

Distance Regular graphs of valency $k=5$

大阪教育大学 平木 彰 (Akira Hiraki)

Let Γ be a connected undirected simple finite graph.

$\partial(x, y)$: distance of (x, y) (the length of shortest paths)

$d = \max \{ \partial(x, y) \mid x, y \in \Gamma \}$; diameter of Γ

$$\Gamma_i(x) = \{ v \in \Gamma \mid \partial(x, v) = i \} \quad (x \in \Gamma)$$

$$D_j^i(x, y) = \Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y) \quad (x, y \in \Gamma)$$

$$\Gamma: \text{Distance-regular} \stackrel{\text{DEF}}{\iff} |D_j^i(x, y)| = p_{ij}^l$$

depends only on $l = \partial(x, y)$.

$c_i = p_{i-1}^i$, $a_i = p_{ii}^i$, $b_i = p_{i+1}^i$; intersection numbers.

$k = b_0 = |\Gamma_1(x)|$; valency of Γ

$$\begin{bmatrix} * & c_1 & c_2 & & c_i & & c_{d-1} & c_d \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & b_2 & & b_i & & b_{d-1} & * \end{bmatrix}$$

; intersection array of Γ .

問題

Γ : distance-regular graph of valency $k=5$
 に対して どのような intersection array が 可能か

上の問題について わかるところを 述べる。

Intersection number に 関する 基本的性質

- 1) $1 = c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{d-1} \leq c_d \leq k$.
- 2) $k = b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_{d-2} \geq b_{d-1} \geq 1$.
- 3) $c_i + c_i + b_i = k$.
- 4) $c_i \leq b_j$, for $i+j \leq d$.
- 5) p_{ij}^{ℓ} : non-negative integers .

上の性質より $k=5$ の distance regular graph の intersection array の 第 j 列 に 現われる parameter は 次のものに限る

$$\begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ * \end{bmatrix} .$$

ここで 実在 する D.R.G. of $k=5$ の intersection array をあげておく

$$\begin{array}{llll} \textcircled{1} \begin{bmatrix} * & 1 \\ 0 & 4 \\ 5 & * \end{bmatrix} & \textcircled{2} \begin{bmatrix} * & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & * \end{bmatrix} & \textcircled{3} \begin{bmatrix} * & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & * \end{bmatrix} & \textcircled{4} \begin{bmatrix} * & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & * \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \textcircled{5} \begin{bmatrix} * & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & * \end{bmatrix} & \textcircled{6} \begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & * \end{bmatrix} & \textcircled{7} \begin{bmatrix} * & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & * \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \textcircled{8} \begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & * \end{bmatrix} & \textcircled{9} \begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & * \end{bmatrix} & \textcircled{10} \begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 & * \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \textcircled{11} \begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & * \end{bmatrix} & \textcircled{12} \begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 1 & * \end{bmatrix} & \textcircled{13} \begin{bmatrix} * & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & * \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \textcircled{14} \begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & * \end{bmatrix} & \textcircled{15} \begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & * \end{bmatrix} \end{array}$$

以下、左下 〇 かれた 番号で 同じ array を 表わすものとある。

LEMMA 1.

$$\text{If } \square_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textcircled{1} \text{ or } \textcircled{5}$$

LEMMA 2

$$\begin{array}{l} \text{If } \square_1 = 0 \\ \square_2 > 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \textcircled{2} \text{ or } \textcircled{3} \text{ or } \textcircled{4} \text{ or } \textcircled{7} \text{ or } \textcircled{13}$$

LEMMA 3.

$$\begin{array}{l} \text{If } \square_1 = 0 \\ \square_2 = 1 \\ \square_2 > 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \textcircled{10} \text{ or } \textcircled{6}$$

or

$$\textcircled{A} \begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & * \end{bmatrix}$$

上にあげられた ① の array は 存在は 確認 されていないが 非存在も 証明 されていないものも ひとつ である。

LEMMA 4

$$\begin{array}{l} \text{If } \square_1 = \square_2 = 0 \\ \square_2 = 1 \\ \square_3 > 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \textcircled{8} \text{ or } \textcircled{11} \text{ or } \textcircled{12} \text{ or } \textcircled{15}$$

LEMMA 5

$$\text{If } \square_1 = \square_2 = 0$$

$$\square_2 = \square_3 = 1$$

$$\square_3 > 0$$

 $\Rightarrow$ 非存在

よ、 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ の parameter が r 個 続くと仮定し, ($r \geq 3$)
以下 $r+1$ 番目の parameter により 考察ある。

$r+1$ 番目 に 現われる 可能性 があるのは

$$\begin{bmatrix} * & 1 & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 5 & \underbrace{4 \quad \cdots \quad 4}_r & & & \vdots \end{bmatrix}_{r+1 \text{ 番目}} \quad \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square_d \\ \square_d \\ * \end{bmatrix} \\ \textcircled{A} & \textcircled{B} & \textcircled{C} & \textcircled{D} & \textcircled{E} & \textcircled{F} & \textcircled{G} \end{matrix}$$

の 7 つ に なる。

LEMMA 6

$$\textcircled{G} \quad \begin{bmatrix} \square_d \\ \square_d \\ * \end{bmatrix} \Rightarrow \square_d = 5 \quad \text{and} \quad r = 3 \text{ or } 5$$

$$\therefore \Gamma : \textcircled{9} \text{ or } \textcircled{14}$$

LEMMA 7

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 4 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \\ \textcircled{F} \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} * & 1 & & 1 & 4 & & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 5 & 4 & & 4 & 1 & & 1 & * \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_r \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_s$

$$0 < s < r \leq 81$$

LEMMA 8

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right] \\ \textcircled{D} \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} * & 1 & & 1 & 2 & & 2 & \square_d \\ 0 & 0 & & 0 & 2 & & 2 & \square_d \\ 5 & 4 & & 4 & 1 & & 1 & * \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_r \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_s$

$$0 < s \leq r+1, \quad \square_d = 2 \text{ or } 4$$

LEMMA 9

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right] \\ \textcircled{B} \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} * & 1 & & 1 & 1 & 2 & & 2 & \square_d \\ 0 & 0 & & 0 & 2 & 2 & & 2 & \square_d \\ 5 & 4 & & 4 & 2 & 1 & & 1 & * \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_r \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_s$

or

$$s \leq r+1 \quad \square_d = 2, 4$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} * & 1 & & 1 & 1 & 2 & 4 & & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 2 & 0 & & 0 & 0 \\ 5 & 4 & & 4 & 2 & 1 & 1 & & 1 & * \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_r \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_s$

$$0 < s \leq r/2$$

LEMMA 10

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textcircled{C}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & \square_d \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & \dots & 3 & 2 & \dots & 2 & \square_d \\ 5 & \underbrace{4}_{r} & \underbrace{4}_{s} & 1 & \underbrace{1}_{t} & 1 & 1 & 1 & * \end{bmatrix}$$

$$\square_d = 1, 2, 4 \quad (\square_d = 1 \Rightarrow t = 0)$$

$$t \leq r, \quad s \leq r$$

or

$$\begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & \underbrace{4}_{r} & \underbrace{4}_{s} & 1 & \underbrace{1}_{t} & 1 & 1 & 1 & * \end{bmatrix}$$

and one of the following hold.

- ① $r = t$
- ② $s = 1, \quad t < r \leq 2t+2$
- ③ $2t+3 \leq r$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textcircled{A} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textcircled{E}$$

に関してはいまだところ。特に強力な条件は導びかれていない。