

# Determinant について

京都大学理学部 原田 雅名

(Harada, Masana)

up to rational equivalence で同じ. という形で定式化される Grothendieck-Riemann-Roch の定理 が divisor の間の canonical な同型として定式化されることを、曲線の場合に見ます。この後に、Arakelov-Faltings による arithmetic surface 上での RR、Mumford の同型  $(\lambda_1)^{13} \simeq \lambda_2$ 、さらに Belavin-Knizhnik の定理をへて、Superstring の分配関数の話などがありますが、今回は、まったくふれられません。

[F] Faltings ; Calculus on Arithmetic Surfaces Am. of Math. 119

[BGS] Bismut-Gillet-Soulé ; Analytic Torsion and Holomorphic Determinant line bundles I, II, III Comm. Math. Phys. 115

[Q] Quillen ; Determinants of Cauchy-Riemann operators ; Func. analysis 19.

[G] Gillet ; Introduction to Higher Arakelov Theory, Contemp. Math. 67.

[GS] Gillet-Soulé ; Higher Arakelov Theory preprint

[KM] Knudsen-Mumford ; Math. Scand. 39

[K] Kempf ; Inverse Image of theta divisors , III. J. of Math. 29

[B] Moret-Bailly ; Asterisque 127.

# 1. Quillen-Grothendieck-Riemann-Roch と Determinant bundle

1.1: まず  $M$  を、一般の複素 Kähler 多様体とします。  $\mathcal{L}$  を  $X$  上の正則線束とします。  $\mathcal{L}$  上に Hermite 計量を定義したいのですが、一般には正矩 (canonical) に定める方法はありません。もし一つ決めるならば、正矩な接続があり、曲率の  $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}$  として、Chern 類  $c_1(\mathcal{L})$  という  $(1,1)$  形式が定まります。この形式の cohomology 類は、  $\mathcal{L}$  の topology のみによって決まります。遂に、ある  $(1,1)$  形式で、cohomology 類が  $[c_1(\mathcal{L})]$  になるものを考えると、  
 $\downarrow$   $M$  がコンパクトならば、  
 定数倍を除いて一意に、  $\mathcal{L}$  上の計量があって、その計量から定義される  $c_1$  が、元のものになります。

1.2: 今  $X$  を Riemann 面だとしますと、まず canonical sheaf  $\Omega^1$  に  $\langle \omega, \omega' \rangle = i \int_X \bar{\omega} \wedge \omega'$  により計量を入れることができます。この計量は、各点での residue が isometry になることで特徴付けられます。(Grothendieck の dualizing sheaf の構成) もう一つは、Riemann base を使うやり方で、 $\det(\text{Im}(\text{周期行列}))$  だけ違います。そこで、 $\Omega^{\otimes n}$  には、計量を入れることができました。次に、tangent  $T_x = (\Omega^1)^{\otimes -1}$  上の計量から、Laplacian が定義され、Green 関数が定義できます。これを使い、 $X$  上の divisor  $D$  に対して、 $\mathcal{O}_X(D)$  上に計量が定義できますが、 $c_1(\mathcal{O}_X(D))$  は

$\frac{\deg \mathcal{L}}{2g} c_1(\Omega^1)$  になります。  $D' = D + (f)$ ,  $f$  は  $X$  上の有理函数とすると、 $\mathcal{O}_X(D) \xrightarrow[\sim]{f} \mathcal{O}_X(D')$  となり、それぞれの上に述べた計量は、この対応で *isometry* になります。(以上 [F] を参照)

1.3: さて、 $f: X \rightarrow S$  をコンパクト Riemann 面の族とします。 $\mathcal{L}$  を  $X$  上の線束とし、Hermite 計量  $\|\cdot\|$  が与えられているとします。今  $S$  上に線束  $\det Rf_* \mathcal{L}$  を次の様に定義します。各点  $\Delta \in S$  に対して、

$$(\det Rf_* \mathcal{L})_\Delta = \left( \bigwedge^{\max} H^0(X|_\Delta; \mathcal{L}|_\Delta) \right) \otimes \left( \bigwedge^{\max} H^1(X|_\Delta; \mathcal{L}|_\Delta) \right)^{\otimes (-1)}$$

ここで、 $\bigwedge^{\max}$  は、有限次元線型空間の最大外積の成す一次元空間、とします。 $H^i(X|_\Delta; \mathcal{L}|_\Delta)$  は、一般にはベクトル束になりませんが、各  $\Delta$  では、relative tangent  $T_{X/S} = (\omega_{X/S})^{\otimes -1}$  上の、residue から決まる計量により、 $\|\cdot\|_{L^2, \Delta}$  という計量が  $\det Rf_* \mathcal{L}|_\Delta$  上に定まります。 $\det Rf_* \mathcal{L}$  は正則束になりますが、この計量は、 $H^*$  の次元が変わるところで見れば、 $C^\infty$  になりません。そこで、

$$\|\cdot\|_{Q, \Delta} = (\det' \bar{\partial}_\Delta \bar{\partial}_\Delta^*)^{-1} \|\cdot\|_{L^2, \Delta}$$

(但し、 $\det' \bar{\partial} \bar{\partial}^*$  は、Hermite 作用素  $\bar{\partial} \bar{\partial}^*$  に対して、0でない固有値の積にあたるもので、正確には、作用素の  $\zeta$  函数を使って定義します。くわしくは [BGS] などを参照) とおくと、 $C^\infty$ -Hermite 計量を定めます。しかも、 $c_1(\det Rf_* \mathcal{L}, \|\cdot\|_Q)$  は、次の Grothendieck-Riemann-Roch 型の定理を満たします。( [Q] では vector 束の場合も扱われている )



## 2. Determinant と theta 函数

2.1:  $X$  を scheme とします。  $X$  上のベクトル束  $\mathcal{F}$  に対して、  
 $\det \mathcal{F} = \bigwedge^{\max} \mathcal{F}$  として、線束を定義できます。  $\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{F}'$  に対  
 して、  $\det d: \det \mathcal{F} \rightarrow \det \mathcal{F}'$  が functorial に定義されます。  
 $d$  が同型射ならば、  $\det d$  も同型になりますが、これを  
 $(\det \mathcal{F})^{-1} \otimes \det \mathcal{F}'$  上の section とも言うことができます。一般  
 に、  $\{\mathcal{F}_i\}$  を acyclic なベクトル束の複体とすると、  $\det \mathcal{F} =$   
 $\bigotimes_{i:\text{even}} (\det \mathcal{F}_i) \otimes \bigotimes_{i:\text{odd}} (\det \mathcal{F}_i)^{(-1)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$  が canonical に存在します。  
 acyclic でない場合、さらに一般の perfect complex ([SGA6, III])  
 に対しても次のようなことが成り立ちます。

i)  $0 \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow 0$  (exact) に対して、  
 canonical, functorial な同型

$$i: \det \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\sim} \det \mathcal{F}_0 \otimes \det \mathcal{F}_2$$

が存在する。これは上の  $\det$  の拡張になっている。

ii)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{F}_{00} & \rightarrow & \mathcal{F}_{01} & \rightarrow & \mathcal{F}_{02} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{F}_{10} & \rightarrow & \mathcal{F}_{11} & \rightarrow & \mathcal{F}_{12} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{F}_{20} & \rightarrow & \mathcal{F}_{21} & \rightarrow & \mathcal{F}_{22} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

行・列 exact

に対して、二つの canonical な同型、タテにつぶすのと、ヨコにつぶすのは同じである。つまり次は可換。

$$\begin{array}{ccc}
 \det \mathcal{F}_{00} \otimes \det \mathcal{F}_{02} \otimes \det \mathcal{F}_{02} \otimes \det \mathcal{F}_{22} & \xrightarrow[\sim]{(\mathcal{F})_0 \otimes (\mathcal{F})_2} & \det \mathcal{F}_{10} \otimes \det \mathcal{F}_{12} \\
 \downarrow \scriptstyle (2\text{番目と3番目を交換して}) \\
 \scriptstyle (\exists \mathcal{G})_0 \otimes (\exists \mathcal{G})_2 & & \downarrow \scriptstyle (\mathcal{F})_1 \\
 \det \mathcal{F}_{01} \otimes \det \mathcal{F}_{21} & \xrightarrow[\sim]{(\exists \mathcal{G})_1} & \det \mathcal{F}_{11}
 \end{array}$$

iii)  $\det, i$  は base change と可換。

さらに、上の三つの性質と、適当な normalization の条件が、 $\det, i$  を特徴付けることも分かります。(以上 [KM]<sub>0</sub>)

さて、 $f: X \rightarrow S$  を proper, flat とすると、 $X$  上の perfect complex  $\mathcal{F}^\bullet$  に対して、 $\det Rf_* \mathcal{F}^\bullet$  を定めることができます。 $X$  上の exact な複体  $0 \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow 0$  に対して、 $\det Rf_* \mathcal{F}_i$  の間に、i), ii), iii) のような関係が成り立ちます。

つまり  $\det Rf_* \mathcal{F}^\bullet$  が acyclic であれば、canonical な section が存在するわけです。

2.2:  $X \xrightarrow{f} S$  を、smooth proper な射で、fiber が一次元であるとします。仮定として、section  $a: S \rightarrow X$  があるとします。 $\mathcal{L}$  を  $X$  上の line bundle として、 $\det Rf_* \mathcal{L}$  が知りたいのですが、 $\deg \mathcal{L} = g-1$  の時、 $\det Rf_* \mathcal{L}$  は、

acyclic になり、section が存在します。これが theta 函数になります。それは次のような意味です。

$S$  上の Picard scheme  $\text{Jac}^{g-1}$  と Poincaré sheaf  $\mathcal{P}^{(a)}$ , ( $a$  によって normalization を与えられて決まるので、こう書きます。) が存在し、 $[\mathcal{L}]: S \rightarrow \text{Jac}^{g-1}$  があって、 $\mathcal{L} \cong (\text{id} \times [\mathcal{L}])^* \mathcal{P}^{(a)} \otimes p^* a^* \mathcal{L}$ 。但し、同型は、 $a$  によっての normalization を決めてやることにより一意に定まります。すると

$$\begin{aligned}\det Rf_* \mathcal{L} &\cong \det Rf_* ((\text{id} \times [f])^* \mathcal{P}^{(a)} \otimes f^* a^* \mathcal{L}) \\ &\cong [f]^* \det R\pi_{2*} \mathcal{P}^{(a)} \otimes (a^* \mathcal{L})^{\otimes (g-1)}\end{aligned}$$

つまり、Poincaré sheaf に対して、 $\det R\pi_{2*}$  を考えれば良い。

ところで、determinant の誘導する section が、 $H^0(X; \mathcal{L}) = 0$  の時、初等的に定義されますので、 $\det R\pi_{2*} \mathcal{P}^{(a)} \cong \mathcal{O}_J(-m\Theta)$

$\Theta$  は theta divisor がすぐに分かりますが、semi-continuity の議論と一次元性が利いて ([K])

$$(\text{Mumford}) \quad \det R\pi_{2*} \mathcal{P}^{(a)} \cong \mathcal{O}_J(-\Theta)$$

が成り立ちます。

他の degree  $\neq 1$  は、 $\mathcal{O}_X(n(a(S)))$  を使って平行移動させます。

2.3:  $\det Rf_* \mathcal{L}$  は、theta 函数と elementary factor  $a^* \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{O}(+a(s))$  に、canonical を同型があることを見ましたが、\* の最後の式は、これから簡単に出来ます。この同型は、 $a$  の取り方によりますが、これは Green 函数の不定性と同じものです。