

Polyharmonic 方程式の Green 関数について

大阪工專 四津谷 一三

§ 0. 序

n を自然数とするとき、与えられた領域 D に対し、 n -harmonic (Polyharmonic) 方程式 $\Delta^n u = 0$ の Green 関数が求められ、境界値問題：“方程式 $\Delta^n u = 0$ が与えられているとき、 D の境界 C 上で与えられた関数 f_α ($\alpha = 0, 1, \dots, n-1$) に対し、法線を ν とすれば、 C 上で

$$u = f_0, \quad \frac{\partial^\alpha u}{\partial \nu^\alpha} = f_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n-1)$$

を満足し D で正則な解を見出す事”を解く事が出来る。

こゝでは、有界領域の内点を極とする n -harmonic 方程式の Green 関数及び無限遠点を極とする Green 関数をも考えて、境界が円及び球の場合にそれぞれ n -harmonic 方程式の Green 関数を求める、又その一つの応用についてふれてみたい。

§ 1. 平面領域の Polyharmonic Green 関数

此の節では次の記号を用いる事にする.

D は有限個の正則曲線を境界とする複素 z 平面上の有界な領域, C は D の境界, $\tilde{D}$ は D の外部領域, a は固定された D の内点, $z = x + iy$ は動点とする.

[定義 1.1] 次の二つの条件をみたす関数を a を極とする方程式 $\Delta^m u = 0$ に関する D の Green 関数と云う.

(I) a の近傍では

$$|z - a|^{2(m-1)} \log \frac{1}{|z - a|} + h_m(z)$$

の形である. こゝに $h_m(z)$ は D で方程式 $\Delta^m u = 0$ を満足し, その $2m-1$ 次以下のすべての導関数は $D+C$ で連続である.

(II) 境界 C 上では, 関数自身及びその $n-1$ 次以下のすべての法線方向微係数はゼロとなる.

[定義 1.2] 次の二つの条件を満足する関数を無限遠点を極とする方程式 $\Delta^m u = 0$ に関する $\tilde{D}$ の Green 関数と云う.

(I) 無限遠点の近傍では

$$\log |z| + a|z|^{2(m-1)} + P_m(x, y) + \bar{h}_m(z)$$

の形である. こゝに $P_m(x, y)$ は x と y の $2m-3$ 次以下の

多項式, $\bar{h}_n(z)$ は $\tilde{D}$ で方程式 $\Delta^n u = 0$ を満足しその $2n-1$ 次以下のすべての導関数は $\tilde{D}+C$ で連続かつ無限遠点で正則である.

(II) 境界 C 上では, 関数自身及びその $n-1$ 次以下のすべての法線方向微係数はゼロとなる.

今, a を極とする n -harmonic Green 関数を $G_n(z, a)$ と書く事にすれば, D が原点を中心とする半径 R の円板 $|z| < R$ であるとき, $G_n(z, a)$ は次の式で与えられる.

$$(1.1) \quad G_n(z, a) = |z-a|^{2(n-1)} \log \left| \frac{R^2 - \bar{a}z}{R(z-a)} \right| + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|z-a|^{2(n-k-1)}}{2k R^{2k}} \left\{ |R(z-a)|^2 - |R^2 - \bar{a}z|^2 \right\}^k.$$

(証明) $\Delta u = 0$ のとき $\Delta^n (|z-a|^{2(n-1)} u) = 0$ となることから条件 (I) を満足している事は明らかである.

$$\chi = \left| \frac{R^2 - \bar{a}z}{R(z-a)} \right|^2$$

とおけば, 境界 $|z|=R$ 上では $\chi=1$ であって

$$G_n(z, a) = \frac{1}{2} |z-a|^{2(n-1)} \left\{ \log \chi + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} (1-\chi)^k \right\}$$

と書き直せば, さらに

$$f(\chi) = \log \chi + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} (1-\chi)^k$$

とおけば、条件 (II) を満足するためには

$$f(1) = f'(1) = \dots = f^{(n-1)}(1) = 0$$

となる事を示せば十分であつて、これは計算により確かめる事が出来る. (証明終)

次に無限遠点を極とする n -harmonic Green 関数を $G_n(z, \infty)$ と表わす. D が前例と同じ円板であるとき、無限遠点を極とする $\Delta u = 0$ に関する $\tilde{D}$ の Green 関数は次の式で与えられる.

$$(1.2) \quad G_n(z, \infty) = \log \frac{|z|}{R} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k R^{2k}} (R^2 - |z|^2)^k.$$

証明は (1.1) の場合と同じように出来る.

§ 2. n -harmonic inner 及び outer radii.

前節の結果の一つの応用を述べよう.

記号 D , C , $\tilde{D}$, a 及び z は前節と同じとして、 D が単連結領域の場合、 a を極とする方程式 $\Delta u = 0$ に関する D の Green 関数が

$$G_1(z, a) = \log \frac{1}{|z-a|} + h_1(z)$$

で与えられた時、関数 $w(z)$ が $w(a) = 0$, $|w'(a)| = 1$ で、 D を半径 R の円板に等角に写像するものとするれば、

$$V_a = e^{h_1(a)}$$

で与えられる. V_a を D の a に関する inner radius と云う. 任意の自然数 n に対しても, n -harmonic Green 関数を用いて D の半径群を次のように定義する.

[定義 2.1] D の a を極とする方程式 $\Delta^n u = 0$ に関する Green 関数が

$$|z - a|^{2(n-1)} \log \frac{1}{|z - a|} + h_n(z)$$

で与えられるとき,

$$(2.1) \quad \log V_{a,1} = h_1(a),$$

$$\frac{V_{a,n}^{2(n-1)}}{2(n-1)} = |h_n(a)| \quad (n \geq 2)$$

とあって, 正なる量 $V_{a,n}$ を D の a に関する n -harmonic inner radius と呼ぶ.

$n=1, 2$ の場合は後述の $\tilde{D}$ の場合に於ても G. Polya と G. Szegő [4] が定義したものである.

特に D が半径 R の円板の場合には, n に無関係に,

$$V_{a,n} = \frac{R^2 - |a|^2}{R}$$

で与えられる.

次に $\tilde{D}$ について考えよう.

[定義 2.2] $\tilde{D}$ の無限遠点を極とする方程式 $\Delta^n u = 0$ に関する Green 関数が

$\log |z| + a |z|^{2(n-1)} + P_n(x, y) + \bar{h}_n(z)$ であるとき,

$$(2.2) \quad \log \bar{Y}_1 = -a,$$

$$\frac{1}{2(n-1)\bar{Y}_n^{2(n-1)}} = |a| \quad (n \geq 2)$$

といて, 正なる量 $\bar{Y}_n$ を D の n -harmonic outer radius と呼ぶ.

特に D が半径 R の円板ならば $\bar{Y}_n$ は n に無関係に R に等しくなる.

D が nearly circular domain 即ち, 極座標 r, φ で表わして

$$(2.3) \quad r < 1 + \rho(\varphi)$$

であるとき, こゝに $\rho(\varphi)$ は単位円の無限小変化を表わす.

$\rho(\varphi)$ の Fourier 級数を

$$(2.4) \quad \rho(\varphi) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

とする. こゝに係数 a_k, b_k は一位無限小である. この領域が一称密度をもつものとするれば重心 c は, 2位以上の無限小

の項を無視すれば

$$(2.5) \quad c = 2(a_1 + ib_1)$$

で与えられる.

nearly circular domain の n -harmonic Green 関数が前節の式 (1.1), (1.2) によって与えられる単位円板の Green 関数と無限小の差があるとして, それぞれ $V_{c,n}$ と $\bar{V}_n$ を 2 位無限小迄計算すれば次のようになる [2], [3].

$$(2.6) \quad V_{c,n} = 1 + a_0 + a_1^2 + b_1^2 - \sum_{k=2}^{\infty} \{2mk - (2m-3)\}(a_k^2 + b_k^2),$$

$$(2.7) \quad \bar{V}_n = 1 + a_0 + a_1^2 + b_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \{2mk - (2m-1)\}(a_k^2 + b_k^2).$$

§ 3. 三次元領域の Polyharmonic Green 関数

この節では次の記号を用いる事にする.

B は有限個の正則曲面を境界とする有界な単連結領域, S は B の境界, $\tilde{B}$ を B の外部領域, P_0 は固定された B の内点, P を動点とし又 $\overline{P_0 P} = r$ と表わす.

[定義 3.1] 次の二つ条件を満足する関数を P_0 を極とする方程式 $\Delta^m u = 0$ に関する B の Green 関数と云う.

(I) 点 P_0 の近傍では

$$r^{2m-3} + o_m(P)$$

の形である。こゝに $h_n(P)$ は B で方程式 $\Delta^n u = 0$ を満足しその $2n-1$ 次以下のすべての偏導関数は $B+S$ で連続である。

(II) 境界 S 上では、関数自身及びその $n-1$ 次以下のすべての法線方向微係数はゼロとなる。

こゝに定義した P_0 を極とする n -harmonic Green 関数を $G_n(P, P_0)$ と表わす事にする。 S が原点 O を中心とする半径 R の球面であるとき、 P_0 (≠ O) の S に関する反転によって移る点を P_0' とし、 $\overline{OP_0} = \rho$, $\overline{P_0'P} = \rho'$ と表わす事にすれば、 $n=1$ の場合はよく知られている通り

$$(3.1) \quad G_1(P, P_0) = \frac{1}{\rho} - \frac{R}{\rho \rho'}$$

であり、 $n \geq 2$ の時には $G_n(P, P_0)$ は次の式で与えられる。

$$(3.2) \quad G_n(P, P_0)$$

$$= -\frac{R}{2\rho\rho'} \left\{ \rho^{2n-4} \left(\rho - \frac{\rho}{R} \rho' \right)^2 - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2^{k-1} k!} \rho^{2n-2k-2} \left(\rho^2 - \frac{\rho^2}{R^2} \rho'^2 \right)^k \right\}.$$

(証明) Green 関数の条件 (I) を満足する事は明らかである。今

$$G_n(P, P_0) = -\frac{R \rho^{2n-2}}{2\rho\rho'} \left[\left(1 - \frac{\rho\rho'}{R\rho} \right)^2 - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2^{k-1} k!} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho\rho'}{R\rho} \right)^2 \right\}^k \right]$$

と変形し,

$$x = \left(\frac{p r'}{R r} \right)^2$$

とおけば S 上では $x = 1$ であつて

$$f(x) = 1 - 2x^{\frac{1}{2}} + x - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{2^{k-1} k!} (1-x)^k$$

とおけば, 境界条件 (II) を満足するためには

$$f(1) = f'(1) = \dots = f^{(n-1)}(1) = 0$$

となれば十分であり, これは容易に確かめる事が出来る.

(証明終)

次に平面領域の場合と同様に無限遠点を極とする Green 関数を考えよう.

方程式 $\Delta u = 0$ に関しては, $\tilde{B}$ の無限遠点を極とする Green 関数は

$$(3.4) \quad \frac{1}{C} \{1 - U(P)\}$$

で与えられている [1], ここで C は B の容量, $U(P)$ は $\tilde{B}$ の導体ポテンシャルである. これをもとに二次元の場合に模して次のように定義する.

[定義 3.2] 次の二つの条件を満たす関数を無限遠点を極とする方程式 $\Delta^n u = 0$ に関する $\tilde{B}$ の Green 関数と云う.

(I) 無限遠点の近傍で

$$\frac{1}{\varepsilon} + \alpha \gamma^{2(n-1)} + P_n(r, x, y, z) + \bar{h}_n(P)$$

の形である。こゝに C は B の容量, $P_n(r, x, y, z)$ は $2n-3$ 次以下の多項式で $P_n(0, 0, 0, 0) = 0$ となり $\bar{h}_n(P)$ は $\tilde{B}$ で方程式 $\Delta^n u = 0$ を満足し $2n-1$ 次以下のすべての導関数は $\tilde{B} + S$ で連続かつ無限遠点で正則である。

(II) 境界 S 上では関数自身及びその $n-1$ 次以下のすべての法線方向微係数はゼロとなる。

こゝに定義した無限遠点を極とする n -harmonic Green 関数を $G_n(P, \infty)$ と表わす事にする。 S は原点 O を中心とする半径 R の球面であるとき, $\overline{OP} = \lambda$ と書けば

$$(3.5) \quad G_n(P, \infty) = \frac{1}{R} - \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k k! R} \left(1 - \frac{\lambda^2}{R^2}\right)^k$$

で与えられる証明は容易である。

§ 4. 三次元領域の n -harmonic inner radii

[定義 4.1] B の P_0 を極とする方程式 $\Delta^n u = 0$ に関する Green 関数が

$$\gamma^{2n-3} + h_n(P)$$

で与えられるとき,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{Y_{P_0,1}} = -h_1(P_0), \\
 (4.1) \quad & Y_{P_0,n}^{2n-3} = \left| \frac{2^{n-1}(n-1)!}{1 \cdot 3 \cdots (2n-5)} \right| h_n(P_0) \quad (n \geq 2)
 \end{aligned}$$

といて $Y_{P_0,n}$ を B の P_0 に関する n -harmonic inner radius と呼ぶ.

特に, B が原点 O を中心とする半径 R の球で $\overline{OP_0} = \rho$ とすれば, 前節の式 (3.1) 及び (3.2) により定義に従って計算すれば, n に無関係に

$$(4.2) \quad Y_{P_0,n} = \frac{R^2 - \rho^2}{R}$$

となる.

S が nearly spherical surface 即ち極座標 λ, θ, φ で表わして

$$(4.3) \quad \lambda = 1 + \rho(\theta, \varphi)$$

とする. こゝに $\rho(\theta, \varphi)$ は単位球の無限小変化を表わす.

$\rho(\theta, \varphi)$ を次のように展開する,

$$(4.4) \quad \rho(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(\theta, \varphi),$$

こゝに $X_k(\theta, \varphi)$ はそれぞれ一位無限小の係数をもつ k 次の球面調和関数である.

$$X_1(\theta, \varphi) = (a \cos \varphi + b \sin \varphi) \sin \theta + c \cos \theta$$

であるとき、この領域が一様密度をもつと仮定してその重心を C とすれば、 C の座標を二位以上の無限小を無視して計算すれば (a, b, c) となる。平面の場合と同様に、重心 C に関する n -harmonic inner radius を二位無限小で計算すれば

$$(4.5) \quad Y_{C,n} = 1 + X_0 + \frac{1}{4\pi} \iint [X_1(\theta, \varphi)]^2 dS \\ - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \{n_k - (n-2)\} \iint [X_k(\theta, \varphi)]^2 dS$$

となる [5], 此に積分は S 上で行う。

参考文献

- [1] 久保志雄：無限遠点を極とする三次元グリーン関数。
徳島大工紀, I. 1-10 (1948).
- [2] S. Ogawa, T. Kayano and I. Yotsuya: Some Radii
Associated with Polyharmonic Equations.
Proc. Japan Acad., 47 (1), 44-49 (1971).
- [3] S. Ogawa and I. Yotsuya: Some Radii Associated
with Polyharmonic Equations. Proc. Japan
Acad., 47 (4) 368-373 (1971).
- [4] G. Polya and G. Szegő: Isoperimetric Inequalities
in Mathematical Physics. Princeton Univ. (1951).

- [5] I. Yotsuya : Some Radii of a Solid Associated with Polyharmonic Equations. (to appear).