

Existence of a finite depth subfactor conjectured by Haagerup

浅枝雅子 (ASAEDA, Masako)
(東大数理)

0 $\rightarrow$ ∞

1 Introduction

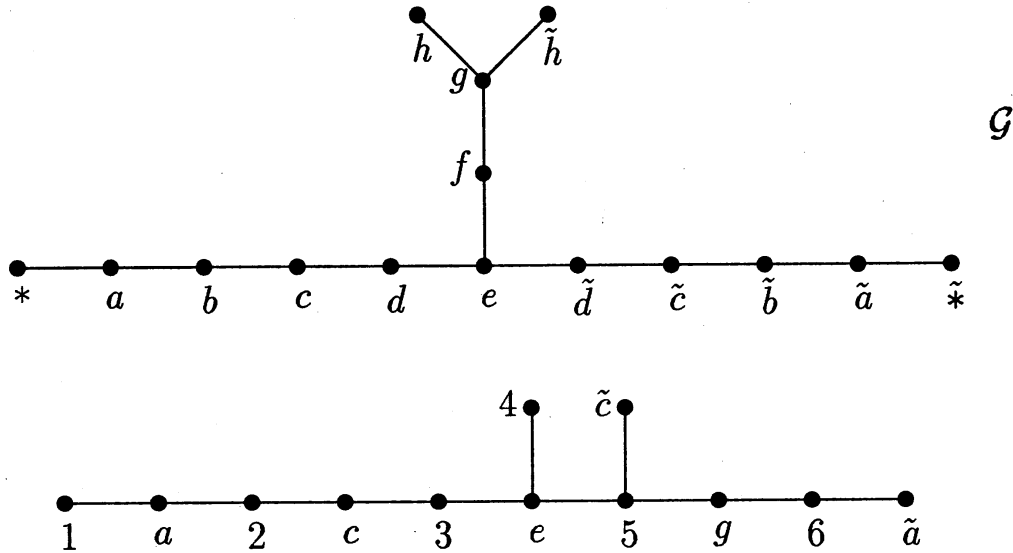
Index が 4 以下の AFD II_1 subfactor は, Jones, Ocneanu, Popa, 河東, 泉らの研究により, (拡張)Dynkin 図形をもちいた完全分類がなされている. 一方 index が 4 を越える既約な finite depth の AFD II_1 subfactor については, 量子群や有限群から構成されるものや, Goodman-de la Harpe-Jones subfactor ([GHJ]) は以前から知られていたが, それらの index は離散的であり, 隙間の値が index として実現されるのかどうかという問題が注目されてきた. 1991 年, Haagerup は index が $3 + \sqrt{3}$ 未満の場合について, subfactor の principal graph として実現される可能性のあるグラフ 4 種類のリストを与えた ([H]). 彼は初め, それらは全て実現される, と予想した. その時点では, そのうち n によって parametrize されるシリーズ物 ([H] の p.36 (2) のグラフ) の $n = 3$ の場合について, 彼自身による証明が与えられていたが, それ以降 5 年間, それ以外の候補についての実現は全く不明であった. 1996 年, Bisch によって, リストのうちの別のシリーズ物 ([H] の (4) のグラフ) は実現されないことが簡単な fusion rule により証明されてしまい ([B]), また例外型とよばれるグラフ (3) (下図, Figure 1), シリーズ (2) の $n = 7$ の場合については, 池田による connection の flatness の数値的近似計算によって, 「ほぼ確実」に実現することがわかった. ([Ik])

この講演では, 上記の例外型グラフ ([H] の (2) のグラフ) が, index $(5 + \sqrt{17})/2$ の既約な AFD II_1 subfactor の principal graph として実現されることの証明の概略を紹介する. この subfactor は量子群などからは構成できない, 今のところ最も不可思議な subfactor である. この証明は筆者と Haagerup 先生¹ との共同研究によるものであり, 共著論文 [AH] として近日中に発表

¹Denmark, Odense 大学教授

される予定である.

Figure 1: Haagerup によるグラフのリストの (3)



2 Haagerup による Main Lemma

Figure 1 から成る four graphs の上の biunitary connection α は Haagerup により一意的に求められている. ([Ik], [AH]) このグラフ達の Perron-Frobenius 固有値は $\beta = \sqrt{(5 + \sqrt{17})/2}$ であるので, α をもちいた string algebra construction によって index $(5 + \sqrt{17})/2$ を持つ AFD II_1 subfactor が生じる. そこで問題になるのは, その subfactor の (dual) principal graph が果たして再び Figure 1 になるのかどうかである. Haagerup は, このグラフのペアが (dual) principal graph であると仮定した場合の, 上の方のグラフの頂点に対応する bimodule の関係を調べることによって, 次の補題を得た.

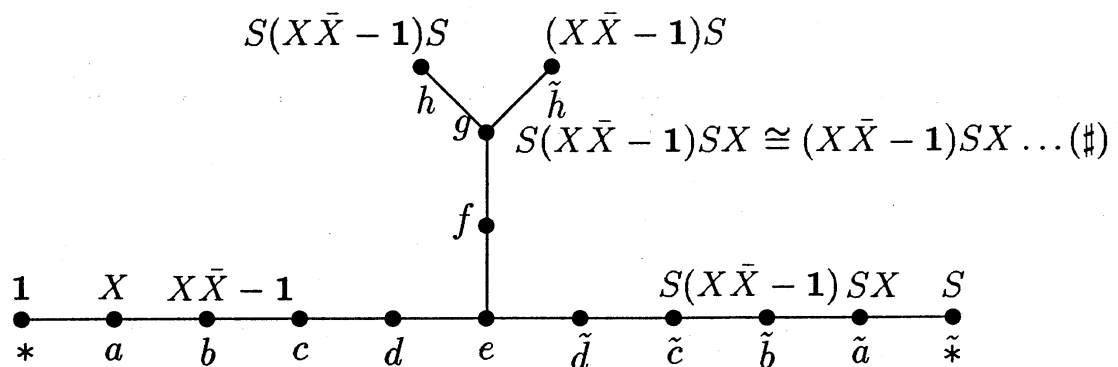
Lemma 1 (*U. Haagerup*) N と M を II_1 factor, X を既約な N - M bimodule とする. このとき, もし互いに同型でない既約な N - N bimodules Y, Z で

$${}_N Y \otimes_N X_M \cong {}_N Z \otimes_N X_M,$$

となるようなものが存在すれば, X の principal graph は Figure 1 の G になる.

ここで、 X の principal graph とは、 M の $\mathcal{B}(X)$ における N との higher relative commutant から生じる principal graph を意味する．これは同時に ${}_N X_M$ の 相対テンソル積による fusion を記述するものとなる．我々の知りたいのは connection α から生じる subfactor $N \subset M$ の principal graph, つまり ${}_N M_M$ の principal graph であるから、上の Lemma の ${}_N X_M$ には ${}_N M_M$ が対応するものと考えられる．それでは Y, Z には何に対応するのだろうか．

Figure 1 の $\mathcal{G}$ が $N \subset M$ の principal graph であると想定して頂点に対応する bimodule の関係の一部をみてみよう．



ここで、 $1 = {}_N N_N$, $X = {}_N M_M$, S は index 1 で $S \otimes S = 1$ となるような $N - N$ bimodule だが、正体は不明である．相対テンソル積の記号は書くのを省略した．また、頂点 $\bar{b}, \bar{h}$ に対応する bimodule が互いに condtagradient であること、 $b, \bar{b}, h, \bar{h}$ に対応する bimodule の index が全て等しいことに注意する．(これは、このグラフの Perron-Frobenius 固有ベクトルの各点における値が全て等しいからである．)

頂点 g に対応する bimodule に注目しよう．ここは頂点 $h, \bar{h}$ それぞれに対応する bimodule に X をテンソル積したものが対応する．よって、もしこのグラフが本当に $N \subset M$ の principal graph であれば、bimodule の関係式 (#) が成り立っているはずである．ここで先の補題をよくみると、 $Y \leftrightarrow S(X\bar{X} - 1)S$, $Z \leftrightarrow (X\bar{X} - 1)S$ と対応しているのではないかという気がしてくる．今回の我々の目標としている証明には直接つかわないのだが、実は index $(5 + \sqrt{17})/2$ をもつ既約な AFD II_1 subfactor の principal graph は、このグラフか Dynkin 図形の A_∞ しかないことが Haagerup によって証明されているので、 A_∞ でないことを言えばこのグラフが principal graph であることが証明できるのであるが、上の bimodule の関係式はグラフが分岐していることをあらわしており、 A_∞ でないことを示唆するものであると思える．

3 Biunitary connection から構成される bimodule

ここで、今までの推論が、Figure 1 の $\mathcal{G}$ が principal graph であることを仮定した上でのものであって、bimodule も、 X は ${}_N M_M$ を対応させておくにしても、 S には具体的にどういう bimodule を対応させたらいいのかわからないし、仮になにか具体的な bimodule を考えたとしても、関係式 $S(X\bar{X} - 1)SX \cong (X\bar{X} - 1)SX$ を証明するやり方はわからないので、困ってしまう。そこで、Ocneanu の *open string bimodule* というものを考えよう。これは、biunitary connection から bimodule を構成する方法である。これで、2つの connection から構成した bimodule たちの直和、相対テンソル積は、もとの connection の「和」、「積」から得られる。ここで、connection α , β の和、積は、

$$(\alpha + \beta) \left(m \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline l \\ \hline \end{array} n \right) = \begin{cases} \alpha \left(m \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline l \\ \hline \end{array} n \right), & \text{if both } m, n \text{ are edges appearing in } \alpha, \\ \beta \left(m \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline l \\ \hline \end{array} n \right), & \text{if both } m, n \text{ are edges appearing in } \beta, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$(\alpha\beta) \left(n \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline l \\ \hline \end{array} o \right) = \sum_l \alpha \left(n_1 \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline l \\ \hline \end{array} o_1 \right) \beta \left(n_2 \begin{array}{|c|} \hline l \\ \hline m \\ \hline \end{array} o_2 \right),$$

で与えられ、具体的に計算できる。ただしここで n_1, n_2 は、連結 $n_1 \cdot n_2$ が n になるような辺、 o_1, o_2 も同様である。(和の方に出てくる β は積の方の定義がちがう。正確には、[AH], [S] を参照。) Bimodule の contragradient map は connection の renormalization で与えられ、既約性は connection の(和としての)分解不能性で与えられる。さらに、実はこの connection から bimodule への対応は、単射であることもわかる。

この対応によって、bimodule ${}_N M_M = X$ は connection α (一番はじめに出てきた、Figure 1 からなる four graphs の上の unique な biunitary connection)

から構成されることがわかる．関係式 (#) の bimodule を connection で書いてみよう．まず, $X\bar{X}$ は $\alpha\tilde{\alpha}$ と書ける．bimodule $1 = {}_N N_N$ は connection

$$1 \left(\begin{array}{cc} p & q \\ \square & \\ r & s \end{array} \right) = \delta_{p,r} \delta_{q,s},$$

(p, q, r, s は, Figure 1 $\mathcal{G}$ の頂点) 即ち, trivial なうめこみを与える connection から構成される．すると, $X\bar{X} - 1$ に対応する connection $\alpha\tilde{\alpha} - 1$ は, $\alpha\tilde{\alpha}$ の gauge choice を適切に選んで, connection 行列の trivial なうめこみに対応する成分が 1 になるようにし, それを差し引くことで得られる．次に問題になるのは, S をどうするかであるが, 上の推論のように, S は index 1, $S \otimes S = 1$ となるような bimodule だと思うのが自然なので, そのようなもので connection から構成されるものはないか, と考えてみると, 次のような connection が考えられる．

$$\sigma \left(\begin{array}{cc} p & q \\ \square & \\ r & s \end{array} \right) = \delta_{p,\tilde{r}} \delta_{q,\tilde{s}},$$

この connection は, $\mathcal{G}$ の線対称移動によって導かれる II_1 factor の位数 2 の自己同型をあたえるものである．そして, この connection を右 (左) からかけるという演算は, かけられる方の connection の下 (上) の頂点を $p \leftrightarrow \tilde{p}$ のようにつけかえることを意味する．こうして, 正体不明な bimodule の関係式

$$(\#) \quad S(X\bar{X} - 1)SX \cong (X\bar{X} - 1)SX$$

に対して, connection の関係式

$$(\#') \quad \sigma(\alpha\tilde{\alpha} - 1)\sigma\alpha \stackrel{?}{\cong} (\alpha\tilde{\alpha} - 1)\sigma\alpha$$

が得られたわけだが, なんども注意しているようにこれまでの推論によって (#') が成立する根拠が与えられている訳では全くない．しかし, connection という具体的に計算可能なものによって記述されているので, 我々は (#) を証明することができる．実際, 筆者はこれを証明した．

Theorem 1 (*M. Asaeda*) Connection α を, Figure 1 のグラフからなる four graphs, σ を上で定義したものとする, $\sigma(\alpha\tilde{\alpha}-1)\sigma$, $(\alpha\tilde{\alpha}-1)\sigma$ は, 互いに同型でない分解不能な connection で, さらに

$$(\#') \quad \sigma(\alpha\tilde{\alpha}-1)\sigma\alpha \cong (\alpha\tilde{\alpha}-1)\sigma\alpha$$

が成立する. つまり, グラフ $\mathcal{G}$ は subfactor $N \subset M$ の principal graph として実現される.

証明の概略

まず, 前半のうち, $\sigma(\alpha\tilde{\alpha}-1)\sigma$, $(\alpha\tilde{\alpha}-1)\sigma$ の分解不能性を示す. これには, $\alpha\tilde{\alpha}-1$ の分解不能性を示せばいいが, bimodule に言い換えると, ${}_NM \otimes_M M_N$ が, 1 ともうひとつの既約な bimodule に分解されることを言えばよい. それは, $\text{End}({}_NM \otimes_M M_N)$ が $\mathbb{C}$ と全行列環に分解されることと同値である. $N \subset M \subset M_1 \subset \dots$ を basic construction とすると,

$$\text{End}({}_NM \otimes_M M_N) \cong N' \cap M_1$$

である. グラフ $\mathcal{G}$ の頂点 $*$ から d まで分岐がないことから,

$$\text{String}_*^{(2)}\mathcal{G} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

Ocneanu の compactness argument ([O], [EK]) より,

$$\text{String}_*^{(2)}\mathcal{G} \supset N' \cap M_1$$

なので, $\text{End}({}_NM \otimes_M M_N) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ がわかり, ${}_NM \otimes_M M_N$ が, 1 ともうひとつの既約な bimodule に分解されることが言える.

$\sigma(\alpha\tilde{\alpha}-1)\sigma$, $(\alpha\tilde{\alpha}-1)\sigma$ が互いに同型でないことは, 積の connection の graph から, 両者の connection 行列のサイズが異なることがわかり, それから両者の同型をあたえる gauge matrix たちがとれないことがわかる.

メインの $(\#)$ の証明は, まず右辺の connection 行列を求めて, それらのなかで, σ の左作用, つまり connection の上側の頂点のとりかえによってうつりあうもの同士が gauge choice でうつりあうことを確認する. 証明は大変長いのでここでは書かないが, 以下のような計算を 20 回くらいする. ([AH])

$$\begin{aligned} e \square_g^{\sim} &= \begin{pmatrix} u^{(e)}_{(5)4,l} & \\ & 1 \end{pmatrix} e \square_g \begin{pmatrix} u^{(d)}_{(g)2,r} & \\ & u^{(d)}_{(g)2,r} \\ & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^{(e)}_{(5)4,l} & \\ & 1 \end{pmatrix} \times \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{(\beta^2-2)^3}{2\beta^4\sqrt{2(\beta^4+4)}} & \frac{-\sqrt{2}(\beta^2-2)}{\beta^2\sqrt{(\beta^2-1)(\beta^4+4)}} & \frac{\beta^2(\beta^2-2)}{(\beta^2-1)\sqrt{2(\beta^4+4)}} & \frac{\sqrt{\beta^2(\beta^2-2)}}{\sqrt{\beta^4+4}} & \frac{\sqrt{2}\beta^2}{\sqrt{(\beta^2+1)(\beta^4+4)}} \\ \frac{-(\beta^2-2)}{\sqrt{2(\beta^4+4)}} & \frac{\sqrt{2(\beta^2-1)}}{\sqrt{\beta^4+4}} & \frac{-\sqrt{2}(\beta^2-2)}{(\beta^2-1)\sqrt{\beta^4+4}} & \frac{-2\sqrt{\beta^2-2}}{\sqrt{\beta^2(\beta^4+4)}} & \frac{\sqrt{2(\beta^2+1)}}{\sqrt{\beta^4+4}} \\ \sqrt{\frac{\beta^2+1}{2\beta^2-1}} & \sqrt{\frac{\beta^2-2}{2\beta^2-1}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{\beta^2-2}}{2(\beta^2-1)} & \frac{-1}{\sqrt{2}\beta^2} & \frac{\beta^2-2}{\sqrt{\beta^4-1}} & \frac{\sqrt{2}}{\beta} & \frac{1}{2\sqrt{\beta^2-1}} \\ \frac{-(\beta^2-2)}{2(\beta^2-1)} & \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}} & \frac{\sqrt{2\beta^2-1}}{\sqrt{\beta^4-1}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{\beta^2+1}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u \begin{pmatrix} e \\ 5 \end{pmatrix}_{4,l} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2(\beta^2-2)}{\beta^4+4} & \frac{2(\beta^2+4)}{\beta^4+4} & \frac{-\sqrt{\beta^2(\beta^2-2)}}{\sqrt{\beta^4+4}} & \frac{-2}{\sqrt{\beta^2(\beta^2-1)(\beta^4+4)}} & 0 \\ \frac{2(\beta^2+4)}{\beta^4+4} & \frac{\beta^2}{\beta^4+4} & \frac{2\beta}{\sqrt{(2\beta^2-1)(\beta^4+4)}} & \frac{(\beta^2-1)\sqrt{\beta^2-1}}{\sqrt{\beta^2(\beta^4+4)}} & 0 \\ \frac{-\sqrt{\beta^2(\beta^2-2)}}{\sqrt{\beta^4+4}} & \frac{2\beta}{\sqrt{(2\beta^2-1)(\beta^4+4)}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\beta} & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{\beta^2(\beta^2-1)(\beta^4+4)}} & \frac{(\beta^2-1)\sqrt{\beta^2-1}}{\sqrt{\beta^2(\beta^4+4)}} & \frac{\sqrt{2}}{\beta} & \frac{-1}{\beta^2-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$u \begin{pmatrix} e \\ 5 \end{pmatrix}_{4,l}$ というのは、4重辺 $e-5$ に対応する gauge 行列のことである。その他定義していない記号はあるが、[AH] に全て正しく書いた。以上のように定理は証明された。

References

- [AH] M. Asaeda, U. Haagerup An exotic subfactor of finite depth with index $(5 + \sqrt{17})/2$, (1997), in priparation.
- [B] D. Bisch, Principal graphs of subfactors with small index, *preprint*, (1997).
- [EK] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, (to appear), Quantum symmetries on operator algebras, (book manuscript).
- [GHJ] F. Goodman, P. de la Harpe, & V. F. R. Jones, “Coxeter graphs and towers of algebras”, MSRI publications **14**, Springer, (1989).
- [H] U. Haagerup, Principal graphs of subfactors in the index range $4 < [M : N] < 3 + \sqrt{2}$, Subfactors, World Scientific, (1994), 1–38.
- [Ik] K. Ikeda Numerical evidence for flatness of Haagerup’s connections. preprint, (1996)
- [O] A. Ocneanu, Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors, Univ. of Tokyo Seminary Note **45**, (recorded by Y. Kawahigashi), (1991).
- [S] N. Sato, Two subfactors arising from a non-degenerate commuting square II —tensor categories and TQFT’s— 京大数理研講究録, vol **977**, (1997), 6–12.