

Toral automorphism について

慶大理工 小高一則 (Kazunori Kodaka)

1. 定義と準備

$T^n \equiv \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$; n 次元トーラス

$SL(n, \mathbb{Z})$; 成分が整数, 行列式が1であるような n 次の
の正方向行列の全体。

$SL(n, \mathbb{Z})$ の元 σ を, T^n 上の自己同型写像と見なすことができる。このような σ のことを *toral automorphism* という。

$C(T^n)$; T^n 上の連続関数全体のつくる環。

$C(T^n)$ 上の automorphism $\tilde{\sigma}$ を次のように定義する。

$\alpha \in C(T^n)$ に対して

$$(\tilde{\sigma}(\alpha))(A_1, \dots, A_n) \equiv \alpha(\sigma^{-1}(A_1, \dots, A_n))$$

$$(A_1, \dots, A_n) \in T^n \quad \sigma \in SL(n, \mathbb{Z})$$

$\tilde{\sigma}$ も σ で表わすことにする。

C^* -力学系 $(C(T^n), \mathbb{Z}, \sigma)$ を考えて, 接合積 $C(T^n) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}$ をつくる。

本稿では, $C(T^n) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}$ の K_i -group ($i=0, 1$) を計算する。

計算の方針；

次の様な Pimsner-Voiculescu の exact sequence を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 K_0(C(T^n)) & \xrightarrow{\text{id} - \sigma_*^{-1(0)}} & K_0(C(T^n)) & \longrightarrow & K_0(C(T^n) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}) \\
 \uparrow & & & & \downarrow \\
 K_1(C(T^n) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}) & \longleftarrow & K_1(C(T^n)) & \xleftarrow{\text{id} - \sigma_*^{-1(0)}} & K_1(C(T^n))
 \end{array}$$

上の exact sequence により、 $K_i(C(T^n)) \cong \mathbb{Z}^{2^{n-1}}$ ($i=0,1$)

$\text{Ker}(\text{id} - \sigma_*^{-1(i)})$ は free abelian だから

$$K_0(C(T^n) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2^{n-1}} / \text{Im}(\text{id} - \sigma_*^{-1(0)}) \oplus \text{Ker}(\text{id} - \sigma_*^{-1(0)})$$

$$K_1(C(T^n) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2^{n-1}} / \text{Im}(\text{id} - \sigma_*^{-1(0)}) \oplus \text{Ker}(\text{id} - \sigma_*^{-1(0)})$$

そこで、 $K_i(C(T^n))$ ($i=0,1$) の生成元をそれぞれ 1 組定めておき、 $\sigma_*^{-1(i)}$ ($i=0,1$) を行列の形で表わし $\text{Im}(\text{id} - \sigma_*^{-1(i)})$ と $\text{Ker}(\text{id} - \sigma_*^{-1(i)})$ ($i=0,1$) を求めればよい。

$K_i(C(T^n))$ ($i=0,1$) の生成元を帰納的に次の様に定める。

$K_0(C(T))$ の生成元；

$$p_{11}(u_1) = 1, \quad g_{11}(u_1) = 0 \quad \text{と おく と、} [p_{11}] - [g_{11}] \text{ が生成元となる。}$$

ここで、 $[p]$ は、projection p を代表元とする K_0 -group の元を表す。

$K_1(C(T))$ の生成元；

$$u_{11}(u_1) = e^{2\pi i \lambda_1} \quad \text{と おく と、} [u_{11}] \text{ が生成元となる。}$$

ここで、 $[u]$ は、unitary u を代表元とする K_1 -group の元を表す。

$K_0(C(T^{n+1}))$ の生成元が $\{[p_{m+1,j}] - [g_{m+1,j}]\}_{j=1}^{2^{n-2}}$ 、 $K_1(C(T^{n+1}))$ の生成

元が $\{[u_{n+1,j}]\}_{j=1}^{2^{n-2}}$ であるとする。

このとき $K_0(C(T^n))$ と $K_1(C(T^n))$ の生成元を以下の様にして定める。

$$0 \longrightarrow C(T^{n+1}) \otimes C_0(I) \xrightarrow{\gamma} C(T^n) \xrightarrow{\pi} C(T^n)/C(T^{n+1}) \otimes C_0(I) \longrightarrow 0$$

$\swarrow \beta \quad \downarrow \alpha$
 $C(T^{n+1})$

ここで γ : inclusion map π : quotient map β : inclusion map

$$I \equiv [0, 1] \quad C_0(I) \equiv \{ \alpha \in C(I) ; \alpha(0) = \alpha(1) = 0 \}$$

$$(\alpha \circ \beta)(u_1, \dots, u_{n+1}) \equiv \alpha(u_1, \dots, u_{n+1}, 0) \quad \begin{matrix} \alpha \in C(T^n) \\ \alpha \in C(T^n)/C(T^{n+1}) \otimes C_0(I) \end{matrix}$$

このとき、横向き矢印は exact, $\alpha \circ \pi \circ \beta = \text{id}_{C(T^{n+1})}$

更に、 α は上への同型写像である。

従って、上の diagram より

$$K_i(C(T^n)) = \gamma_*^{(i)} \circ \mathcal{S}_{1-i}(K_{1-i}(C(T^{n+1}))) \oplus \beta_*^{(i)}(K_i(C(T^{n+1}))) \quad i=0,1$$

但し、 $\mathcal{S}_{1-i}$ は suspension; $K_{1-i}(C(T^{n+1})) \hookrightarrow K_i(C(T^{n+1}) \otimes C_0(I))$

$K_i(C(T^n))$ ($i=0,1$) の生成元を $\{[p_{n,j}]\}_{j=1}^{2^{n-1}}, \{[u_{n,j}]\}_{j=1}^{2^{n-1}}$

とすると、

$1 \leq j \leq 2^{n-2}$ のとき

$$p_{n,j}(u_1, \dots, u_n) = p_{n-1,j}(u_1, \dots, u_{n-1}) \quad \delta_{n,j}(u_1, \dots, u_n) = \delta_{n-1,j}(u_1, \dots, u_{n-1})$$

$$u_{n,j}(u_1, \dots, u_n) = e^{2\pi i \delta_n p_{n-1,j}(u_1, \dots, u_{n-1})}, e^{-2\pi i \delta_n \delta_{n-1,j}(u_1, \dots, u_{n-1})}$$

$2^{n-2}+1 \leq j \leq 2^{n-1}$ のとき、

$$p_{n,j}(u_1, \dots, u_n) = R(u_n) \begin{bmatrix} u_{n-1,j-2^{n-2}}(u_1, \dots, u_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(u_n)^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(u_n)$$

$$\times \begin{bmatrix} u_{n-1,j-2^{n-2}}(u_1, \dots, u_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(u_n)^*$$

$$\delta_{n,j}(u_1, \dots, u_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ここで } R(\omega_n) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \Delta_n & -\sin \frac{\pi}{2} \Delta_n \\ \sin \frac{\pi}{2} \Delta_n & \cos \frac{\pi}{2} \Delta_n \end{bmatrix}$$

1 は $u_{n+1, j-2^{n-2}}$ が属す $C(T^n)$ 成分の行列環の単位元

$$u_{n, j}(\omega_1, \dots, \omega_n) = u_{n+1, j-2^{n-2}}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$$

以上の様に $K_i(C(T^n))$ ($i=0, 1$) の生成元を定める。

2. $S_{m*}^{-1(i)}$ ($i=0, 1, m \geq 2$) を表現する行列

$$SL(m, \mathbb{Z}) \text{ は } S_m \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus I_{m-2} \text{ と } P_m \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ (-1)^{m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

とから生成される。 $\forall \alpha \in SL(m, \mathbb{Z})$ に対して $\sigma_*^{-1(i)}$ ($i=0, 1$)

を求めることは難しいので $SL(m, \mathbb{Z})$ の生成元 S_m と P_m に対して

$S_{m*}^{-1(i)}, P_{m*}^{-1(i)}$ を求める。ここでは $S_{m*}^{-1(i)}$ の行列の形を求める。
 $m=2$ のとき、

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$i=0$ のとき、定義に従って、 $K_0(C(T^2))$ の生成元 $\{p_j\} = \{p_{2j}\}_{j=1}^2$

を求めると、 $p_{21}(\omega_1, \omega_2) = 1$ $p_{22}(\omega_1, \omega_2) = 0$

$$p_{22}(\omega_1, \omega_2) = R(\omega_1) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \omega_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_2)^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(\omega_2) \begin{bmatrix} e^{2\pi i \omega_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_1)^*$$

$$p_{22}(\omega_1, \omega_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

明らかに、 $S_2^{-1(0)}([p_{21}]) = [p_{21}]$ $S_2^{-1(0)}([p_{2j}]) = [p_{2j}]$ ($j=1, 2$)

$$(S_2^{-1} p_{22})(\omega_1, \omega_2) = R(\omega_2) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i (\omega_1 + \omega_2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_2)^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(\omega_2) \begin{bmatrix} e^{2\pi i (\omega_1 + \omega_2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_2)^*$$

$$U(\omega_1, \omega_2) \equiv R(\omega_2) \begin{bmatrix} e^{2\pi i \omega_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_2)^* \text{ とおけば } U \in U_2(C(T^2))$$

$$U(S_2^{-1} p_{22}) U^* = p_{22} \text{ だから } S_2^{-1(0)}([p_{22}]) = [p_{22}]$$

$$\therefore S_2^{-1(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$i=1$ のとき

$K_1(C(T^2))$ の生成元 $\{[\omega_j]\}_{j=1}^2$ を求めると、

$$u_{21}(A_1, A_2) = e^{2\pi i A_2} \quad u_{22}(A_1, A_2) = e^{2\pi i A_1}$$

$$(S_2^{-1} u_{21})(A_1, A_2) = e^{2\pi i A_2} \quad \therefore S_2^{-1(1)}([u_{21}]) = [u_{21}]$$

$$(S_2^{-1} u_{22})(A_1, A_2) = e^{2\pi i (A_1 + A_2)} \quad \therefore S_2^{-1(1)}([u_{22}]) = [u_{21}] + [u_{22}]$$

$$\therefore S_2^{-1(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n \geq 3$ のとき、次の補題を示す。

補題1 $\forall X \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して、

$$(X \oplus I_{n-2})_*^{-1(i)} = (X \oplus I_{n-3})_*^{-1(0)} \oplus (X \oplus I_{n-3})_*^{-1(1)} \quad i=0, 1 \quad n \geq 3$$

が成り立つ。

証) $i=0$ のとき、 $K_0(C(T^n))$ の生成元を $K_i(C(T^{n-1}))$ ($i=0, 1$)

の生成元で表わす。

$1 \leq j \leq 2^{n-2}$ のとき

$$p_{m,j}(A_1, \dots, A_m) = p_{m+1,j}(A_1, \dots, A_{m+1}) \quad \delta_{m,j}(A_1, \dots, A_m) = \delta_{m+1,j}(A_1, \dots, A_{m+1})$$

$2^{n-2}+1 \leq j \leq 2^{n-1}$ のとき

$$p_{m,j}(A_1, \dots, A_m) = R(A_m) \begin{bmatrix} p_{m+1,j-2^{n-2}}^*(A_1, \dots, A_{m+1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(A_m)^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(A_m) \\ \times \begin{bmatrix} p_{m+1,j-2^{n-2}}(A_1, \dots, A_{m+1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(A_m)^*$$

$$\delta_{m,j}(A_1, \dots, A_m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$X_m \equiv X \oplus I_{n-2}$ とおく。

$1 \leq j \leq 2^{n-2}$ のとき

$$(X_m^{-1} p_{m,j})(A_1, \dots, A_m) = (X_{m+1}^{-1} p_{m+1,j})(A_1, \dots, A_{m+1})$$

$$(X_m^{-1} \delta_{m,j})(A_1, \dots, A_m) = (X_{m+1}^{-1} \delta_{m+1,j})(A_1, \dots, A_{m+1})$$

$$\text{よって、} X_m^{-1(0)}([p_{m,j}] - [\delta_{m,j}]) = [X_{m+1}^{-1} p_{m+1,j}] - [X_{m+1}^{-1} \delta_{m+1,j}]$$

$$= \beta_*^{(0)}([X_{m+1}^{-1} p_{m+1,j}] - [X_{m+1}^{-1} \delta_{m+1,j}]) = (\beta_*^{(0)} \circ X_{m+1}^{-1(0)})([p_{m+1,j}] - [\delta_{m+1,j}])$$

$$= \beta_*^{(0)}\left(\sum_{k=1}^{2^{n-2}} a_{k,j} ([p_{m+1,k}] - [\delta_{m+1,k}])\right) = \sum_{k=1}^{2^{n-2}} a_{k,j} ([p_{m,k}] - [\delta_{m,k}])$$

但し、 $[a_{k,j}]$ は、 $X_{m+1}^{-1(0)}$ を表現する行列である。

$2^{n-2}+1 \leq j \leq 2^{n-1}$ のとき.

$$(X_n^{-1} p_{n,j})(\omega_1, \dots, \omega_n) = R(\omega_n) \begin{bmatrix} (X_{n-1}^{-1} u_{n-1,j-2^{n-2}})(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n)^* \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(\omega_n) \begin{bmatrix} (X_{n-1}^{-1} u_{n-1,j-2^{n-2}})(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n)^*$$

$$(X_n^{-1} \ell_{n,j})(\omega_1, \dots, \omega_n) = \ell_{n,j}(\omega_1, \dots, \omega_n)$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } X_n^{-1(0)}([p_{n,j}] - [\ell_{n,j}]) &= (\gamma_*^{(0)} \circ \mathcal{S}_1)([X_{n-1}^{-1} u_{n-1,j-2^{n-2}}]) \\ &= (\gamma_*^{(0)} \circ \mathcal{S}_1 \circ X_{n-1}^{-1(1)})([u_{n-1,j-2^{n-2}}]) \\ &= (\gamma_*^{(0)} \circ \mathcal{S}_1) \left(\sum_{k=1}^{2^{n-2}} b_{kj} [u_{n-1,k}] \right) = \sum_{k=1}^{2^{n-2}} b_{kj} (\gamma_*^{(0)} \circ \mathcal{S}_1)([u_{n-1,k}]) \\ &= \sum_{k=1}^{2^{n-2}} b_{kj} ([p_{n,k+2^{n-2}}] - [\ell_{n,k+2^{n-2}}]) \end{aligned}$$

但し、 $[b_{kj}]$ は、 $X_{n-1}^{-1(1)}$ を表現する行列である。

$$\text{故に, } X_n^{-1(0)} = X_{n-1}^{-1(0)} \oplus X_{n-1}^{-1(1)}$$

$i=1$ のときにも、 $K_i(\text{CCT}^n)$ の生成元を $K_i(\text{CCT}^{n+1})$ ($i=0, 1$) の生成元で表わし全く同様のことを行なえばよい。(証終)

補題1により、

$$S_n^{-1(0)} = S_n^{-1(1)} = \bigoplus_1^{2^{n-3}} (S_2^{-1(0)} \oplus S_2^{-1(1)}) = \bigoplus_1^{2^{n-3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以上のことをまとめて、

命題

$$S_2^{-1(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_2^{-1(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_n^{-1(i)} = \bigoplus_1^{2^{n-3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i=0, 1, \quad n \geq 3$$

3 $P_n^{-1(i)}$ ($i=0, 1, n \geq 2$) を表現する行列

ここでは、 $P_n^{-1(i)}$ の行列の形を求める。

$n=2$ のとき

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$i=0$ のとき、明らかに $P_{2*}^{-1(0)}([p_{21}]) = [p_{21}]$ $P_{2*}^{-1(0)}([p_{22}]) = [p_{22}]$ $j=1, 2$

$$(P_2^{-1} p_2)(u_1, \lambda_2) = R(1-\lambda_1) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(1-\lambda_1)^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(1-\lambda_1) \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(1-\lambda_1)^* \\ \nabla(u_1, \lambda_2) \equiv R(1-\lambda_1) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(1-\lambda_1)^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i (1-\lambda_1) \lambda_2} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i (1-\lambda_1) \lambda_2} \end{bmatrix} R(u_2) \\ \times \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(u_2)^*$$

とかくと、 $\nabla \in U_2(C(T^2))$ $\nabla^*(P_2^{-1} p_2) \nabla = p_{22}$

$$\delta > 0, P_{2*}^{-1(0)}([p_{22}]) = [p_{22}] \quad \therefore P_{2*}^{-1(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$i=1$ のとき、明らかに $P_{2*}^{-1(1)}([u_{21}]) = [u_{21}]$, $P_{2*}^{-1(1)}([u_{22}]) = [u_{21}]$

$$\therefore P_{2*}^{-1(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$n \geq 3$ のとき、 $P_{n*}^{-1(i)}$ ($i=0, 1$) を求めるため次の補題を示す。

補題2

$$P_{n*}^{-1(i)} = (P_{n-1*}^{-1(0)} \oplus P_{n-1*}^{-1(1)}) (I_{n-2} \oplus P_2^{-1})_*^{-1(i)} \quad i=0, 1 \quad n \geq 3$$

証) $T_n \equiv T_2 \oplus I_{n-2}$ $T_2 \equiv P_2$ とかくと、 $P_n = (1 \oplus P_{n-1}) T_n$

$$\therefore \text{この等式より、} P_{n*}^{-1(i)} = T_{n*}^{-1(i)} (1 \oplus T_{n-1})_*^{-1(i)} \cdots (I_{n-3} \oplus T_3)_*^{-1(i)} (I_{n-2} \oplus T_2)_*^{-1(i)}$$

補題1と同様にして、

$$(I_{n-k} \oplus T_k)_*^{-1(i)} = (I_{n-k} \oplus T_{k-1})_*^{-1(0)} \oplus (I_{n-k} \oplus T_{k-1})_*^{-1(1)} \quad 3 \leq k \leq n \quad i=0, 1$$

上の2つの等式により、

$$P_{n*}^{-1(i)} = (P_{n-1*}^{-1(0)} \oplus P_{n-1*}^{-1(1)}) (I_{n-2} \oplus T_2)_*^{-1(i)} \quad i=0, 1 \quad (\text{証終})$$

この補題2より、 $P_{n*}^{-1(i)}$ を表現する行列を求めるためには、

$(I_{n-2} \oplus T_2)_*^{-1(i)}$ を表現する行列を求めればよい。以下、

$(I_{n-2} \oplus T_2)_*^{-1(i)}$ ($i=0, 1$, $n \geq 3$) の行列の形を決定する。

$A_n \equiv I_{n-2} \oplus T_2$ とおく。

$i=0$ のとき

$K_0(C(T^n))$ の生成元を $K_i(C(T^{n-2}))$ ($i=0,1$) の生成元で表わす。

ここで組 $(A_1, \dots, A_{n-2})$ を $\bar{A}$ で表わす。

$1 \leq j \leq 2^{n-3}$ のとき

$$P_{n,j}(\bar{A}, A_{n-1}, A_n) = P_{n-2,j}(\bar{A}) \quad \ell_{n,j}(\bar{A}, A_{n-1}, A_n) = \ell_{n-2,j}(\bar{A})$$

$2^{n-3}+1 \leq j \leq 2^{n-2}$ のとき

$$P_{n,j}(\bar{A}, A_{n-1}, A_n) = R(\omega_{n-1}) \begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-3}}(\bar{A}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_{n-1})^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(\omega_{n-1}) \\ \times \begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-3}}(\bar{A}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_{n-1})^*$$

$$\ell_{n,j}(\bar{A}, A_{n-1}, A_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2^{n-2} \leq j \leq 2^{n-2} + 2^{n-3}$ のとき

$$P_{n,j}(\bar{A}, A_{n-1}, A_n) = R(\omega_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i A_{n-1}} \ell_{n-2,j-2^{n-2}}(\bar{A}) & e^{-2\pi i A_{n-1}} P_{n-2,j-2^{n-2}}(\bar{A}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \times R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(\omega_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i A_{n-1}} P_{n-2,j-2^{n-2}}(\bar{A}) & e^{-2\pi i A_{n-1}} \ell_{n-2,j-2^{n-2}}(\bar{A}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n)^*$$

$$\ell_{n,j}(\bar{A}, A_{n-1}, A_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2^{n-2} + 2^{n-3} + 1 \leq j \leq 2^{n-1}$ のとき

$$P_{n,j}(\bar{A}, A_{n-1}, A_n) = R(\omega_n) \begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}(\bar{A}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(\omega_n) \\ \times \begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}(\bar{A}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n)^*$$

$$\ell_{n,j}(\bar{A}, A_{n-1}, A_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_n^{-1(c)}$ でそれぞれの生成元をうつすと、

$$1 \leq j \leq 2^{n-3} \text{ のとき, } A_n^{-1(c)}([P_{n,j}]) = [P_{n,j}] \quad A_n^{-1(c)}([\ell_{n,j}]) = [\ell_{n,j}]$$

$$2^{n-3}+1 \leq j \leq 2^{n-2} \text{ のとき, } A_n^{-1(c)}([P_{n,j}]) = [P_{n,j+2^{n-2}}] \quad A_n^{-1(c)}([\ell_{n,j}]) = [\ell_{n,j+2^{n-2}}]$$

$2^{n-2}+1 \leq j \leq 2^{n-2}+2^{n-3}$ のとき、

$$a_{n+1,j}(\bar{A}, A_{n+1}) \equiv e^{2\pi i A_{n+1}} P_{n-2,j-2^{n-2}}(\bar{A}) \quad \ell_{n+1,j}(\bar{A}, A_{n+1}) \equiv e^{2\pi i A_{n+1}} \ell_{n-2,j-2^{n-2}}(\bar{A})$$

$$\text{と} \text{ おく と, } [P_{n+1,j}] - [\ell_{n+1,j}] = \mathcal{A}_1([a_{n+1,j}]) - \mathcal{A}_1([\ell_{n+1,j}])$$

$$e_{n,j}(\bar{\omega}, \Delta_{n-1}, \Delta_n) \equiv R(\Delta_n) \begin{bmatrix} a_{n-1,j}^*(\bar{\omega}, \Delta_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\Delta_n)^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(\Delta_n)$$

$$\times \begin{bmatrix} a_{n-1,j}(\bar{\omega}, \Delta_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\Delta_n)^*$$

$$f_{n,j}(\bar{\omega}, \Delta_{n-1}, \Delta_n) \equiv R(\Delta_n) \begin{bmatrix} b_{n-1,j}^*(\bar{\omega}, \Delta_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\Delta_n)^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(\Delta_n)$$

$$\times \begin{bmatrix} b_{n-1,j}(\bar{\omega}, \Delta_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\Delta_n)^*$$

$$[e_{n,j}] - [\delta_{n,j}] = \mathcal{S}_i([a_{n-1,j}]) \quad [f_{n,j}] - [\delta_{n,j}] = \mathcal{S}_i([b_{n-1,j}]) \quad \text{とかく。}$$

$$\therefore [p_{n,j}] - [\delta_{n,j}] = [e_{n,j}] - [\delta_{n,j}] - [f_{n,j}] + [\delta_{n,j}] = [e_{n,j}] - [f_{n,j}]$$

よって、 $A_n^{-(0)}([e_{n,j}] - [f_{n,j}])$ を求めればよい。

$$V_{n,j}(\bar{\omega}, \Delta_{n-1}, \Delta_n) \equiv R(1-\Delta_{n-1}) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \Delta_n p_{n-2,j-2^{n-2}}(\bar{\omega})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(1-\Delta_{n-1})^*$$

$$\times \begin{bmatrix} w_1(\bar{\omega}, \Delta_{n-1}, \Delta_n) & 0 \\ 0 & \Delta_2(\bar{\omega}, \Delta_{n-1}, \Delta_n) \end{bmatrix} R(\Delta_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i \Delta_{n-1} p_{n-2,j-2^{n-2}}(\bar{\omega})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\Delta_n)^*$$

$$\Delta_1(\bar{\omega}, \Delta_{n-1}, \Delta_n) \equiv e^{-2\pi i (1-\Delta_{n-1}) \Delta_n p_{n-2,j-2^{n-2}}(\bar{\omega})}$$

$$\Delta_2(\bar{\omega}, \Delta_{n-1}, \Delta_n) \equiv e^{-2\pi i (1-\Delta_{n-1}) \Delta_n p_{n-2,j-2^{n-2}}(\bar{\omega})}$$

$$\text{とかく。} \quad V_{n,j} \in \bigcup_{\mathbb{R}} U_{\mathbb{R}}(C(T^n))$$

$$\text{かつ} \quad V_{n,j}^*(A_n^{-1} e_{n,j}) V_{n,j} = e_{n,j} \quad \text{となるから} \quad A_n^{-(0)}([e_{n,j}]) = [e_{n,j}]$$

$p_{n-2,j-2^{n-2}}$ の代わりに、 $\delta_{n-2,j-2^{n-2}}$ にして同様のことをすれば

$$A_n^{-(0)}([f_{n,j}]) = [f_{n,j}]$$

$$\therefore A_n^{-(0)}([p_{n,j}] - [\delta_{n,j}]) = [p_{n,j}] - [\delta_{n,j}]$$

$2^{n-2} + 2^{n-3} + 1 \leq j \leq 2^{n-1}$ のとき。

$$V_{n,j}(\bar{\omega}, \Delta_{n-1}, \Delta_n) \equiv R(1-\Delta_{n-1}) \begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}^*(\bar{\omega}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(1-\Delta_{n-1})^* R(\Delta_{n-1})$$

$$\times \begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}(\bar{\omega}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\Delta_{n-1})^*$$

$$\text{とかく。} \quad V_{n,j} \in \bigcup_{\mathbb{R}} U_{\mathbb{R}}(C(T^n))$$

$$p'_{n,j} \equiv V_{n,j}^*(A_n^{-1} p_{n,j}) V_{n,j} \quad \text{とかく。}$$

$$p'_{n,j}(\bar{\omega}, \Delta_{n-1}, \Delta_n) = R(\Delta_{n-1}) \begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}(\bar{\omega}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\Delta_{n-1})^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(\Delta_{n-1})$$

$$\times \begin{bmatrix} u_{n-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}^*(\bar{\omega}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\Delta_{n-1})^* \quad \text{だから、}$$

$$\begin{aligned}
[p_{m,j}'] &= \mathcal{S}_1([u_{m-2,j-2^{m-2}-2^{m-3}}^*]) + [\delta_{m,j}] \\
&= -\mathcal{S}_1([u_{m-2,j-2^{m-2}-2^{m-3}}]) + [\delta_{m,j}] \\
&= -[p_{m,j-2^{m-2}}] + [\delta_{m,j-2^{m-2}}] + [\delta_{m,j}]
\end{aligned}$$

$$A_{m*}^{-1(0)}([p_{m,j}]) = [\delta_{m,j}] \quad [\delta_{m,j}] = [\delta_{m,j-2^{m-2}}] \text{であることを考えて}$$

$$A_{m*}^{-1(0)}([p_{m,j}] - [\delta_{m,j}]) = -([p_{m,j-2^{m-2}}] - [\delta_{m,j-2^{m-2}}])$$

$$\text{ゆえに、} (I_{n-2} \oplus T_2)^{-1(0)} = \begin{bmatrix} I_{2^{n-3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{2^{n-3}} \\ 0 & 0 & I_{2^{n-3}} & 0 \\ 0 & I_{2^{n-3}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda=1$ のとき、

$K_1(CC(T^n))$ の生成元を $K_i(CC(T^{n-2}))$ ($i=0,1$) の生成元で表す。

$1 \leq j \leq 2^{n-3}$ のとき

$$u_{m,j}(\bar{\omega}, \lambda_{m-1}, \lambda_m) = e^{2\pi i \lambda_m p_{m-2,j}(\bar{\omega})}, e^{-2\pi i \lambda_m \delta_{m-2,j}(\bar{\omega})}$$

$2^{n-3}+1 \leq j \leq 2^{n-2}$ のとき

$$\begin{aligned}
u_{m,j}(\bar{\omega}, \lambda_{m-1}, \lambda_m) &= R(u_{m-1}) \begin{bmatrix} u_{m-2,j-2^{n-3}}^*(\bar{\omega}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(u_{m-1})^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\quad \times R(u_{m-1}) \begin{bmatrix} u_{m-2,j-2^{n-3}}(\bar{\omega}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(u_{m-1})^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$2^{n-2}+1 \leq j \leq 2^{n-2}+2^{n-3}$ のとき

$$u_{m,j}(\bar{\omega}, \lambda_{m-1}, \lambda_m) = e^{2\pi i \lambda_{m-1} p_{m-2,j-2^{n-2}}(\bar{\omega})}, e^{-2\pi i \lambda_{m-1} \delta_{m-2,j-2^{n-2}}(\bar{\omega})}$$

$2^{n-2}+2^{n-3}+1 \leq j \leq 2^{n-1}$ のとき

$$u_{m,j}(\bar{\omega}, \lambda_{m-1}, \lambda_m) = u_{m-2,j-2^{n-2}-2^{n-3}}(\bar{\omega})$$

$A_{m*}^{-1(1)}$ で生成元をつつすと、

$1 \leq j \leq 2^{n-3}$ のとき

$$A_{m*}^{-1(1)}([u_{m,j}]) = -[u_{m,j+2^{n-2}}]$$

$2^{n-2}+1 \leq j \leq 2^{n-2}+2^{n-3}$ のとき

$$A_{m*}^{-1(1)}([u_{m,j}]) = [u_{m,j-2^{n-2}}]$$

$2^{n-2}+2^{n-3}+1 \leq j \leq 2^{n-1}$ のとき

$$A_{m*}^{-1(1)}([u_{m,j}]) = [u_{m,j}]$$

$2^{n-3}+1 \leq j \leq 2^{n-2}$ のとき、

$[A_{m*}^{-1} u_{m,j}]$ を計算する前に、次のことに注意しておく。

$K_1(CC(T^n))$ の生成元は定義のしかたから、次の様に書ける。

$$u_{n,j}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = e^{2\pi i \lambda_R P_{R-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{R-1})} \cdot e^{-2\pi i \lambda_R \delta_{R-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{R-1})}$$

$$P_{R-1}, \delta_{R-1} \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \text{Proj } M_N(C(T^{R-1})) \quad R \in \mathbb{N} \quad 1 \leq R \leq n$$

$A_{n*}^{-1(1)}([u_{n,j}])$ ($2^{n-3}+1 \leq j \leq 2^{n-2}$) の計算をする.

生成元を定める unitary $u_{n,j}$ の定義より

$$[u_{n,j}] = (\mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_1)([u_{n-2, j-2^{n-3}}])$$

上で注意したことにより

$$u_{n-2, j-2^{n-3}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}) = e^{2\pi i \lambda_R P_{R-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{R-1})} \cdot e^{-2\pi i \lambda_R \delta_{R-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{R-1})}$$

$$j > 2^{n-3} \text{ として, } a(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}) \equiv e^{2\pi i \lambda_R P_{R-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{R-1})}, b(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}) \equiv e^{-2\pi i \lambda_R \delta_{R-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{R-1})} \quad 1 \leq R \leq n-2$$

$$\text{とかくと, } [u_{n,j}] = (\mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_1)([a]) - (\mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_1)([b])$$

$[w_1] \equiv (\mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_1)([a]), [w_2] \equiv (\mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_1)([b])$ を suspension の定義に従って書き下すと,

$$\begin{aligned} w_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= R(\lambda_{n-1}) \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_R P_{R-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{R-1})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\lambda_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\lambda_{n-1}) \\ &\quad \times \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_R P_{R-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{R-1})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\lambda_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ w_2(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= R(\lambda_{n-1}) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_R \delta_{R-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{R-1})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\lambda_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\lambda_{n-1}) \\ &\quad \times \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_R \delta_{R-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{R-1})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\lambda_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

従って、 $A_{n*}^{-1(1)}([u_{n,j}])$ の代わりに $A_{n*}^{-1(1)}([w_1] - [w_2])$ を計算

すればよい。 $\tilde{\lambda} \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_{R-1})$ とおいて,

$$\begin{aligned} (A_n^{-1(1)} w_1)(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= R(\lambda_n) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_R P_{R-1}(\tilde{\lambda})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\lambda_n)^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\lambda_n) \\ &\quad \times \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_R P_{R-1}(\tilde{\lambda})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\lambda_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\lambda_n) R(\lambda_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\lambda_n) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_R P_{R-1}(\tilde{\lambda})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \sim R(\omega_n) R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \times R(\omega_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n)^*
\end{aligned}$$

但し、 $u \sim v$ は、 u の定める K の元と v の定める K の元が等しいことを表す。

$$\begin{aligned}
\therefore \tau(U(\omega_1, \dots, \omega_n, t)) & \equiv R(\omega_n t) R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \times R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n t)^* \\
& \text{と} \text{お} \text{く} \text{と} . \quad U \in C(I, U(C(T^n)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{従って } (A_n^{-1} w_i)(\omega_1, \dots, \omega_n) & \sim R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \times R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
V(\omega_1, \dots, \omega_n) & \equiv R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n) \begin{bmatrix} v_1(\omega_1, \dots, \omega_n) & 0 \\ 0 & v_2(\omega_1, \dots, \omega_n) \end{bmatrix} R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n) \\
v_1(\omega_1, \dots, \omega_n) & \equiv e^{-2\pi i (1-\lambda_{n-1}) \lambda_n}, \quad v_2(\omega_1, \dots, \omega_n) \equiv e^{2\pi i (1-\lambda_{n-1}) \lambda_n}
\end{aligned}$$

とおくと、 $\forall \epsilon \in \bigcup_{N=1}^{\infty} U_N(C(T^n))$ となるから、

$$\begin{aligned}
(A_n^{-1} w_i)(\omega_1, \dots, \omega_n) & \sim V(\omega_1, \dots, \omega_n)^* R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \times R(\omega_n)^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_n) V(\omega_1, \dots, \omega_n) \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& = R(\omega_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_{n-1}) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \times R(\omega_{n-1}) \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& = R(\omega_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_{n-1}) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_{n-1}) \\
& \times \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_{n-1})^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\pi i \lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_{n-1}) \\
\therefore \tau(V(\omega_1, \dots, \omega_n, t)) & \equiv R(\omega_{n-1} t)^* \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_{n-1} t) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \lambda_k P_{k-1}(\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\omega_{n-1} t)^*
\end{aligned}$$

4. 例

接合積の K_i -group をいくつか実際に計算してみる。

$$(i) \sigma \equiv \begin{bmatrix} ab+1 & b \\ a & 1 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad a \neq 0, b \neq 0$$

$$\text{とすると, } K_0(C(T^2) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$$

$$K_1(C(T^2) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_{|a|} \oplus \mathbb{Z}_{|b|}$$

$$(ii) \sigma \equiv \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad a \in \mathbb{Z} \quad a \neq 0$$

$$\text{とすると, } K_0(C(T^2) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^3$$

$$K_1(C(T^2) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_{|a|}$$

$$(iii) \sigma \equiv \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL(3, \mathbb{Z}) \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$$

$$\frac{b}{ac} \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{とすると, } K_i(C(T^3) \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}_{|c|} \oplus \mathbb{Z}_{|ac|} \quad (i=0, 1)$$

$$\text{ここで, } \mathbb{Z}_m \equiv \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \quad m: \text{整数}$$

文 献

[1] A. Connes, An analogue of Thom isomorphism for crossed products of a C^* -algebra by an action of $\mathbb{R}$, Adv. Math. 39 (1981), 31-55.

[2] G. K. Pedersen, C^* -algebras and their automorphism groups, Academic Press, New York, (1979).

[3] M. Pimsner and D. Voiculescu, Exact sequences for K -groups and Ext-groups of certain cross-product

C^* -algebras, J. Operator Th. 4 (1980) 93-118.

- [4] J. L. Taylor, "Banach algebras and topology," in *Algebras and Analysis* (J. H. Williamson, Ed.) Academic Press, New York, (1975).