線と見た $x = P^1$ を含む P^1 領域 X_x と $E|X_x$ の変換関数 $f_x : X_{x+} \cap X_{x-} \rightarrow G$ で
 $f_x \circ \mu(W, t) = \lambda(t) + O(|W-x|^{m+3})$ となるものが存在する。 [L, 3.10, 5.4] を用いると、 θ
が 1.5 の条件を満たすことがわかる。 したがって 1.4 より $E|X \simeq E(\lambda)|X$ である。 $E \times_{Ad} \mathfrak{g}|X$
 $\simeq X \times \mathfrak{g}$ であるから、 $E \times_{Ad} \mathfrak{g}$ の X 上の切片で、正則半単純元に値をとるものが存在する。
 X 上の切片は、Hartogs の定理により P^N 上の切片に拡張できるので、[G, Par. 4] により E
は、トーラス還元をもつ。

次に $E \rightarrow P^N$ に対し $E|P^2 = EQ|P^2$ とする。 $H^1(P^2, \mathcal{O}(m)) = 0$ であるから、 P^N 中の射
影平面達の作る Grassmann 多様体における P^2 の近傍 U で、 $\forall P \in U$ に対し $E|P = EQ|P$ となるものが
とれる。 これより λ 型の主束であることがわかる。 $L_0 = Ce_0 + Ce_1$, generic line, $P_0 = Ce_0 + Ce_1 +$
 $Ce_2 \in U$, $V_0 = Ce_2$ とする。 $y = (y_0, y_1) \in W^2$, $V \in P(W) = (W \setminus 0)/\mathbb{C}^\times$ に対し、 $P(y, V)$
 $= C(e_0 + y_0) + C(e_1 + y_1) + V$ とおけば、 0 in W^2 の近傍 Y と V_0 in $P(W)$ の近傍 B で、 $P(Y, B) \subset U$
となるものととれる。 このとき、さらに E が $\mu(Y \times P^1)$ 上で λ -gauge にあるように
とっておき、その λ -gauge potential を θ とする。 $\theta_y := \theta(\cdot + y)$ は、 $e_0 + y_0, e_1 + y_1, W$ を用いて、標

準座標を定義したときの λ -gauge potential である。これは $\theta_y|V$ は $P(y, V)$ の λ -gauge potential になる。 $V = \mathbb{C}U$, $S: \mathbb{C}^2 \ni (s_0, s_1) \rightarrow s_0 U \times s_1 U \in V^2$ とすれば, $(S^* \theta_y)_\alpha$ は S_1 について、高々 $\langle \lambda, \alpha \rangle$ 次の多項式となる。これは θ の具体的表示を用いれば, θ_α は W_1 について高々 $\langle \lambda, \alpha \rangle$ 次の多項式であることが導かれ, 1.4, 1.5 が適用できる。

参考文献

- [G] A. Grothendieck, *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*,
Amer. J. Math. 79, 121-138 (1956).
- [L] J. Leiterer, *On holomorphic vector bundles over linearly concave manifolds*, Math. Ann.
274, 391-417 (1986).
- [OSS] C. Okonek, M. Schneider & H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*,
Progress in Mathematics 3, Birkhäuser, 1980.