

W^* -力学系のコンパクト群拡大について

熊本大理 岡 幸正 (Yukimasa OKA)

力学系のコンパクト群拡大の非可換化を考察する。まず、エルゴード的 W^* -力学系のコンパクト群拡大がエルゴード的であるための必要十分条件を与え、次に W^* -力学系のコンパクト群拡大を構成し、この例へ応用する。

1. M をフォン・ノイマン環, φ を M 上の忠実, 正則な状態とし, $L^2(M, \varphi)$ を内積 $(x|y)_\varphi = \varphi(y^*x)$ による M の完備化とする。 M の自己同形写像 α が状態 φ を保存するとき, (M, φ, α) を (不変) W^* -力学系という。 W^* -力学系 (N, ψ, β) が (M, φ, α) と同値であるとは M から N への同形写像 Φ が存在して $\varphi = \psi \circ \Phi$, $\alpha = \Phi^* \circ \beta \circ \Phi$ をみたすときをいう。 $\mathcal{U}$ を $\mathcal{U}x = \alpha(x)$ ($x \in M$) によって定義される $L^2(M, \varphi)$ 上のユニタリー作用素とする。フォン・ノイマン環 M はヒルベルト空間

$L^2(M, \varphi)$ 上で作用するフォン・ノイマン環と自然に同一視できる。 $M^\alpha = \{x \in M \mid \alpha(x) = x\} = \mathbb{C}1$ のとき (或いは $L^2(M, \varphi)^\alpha = \{\xi \in L^2(M, \varphi) \mid U\xi = \xi\} = \mathbb{C}1$ のとき), (M, φ, α) はエルゴード的であるという。 σ をコンパクト可換群 G の M 上の連続な作用とし, $\varphi \circ \sigma_g = \varphi$ ($g \in G$) をみたすとする。 (M, φ, α) が W^* -力学系で, G のある自己同形写像 κ に対して $\sigma_g \circ \alpha = \alpha \circ \sigma_{\kappa(g)}$ ($g \in G$) をみたすならば, α は M の作用 σ による不動点部分環 M^σ の自己同形写像 $\alpha|_{M^\sigma}$ をひきおこす。この $\alpha|_{M^\sigma}$ は状態 $\varphi|_{M^\sigma}$ を保つ。 W^* -力学系 (N, ψ, β) が $(M^\sigma, \varphi|_{M^\sigma}, \alpha|_{M^\sigma})$ と同値であるとき, (M, φ, α) は (N, ψ, β) の κ による (G, σ) -拡大であるという。 Γ を G の双対群とする。 $\gamma \in \Gamma$ が G の自己同形写像 κ に関して n -周期的であるとは $\gamma\kappa \neq \gamma, \dots, \gamma\kappa^{n-1} \neq \gamma$, かつ $\gamma\kappa^n = \gamma$ をみたすときをいう。

2. W^* -力学系のコンパクト可換群拡大のエルゴード性の判定条件として, 次の結果が得られる。

定理 1. (M, φ, α) をあるエルゴード的 W^* -力学系の G の自己同形写像 κ による (G, σ) -拡大とする。このとき, (M, φ, α) がエルゴード的でないための必要十分条件は

自然数 n , κ に関して n -周期的な $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$ 及び $\xi_\gamma \in L^2(M, \varphi)$, $\xi_\gamma \neq 0$ が存在して

$$U^n \xi_\gamma = \xi_\gamma, \quad U_g \xi_\gamma = \langle g, \gamma \rangle \xi_\gamma \quad (g \in G)$$

をみたすことである。ここに U, U_g は $Ux = \alpha(x)$, $U_g x = \sigma_g(x)$ ($x \in M$) によって定義される $L^2(M, \varphi)$ 上のユニタリー作用素である。

この定理の証明は次の補題による。

補題 1. (M, φ, α) を W^* -カテゴリー系, σ をコンパクト可換群 G の M 上への連続な作用とし, G のある自己同形写像 κ に対して

$$\varphi \circ \sigma_g = \varphi, \quad \sigma_g \circ \alpha = \alpha \circ \sigma_{\kappa(g)} \quad (g \in G)$$

をみたすとする。 $\mathcal{V}_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$) は $U_g \xi = \langle g, \gamma \rangle \xi$ ($g \in G$) をみたす $\xi \in L^2(M, \varphi)$ 全体とする。このとき

$$(1) \quad L^2(M, \varphi) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \oplus \mathcal{V}_\gamma$$

$$(2) \quad \xi \in \mathcal{V}_\gamma \text{ ならば } U\xi \in \mathcal{V}_{\gamma\kappa}.$$

3. 次に W^* -カテゴリー系のコンパクト可換群拡大を構成し, この例のエルゴード性の判定に定理1を応用する。

(M, φ, α) を W^* -カテゴリー系とし, U を $Ux = \alpha(x)$ ($x \in M$) に

よって定義される $\mathcal{H}_\varphi = L^2(M, \varphi)$ 上のユニタリー作用素とする。 M を $\mathcal{H}_\varphi$ 上で作用するフォン・ノイマン環と自然に同一視する。 G をコンパクト可換群, Γ をその双対群とする。 κ を G の自己同形写像, θ を Γ の M 上への作用, u を Γ から M のユニタリー群 M^u の中への写像で条件 $u_{\gamma\gamma'} = u_\gamma \theta_{\gamma\kappa}(u_{\gamma'})$, $\alpha \circ \theta_\gamma = \text{Ad } u_\gamma \circ \theta_{\gamma\kappa} \circ \alpha$ ($\gamma, \gamma' \in \Gamma$) をみたすとする。 $L^2(\mathcal{H}_\varphi, \Gamma)$ 上のユニタリー作用素 $\tilde{U}$ を $\xi \in L^2(\mathcal{H}_\varphi, \Gamma)$ に対し, $(\tilde{U}\xi)(\gamma) = \theta_{\gamma^{-1}}(u_{\gamma\kappa^{-1}}) \tilde{U}\xi(\gamma\kappa^{-1})$ ($\gamma \in \Gamma$) によって定義する。このとき

補題 2. $\tilde{\alpha} = \text{Ad } \tilde{U}$ は $M \rtimes_\theta \Gamma$ の自己同形写像である。ただし $M \rtimes_\theta \Gamma$ は M の θ に関する Γ による接合積である。

補題 3. σ を G 上の θ の双対作用とする。このとき, $\sigma_g \circ \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} \circ \sigma_{\kappa(g)}$ ($g \in G$)。

補題 4. ε を $\varepsilon(\tilde{x}) = \pi_\varphi^{-1}(\int_G \sigma_g(\tilde{x}) dg)$ によって定義される $\tilde{M} = M \rtimes_\theta \Gamma$ から M 上への条件付期待値とし, $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \varepsilon$ とする。このとき, $\tilde{\varphi}$ は $\tilde{M}$ 上の忠実, 正則状態で, σ 及び $\tilde{\alpha}$ に関して不変である。

以上より 次の結果を得る。

定理 2. $(\tilde{M}, \tilde{\varphi}, \tilde{\alpha})$ は (M, φ, α) の κ に関する (G, σ) -拡大である。

定理 1 の応用として 次の結果を得る。

定理 3. (M, φ, α) をエルゴード的 W^* -力学系とし、 $(\tilde{M}, \tilde{\varphi}, \tilde{\alpha})$ を上のような (M, φ, α) の κ に関する (G, σ) -拡大とする。このとき $(\tilde{M}, \tilde{\varphi}, \tilde{\alpha})$ がエルゴード的であるための必要十分条件は 自然数 n , κ に関して n -周期的な $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$ 及び $\xi \in L^2(M, \varphi)$, $\xi \neq 0$ が存在して

$$U^n \xi = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-i-1}(u_{\gamma \kappa^i}) \xi$$

を満たすことである。ただし $\prod_{i=0}^{n-1} a_i = a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$ 。

この定理の証明は定理 1 及び次の補題による。

補題 5. $\tilde{U}, \tilde{U}_g$ を $\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{\alpha}(\tilde{x})$, $\tilde{U}_g \tilde{x} = \sigma_g(\tilde{x})$ ($\tilde{x} \in \tilde{M}$) によって定義される $L^2(\tilde{M}, \tilde{\varphi})$ 上のユニタリー作用素とする。 n を自然数とし、 $\gamma \in \Gamma$ を $\gamma \neq 1$, κ に関して n -周期的とする。このとき、次の条件は同値である。

(i) $\xi \in L^2(M, \varphi)$, $\xi \neq 0$ が存在して

$$U^n \xi = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-i-1}(u_{g^i}) \xi$$

をみたす。

(ii) $\xi_g \in L^2(\tilde{M}, \tilde{\varphi})$, $\xi_g \neq 0$ が存在して

$$\tilde{U}^n \xi_g = \xi_g, \quad \tilde{U}_g \xi_g = \langle g, g \rangle \xi_g \quad (g \in G)$$

をみたす。

定理 3 から 次のことが直ちに従う。

系 1. κ が恒等的ならば, $(\tilde{M}, \tilde{\varphi}, \tilde{\omega})$ がエルゴード的である必要十分条件は, $\gamma \in \Gamma$, $\xi \in L^2(M, \varphi)$ に対して $U\xi = u_\gamma \xi$ ならば $\gamma = 1$ または $\xi = 0$ をみたすことである。

系 2. 作用 θ が $u_\gamma = \text{Ad } U(w_\gamma) w_{g\kappa} \in M$ ($\gamma \in \Gamma$) をみたす Γ の $L^2(M, \varphi)$ 上のユニタリー表現 U によって引きおこされる時, $(\tilde{M}, \tilde{\varphi}, \tilde{\omega})$ がエルゴード的であるための必要十分条件は 任意の $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$ に対して, γ が κ に関して非周期的であることである。

[1] Oka, Y., On a compact abelian group extension of

a W^* -dynamics, to appear in Kumamoto J. Sci. (Math.), no. 2, vol. 16 (1985).

[2] Osikawa, M., Notes on minimality and ergodicity of compact abelian group extension of dynamics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 13 (1977), 159-165.