

The Fisher information metric and Poisson kernels over negatively curved Riemannian manifolds

筑波大学数理物質科学研究科 伊藤光弘 (Mitsuhiro Itoh)

筑波大学数理物質科学研究科 宍戸雄一 (Yuichi Shishido)

1. Fisher 情報計量

1.1 (M, h) をコンパクトな向き付けられた n -次元 C^∞ Riemann 多様体とする. $h = \sum h_{ij} dx^i dx^j$ は Riemann 計量で, 単位体積をもつ体積要素を dv であらわすとする. すなわち dv は Riemann 体積要素の M の体積分の 1 とする: $dv = (\text{Vol}(M))^{(-1)} \sqrt{\det(h_{ij})} dx^1 \cdots dx^n$.

Fisher 情報行列 (g_{ij}) の一般化である Fisher 情報計量 g を確率測度の空間 $\mathcal{P}(M)$ の上に定義する. M 上の C^∞ 正值確率測度 $\mu = p(x)dv(x)$ の全体を $\mathcal{P}(M)$ であらわす:

$$\mathcal{P}(M) = \{ \mu = p(x)dv(x) \mid p \in C^\infty(M), p(x) > 0, \int_M p(x)dv(x) = 1 \} \quad (1)$$

Fisher 情報計量を定義するまえに, $\mathcal{P}(M)$ の位相等について簡単に述べる.

測度 μ_o を一つ固定する. 任意の確率測度 μ は $\mu = \mu_o + \tau$, $\tau = q(x)dv(x)$, $\int_M \tau = 0$ と書ける. すなわち $\mathcal{P}(M) \subset \mu_o + \mathcal{Q}(M)$, ここに

$$\mathcal{Q}(M) = \{ \tau = q(x)dv(x) \mid q \in C^\infty(M), \int_M q(x)dv(x) = 0 \} \quad (2)$$

さらに関数 $q(x)$ と n -形式 $q(x)dv(x)$ を同一視し, $C^\infty(M)$ を k -階以下の導関数が L^2 -可積分な関数からなる関数空間として完備化した空間を $W_k^2(M)$ とする. $\mathcal{Q}_k^2(M) = \{ \tau = q(x)dv(x) \mid q(x) \in W_k^2(M), \int_M \tau = 0 \}$ とおくと, $\mathcal{Q}_k^2(M)$ は $W_k^2(M)$ の閉部分ベクトル空間となる. $\mathcal{P}_k^2(M)$ をアフィン空間 $\mu_o + \mathcal{Q}_k^2(M)$ の部分集合で密度関数がいたるところ正值となる n -形式 $p(x)dv(x)$ 全体とする. $k > n/2$ とする. Sobolev 不等式から $\mathcal{P}_k^2(M)$ は開集合になり, $\mathcal{Q}_k^2(M)$ をモデルとする無限次元多様体となる.

今後断りなく添数 k などは省略し $\mathcal{P}(M)$, $\mathcal{Q}(M)$ と略記する.

各確率測度 $\mu = p(x)dv(x)$ は多様体 $\mathcal{P}(M)$ の点とみなされる. 曲面上の点に接線ベクトル, 接平面が考えられるように, 点 $\mu = p(x)dv(x)$ での接ベクトル, 接ベクトル空間が定まる. 実際に, 点 $\mu = p(x)dv(x)$ での接ベクトルは $\tau = q(x)dv(x)$ であって $\int_M \tau = \int_M q(x)dv(x) = 0$ をみたすものとしてあらわされる. 無限次元ベクトル空間 $\mathcal{Q}(M)$ が点 μ での接ベクトル空間 $T_\mu \mathcal{P}(M)$ を与える. τ が接ベクトルである理由: t をパラメータとする M での測度の曲線: $\mu + t\tau, |t| < \varepsilon$, を考えると, $\mathcal{P}(M)$ 内の曲線であり, $t=0$ での速度ベクトルが τ であるから.

定義 1.1 (Fisher 情報計量) $T_\mu \mathcal{P}(M)$ 上の正定値内積 g_μ を次で定義する:

$$g_\mu(\tau_1, \tau_2) = \int_M \frac{d\tau_1}{d\mu} \frac{d\tau_2}{d\mu} \mu = \int_M \frac{q_1(x)}{p(x)} \frac{q_2(x)}{p(x)} p(x) dv(x), \quad (3)$$

ここで $\tau_i = q_i(x)dv(x)$, $i = 1, 2$ であり,

$$\frac{d\tau_i}{d\mu} = \frac{q_i(x)}{p(x)}, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

$g = \{g_\mu | \mu \in \mathcal{P}(M)\}$ を Fisher 情報計量という.

1.2 注. a. 多様体 M は必ずしもコンパクトでなくてもよい. $W_k^2(\mathbf{R}^n)$ を n -次元実数空間 $\mathbf{R}^n$, 上の急減少関数のなす空間 $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ を Sobolev ノルムで完備化した空間とする. $W_k^2(\mathbf{R}^n)$ をモデルとする確率測度のなす空間 $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ が考察可能である. [G] 参照.

b. Fisher 情報行列 (g_{ij}) の解釈: パラメータ空間 $\Xi \subset \mathbf{R}^m$ から $\mathcal{P}(M)$ への埋め込み写像が与えられたとき, Fisher 情報行列は Fisher 情報計量の引き戻し, すなわちパラメータによる微分が与える接ベクトルの, Fisher 情報計量による内積とみなすことができる: $\mu = p(x; \xi)dv$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ のとき $\tau_i = \partial p / \partial \xi_i$ より $d\tau_i / d\mu = p^{-1} \times \partial p / \partial \xi_i = d \log p(x; \xi) / d\xi$ より $g_{ij} = g_\mu(\tau_i, \tau_j)$. [A-N] を参照のこと.

1.3 例. $N(\mu, \sigma^2)$ を期待値 μ , 分散 σ^2 の正規分布とする. $(\xi_1, \xi_2) = (\mu, \sigma)$ をパラメータにもつ $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ に属する確率測度の族である. Fisher 情報行列 (g_{ij}) ; $g_{11} = 1/\sigma^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 2/\sigma^2$. 計量としては $\sum g_{ij} \xi_i \xi_j = (1/\sigma^2)(d\mu^2 + 2d\sigma^2)$ とあらわされ, パラメータ空間 $\{(\mu, \sigma) | -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma\}$ はガウス曲率 -2 の双曲平面となる. この事実は 甘利俊一先生から直接伺った.

1.4 Fisher 情報計量の幾何的性質については次の定理が基本的である.

定理 (T.Friedrich [F]).

(i) Fisher 情報計量の Levi-Civita(Riemann) 接続 ∇ は次で与えられる:
点 $\mu \in \mathcal{P}(M)$ で

$$\nabla_{\tau_1} \tau = \left(\frac{d\tau}{d\mu} \cdot \frac{d\tau_1}{d\mu} - \int_M \frac{d\tau}{d\mu} \cdot \frac{d\tau_1}{d\mu} \mu \right) \mu \quad (5)$$

$$\tau, \tau_1 \in T_\mu \mathcal{P}(M).$$

(ii) g の断面曲率は一定でその値は $1/4$.

(iii) 向きを保つ M の微分同相写像からなる群 $\mathcal{D}^+(M)$ が $\mathcal{P}(M)$ に推移的に作用する ($\psi \in \mathcal{D}^+(M)$ の作用は $\psi: \mu \mapsto \psi^* \mu$, すなわち n -形式 μ の ψ による引き戻し):

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{D}^+(M) / \mathcal{K},$$

$\mathcal{K}$ はある $\mu \in \mathcal{P}(M)$ を固定する自己同相写像 $\psi \in \mathcal{D}^+(M)$ の全体のなす部分群.

(iv) 測地線に関して完備ではない.

この定理については [Sh-1] をも参照のこと.

1.5 注. 離散ケース:

$$\mathcal{P} = \{ \mu = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{R}^3 \mid p_i > 0, \sum_i p_i = 1 \} \quad (6)$$

とし、その上の Fisher 情報計量を求める. $\mathcal{P}$ は $\mathbf{R}^3$ 内の平面 $x+y+z=1$ の第一象限部分をさす. $\mathcal{P}$ は開 2-単体である. 点 $\mu = (p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{P}$ での接ベクトル空間は

$$T_\mu \mathcal{P} = \{ \tau = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3 \mid \sum_i v_i = 0 \}. \quad (7)$$

$\frac{d\tau}{d\mu} = \left(\frac{v_1}{p_1}, \frac{v_2}{p_2}, \frac{v_3}{p_3} \right)$ に注意して

$$g_\mu(\tau, \tau') = \int_M \frac{d\tau}{d\mu} \frac{d\tau'}{d\mu} \mu = \frac{1}{p_1} v_1 v'_1 + \frac{1}{p_2} v_2 v'_2 + \frac{1}{p_3} v_3 v'_3$$

ここで接ベクトル $\tau = (1, 0, -1)$, $\tau' = (0, 1, -1)$ を Fisher 情報計量に代入. $g_{11} = g_\mu(\tau, \tau)$, $g_{12} = g_\mu(\tau, \tau')$, $g_{22} = g_\mu(\tau', \tau')$ を求めると

$$g_{11} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3}, \quad g_{12} = g_{21} = \frac{1}{p_3}, \quad g_{22} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$$

より, 点 μ において

$$\begin{aligned} g &= g_{11}dp_1^2 + 2g_{12}dp_1dp_2 + g_{22}dp_2^2 \\ &= \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3}\right)dp_1^2 + \frac{2}{p_3}dp_1dp_2 + \left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)dp_2^2 \end{aligned}$$

変数変換して $p_1 = s^2$, $p_2 = t^2$ とおき, さらに $s = r \cos \theta$, $t = r \sin \theta$, $0 < r < 1$, $0 < \theta \leq 2\pi$ とおくと

$$g = \frac{4}{1-r^2}dr^2 + 4r^2d\theta^2$$

これはガウス曲率 $K = \frac{1}{4}$ の 2 次元球面 (半径 2) の一部分をあらわす. 平坦な 2-単体が Fisher 情報計量的には一様に曲がって見えることになる. ガウス曲率は Riemann 多様体の断面曲率なので, このことは $\mathcal{P}(M)$ 上の Fisher 情報計量の断面曲率の値が一定値 $\frac{1}{4}$ であることと符合する.

1.6 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(M)$ 上の Fisher 情報計量に関して双対接続が定義できる. 3 階共変対称テンソル T を

$$T: T_\mu \mathcal{P} \times T_\mu \mathcal{P} \times T_\mu \mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{R}; \quad T(\tau^1, \tau^2, \tau^3) = \int_M \left(\frac{d\tau^1}{d\mu} \frac{d\tau^2}{d\mu} \frac{d\tau^3}{d\mu} \right) \mu \quad (8)$$

と定めると, 任意実数 t について接続

$$\nabla^t = \nabla - tT, \quad \nabla^{-t} = \nabla + tT \quad (9)$$

は捩れなしの互いに双対な接続である. [Shi] 参照.

2. 負曲率多様体と Poisson 核

2.1 (X, h) を単連結, 完備 n -次元 Riemann 多様体で, 次の負曲率条件をみたすものとする:

$$-b^2 \leq K_Y \leq -a^2 < 0 \quad (10)$$

ここに a, b は正定数. K_Y は任意の断面 Y についての断面曲率である. Cartan-Hadamard の定理より, 負曲率条件から (X, h) は n -次元ユークリッド空間と微分同相である.

2.2 例. n -実双曲空間 (D^n, h_o) : 単位円板 Poincaré モデル

$$D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| < 1\}, \quad h_o = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2 \quad (11)$$

上半空間モデルもある. n -実双曲空間は定曲率空間なので $K_Y = -1$.

曲率条件 2.1 は Poisson 核が定義されるための必要条件である.

X 上の測地線は, 以下すべて単位スピードかつ向きを持った測地線とする. このような測地線を正規な測地線とよぶ. 測地線の負曲率多様体上での基本的性質等については, [E], [S] 参照のこと.

2.3 定義 (測地線の漸近同値). 向きをもった単位速度, 半開測地線 $c_1 = c_1(t)$, $c_2 = c_2(t)$, $0 \leq t < \infty$ が漸近同値とは, 距離 $d(c_1(t), c_2(t))$ が t について上に有界であるときをいう. このとき $c_1 \sim c_2$ とかく.

$\mathcal{G}(X)$ で向きをもった単位スピード, 半開測地線全体の集合とし, 同値関係 $\sim$ で類別した商空間 $\mathcal{G}(X)/\sim$ を理想境界, または無限遠境界といい, ∂X とあらわす.

基点 $x_o \in X$ を固定する. ∂X は x_o での接ベクトル空間の単位接球面 $U_{x_o}X = \{v \in T_{x_o}X \mid |v| = 1\}$ と同一視できる. 理由は任意の元 $\theta = [c] \in \partial X$ に対し一意的に基点を出発する半開測地線 γ で $\theta = [\gamma]$ となるものが存在する. よって ∂X はつねに基点に関する単位接球面と同一視される. 結果として, ∂X は $n-1$ 次元球面 S^{n-1} とみなされる. さらに $X \cup \partial X$ に錐位相をいれることにより X のコンパクト化を与える. 位相の入れ方については [E], [S] を参照.

2.4 n -次元実双曲空間 (D^n, h_o) の理想境界: この場合理想境界 (原点 o を基点とする) はまさに o 中心, 半径 1 の球面 $\partial D^n = S^{n-1}$ である.

2.5 古典的 Dirichlet 問題との類推として無限遠 Dirichlet 問題が考えられる ([P] を参照). (X, h) の Laplacian $\Delta = -\sum_i h^{ij} \nabla_i \nabla_j$ について $\Delta u = 0$ をみたす関数 $u: X \rightarrow \mathbf{R}$ を調和関数という. 理想境界 ∂X 上で与えられた関数と一致し X において調和な関数を求める問題を (無限遠) Dirichlet 問題という.

定理 (Anderson, Sullivan). (X, h) は 2.1 の条件をみたすものとする. 任意の $\psi \in C^0(\partial X)$ にたいし,

$$\Delta u = 0 \text{ in } X, \quad u|_{\partial X} = \psi \quad (12)$$

をみたす関数 $u \in C^\infty(X) \cap C^0(X \cup \partial X)$ がただ一つ存在する. [Sch-Y] を参照のこと.

同一視 $\partial X = U_{x_0} X = S^{n-1}$ のもとに ∂X 上の単位体積標準測度を $d\theta$ であらわす:

$$d\theta = \frac{1}{\text{Vol}(S^{n-1})} d\theta^1 \wedge \cdots \wedge d\theta^{n-1} \quad (13)$$

ここに $\{d\theta^i\}$ は $U_{x_0} X = S^{n-1}$ の, 向きに同調した局所正規直交基 $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ の双対基.

Dirichlet 問題の解 u は, 2.1 の条件をみたす (X, h) にたいして, Poisson 核による積分表示をもつことが知られている ([Sch-Y]).

2.6 定義 (Poisson 核). 各 $\theta \in \partial X$ について定まった関数 $\Phi(x, \theta) \in C^0(X \cup \partial X \setminus \{\theta\})$ は, $x \in X$ について調和関数であり, さらに次をみたすとき基点において正規化された Poisson 核という:

1. $\Phi(x, \theta) > 0$ for any $x \in X$,
2. $\Phi(x_0, \theta) = 1$,
3. $\lim_{x \rightarrow \theta} \Phi(x, \theta) = \infty$,
4. $\theta' \in \partial X, \theta' \neq \theta \implies \lim_{x \rightarrow \theta'} \Phi(x, \theta) = 0$.

解 $u = u(x)$ は Poisson 積分表示をもつ:

$$u(x) = \int_{\partial X} \Phi(x, \theta) \psi(\theta) d\theta \quad (14)$$

2.7 例. 実双曲空間 (D^n, h_o) の中心 o を基点とする正規化された Poisson 核は

$$\Phi(x, \theta) = \left(\frac{1 - |x|^2}{|x - \theta|^2} \right)^{n-1}, \quad x \in D^n, \theta \in \partial D^n \quad (15)$$

ここに $|\cdot|$ は $D^n \subset \mathbf{R}^n$ の標準ノルム.

定理 (Schoen-Yau [Sch-Y]). 曲率条件 2.1 をみたす (X, h) に対して Poisson 核の存在と一意性がいえる.

命題 2.1 ([I-Sh], [Sh-2]). Poisson 核 $\Phi(x, \theta)$ は, 固定点 $x \in X$ にたいして理想境界 ∂X 上の確率密度関数を与える: すなわち $\mu = \Phi(x, \theta) d\theta$ は $\mathcal{P}(\partial X)$ の元である.

証明. ∂X 上恒等的に 1 に等しい関数 ψ についての Dirichlet 問題の解 u は明らかに恒等的に 1 に等しい関数である. よって Poisson 積分表示から

$$1 = \int_{\partial X} \Phi(x, \theta) d\theta(\theta), \quad (16)$$

すなわち $\Phi(x, \theta) d\theta(\theta)$ は $\mathcal{P}(\partial X)$ の元である.

2.8 定義. Poisson 核写像 $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(\partial X)$ を $\varphi: x \mapsto \Phi(x, \theta) d\theta$ で定義する.

2.9 注. 重心写像 $b: \mathcal{P}(S^1) \rightarrow D^2$ について議論するため Douady & Earle は写像 φ を実双曲平面に対して定義した ([D-Ea]). Besson, Courtois & Gallot は X から $L^2(\partial X, d\theta)$ への, Poisson 核写像 φ と類似の写像を定義し, (X, h) の対称空間としての特徴づけを行っている ([B-C-G]).

3. Fisher 情報計量と Poisson 核写像

3.1 $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(\partial X)$ は X の点 x をパラメータとする ∂X 上の確率測度の族を与える. Fisher 情報計量 g のこの写像 φ による引き戻し φ^*g を考察する. そのために写像の微分写像: $d\varphi: T_x X \rightarrow T_\mu \mathcal{P}(\partial X)$, $\mu = \varphi(x)$ と, 以下に述べる幾何学的に定義された Busemann 関数を調べる必要がある.

3.2 定義 (Busemann 関数). (X, h) は曲率条件 2.1 をみたす非コンパクト完備 Riemann 多様体とする. $\theta \in \partial X$ に対し X 上の関数 $x \mapsto B(x, \theta)$ を

$$B(x, \theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(c(t), x) - t), \quad (17)$$

で定義する. $B(x, \theta)$ を, 基点 x_0 についての Busemann 関数という. ここに $c(t)$ は基点 x_0 を出発し, θ に到達する正規測地線; $c(0) = x_0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \theta$ Busemann 関数 $B(x, \theta)$ のみたす性質:

1. $B(x_0, \theta) = 0$,
2. $\lim_{x \rightarrow \theta} B(x, \theta) = -\infty$,
3. $\lim_{x \rightarrow \theta'} B(x, \theta) = +\infty$, $\theta' \neq \theta$

Busemann 関数 $B(x, \theta)$ は変数 $x \in X$ について C^2 -級である ([S]). 負曲率完備多様体上の Busemann 関数の基本的性質については [E], [S] を参照のこと.

3.3 さて単連結, 負曲率完備 Riemann 多様体 (X, h) が階数 1 の非コンパクト型対称空間であると仮定する. すると次の定理が成り立つ.

定理 3.1 ([I-Sh],[Sh-2]). 階数 1, n -次元非コンパクト型対称空間 (X, h) に対して, Poisson 核写像 φ は埋め込みであり, φ による Fisher 情報計量 g の引き戻し φ^*g は次をみたす:

$$\varphi^*g = \frac{\rho^2}{n} h \quad (18)$$

いいかえると

$$g_{\varphi(x)}(d\varphi(u), d\varphi(v)) = \frac{\rho^2}{n} h_x(u, v), \quad u, v \in T_x X, x \in X \quad (19)$$

ここに $\rho = \rho_{(X, h)}$ は (X, h) の体積エントロピーと呼ばれる量で, (X, h) 内の測地球 $B(x; r)$ の体積の指数増大度を表す:

$$\rho(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \text{Vol}(B(x; r)), \quad x \in X, \quad (20)$$

対称空間の場合, 空間が等質的なので ρ は x に依存しない量となる.

3.4 この定理の主張は, (X, h) の接ベクトルの内積を Poisson 核写像を通して Fisher 情報計量 g で測っても本来の計量 h で測っても定数倍の違いしかないということである. しかも定数は体積エントロピーなる幾何学量で与えられる.

証明は以下に示すように対称空間の等長変換群に関する推移性, Poisson 核と Busemann 関数の関係式, および等長変換が理想境界 ∂X 上ひきおこす変換の Jacobian の Poisson 核表示式を用いる.

3.5 対称空間の定義は [p.170, H] を参照のこと. 幾何学的典型的空間である n -次元球面, n -次元ユークリッド空間, n -次元実双曲空間を包摂する完備 Riemann 多様体 (X, h) で, 各点 x にたいして等長変換 $s_x \in I(X, h)$ で次を満たすようなものが存在するとき (X, h) を対称空間という:

$$s_x \circ s_x = \text{id}_X \quad (X \text{ の恒等変換}) \quad \text{かつ } x \text{ は } s_x \text{ の孤立した固定点である.}$$

ここに $I(X, h)$ は等長変換 (計量を保つ微分同相変換) の全体, 等長変換群を表す. 実際には s_x は点 x を通る測地線を逆向きにする変換, すなわち測地対称で与えられる ([p.170, H]). 実数が正, 零, 負数に分かれるように, 対称空間もコンパクト型, ユークリッド型, 非コンパクト型に分類される. このうち負曲率で曲率条件 2.1 をみたすのは非コンパクト型のもので階数 1 のものに限られることが知られている. 階数 1 の非コ

コンパクト型対称空間は4種類ある：実双曲空間 $H_{\mathbf{R}}^n$, 複素双曲空間 $H_{\mathbf{C}}^n$, 4元数双曲空間 $H_{\mathbf{H}}^n$, 8元数双曲空間 $H_{\mathbf{Q}}^n$.

次元は $\dim H_{\mathbf{F}}^n = n \cdot \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{F}$, $\mathbf{F}$ は各双曲空間に対応する体.

体積エントロピーは $\rho = n + \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{F} - 2$. [B-C-G] を参照のこと.

3.6 階数1の非コンパクト型対称空間の Poisson 核 $\Phi(x, \theta)$ は次であらわされる ([B-C-G]) :

$$\Phi(x, \theta) = \exp(-\rho B(x, \theta)) \quad (21)$$

この事実より, まず Poisson 核写像 φ は単射. なぜならば, $\varphi(x) = \varphi(y)$, $x \neq y$ と仮定する. 2点 x, y を結ぶ正規測地線 $c = c(t), t \geq 0, c(0) = x$, の定める理想境界 ∂X 上の点を θ とし, 正規化した Busemann 関数 $B(\cdot, \theta)$ を考えると, $B(z, \theta) = B_c(z, \theta) + d(x, x_0)$, $z \in X$, とあらわされる ([E], [S] を参照). ここに $B_c(z, \theta)$ は測地線 c に関する Busemann 関数である. したがって2点 x, y での $B(\cdot, \theta)$ の値は異なり, 上の Poisson 核表示から Poisson 核の値も異なる. これは矛盾. よって φ は単射.

3.7 対称空間 (X, h) のもつ著しい性質として, 等長変換群 $I(X, h)$ が (X, h) に推移的に作用する: x_0 を基点 (原点) としたとき, 任意の点 x に対して x_0 を x に写す等長変換 $\gamma \in I(X, h)$ があること.

3.8 一般的設定に戻って, (X, h) を曲率条件 2.1 をみたす単連結完備 Riemann 多様体とする. このとき次がいえ.

等長変換 $\gamma \in I(X, h)$ は測地線 $c = c(t)$ を測地線 $\gamma \circ c = \gamma(c(t))$ に移し, なおかつ距離をたもつ; $d(\gamma(x), \gamma(y)) = d(x, y)$, ので漸近的同値な2測地線 c, c' は漸近的同値2測地線 $\gamma \circ c, \gamma \circ c'$ に移される. すなわち ∂X の変換 (同じ記号 γ であらわす) が定まる:

$$\gamma : \partial X \longrightarrow \partial X; \theta = [c] \mapsto \gamma(\theta) = [\gamma \circ c]. \quad (22)$$

3.9 重要な事実と記号の約束: 変換 $\gamma : \partial X \longrightarrow \partial X$ は ∂X 上の $(n-1)$ -形式を $(n-1)$ -形式に引き戻す操作 γ^* により $\mathcal{P}(\partial X) \subset \Omega^{n-1}(\partial X)$ の変換を引き起こす. $\Omega^{n-1}(\partial X)$ は $\partial X = S^{n-1}$ 上の $(n-1)$ -形式のなすベクトル空間である. ここで写像 $\gamma : \Omega^{n-1}(\partial X) \longrightarrow \Omega^{n-1}(\partial X)$ を

$$\gamma(\mu) := (\gamma^{-1})^*(\mu) \quad (23)$$

で定義する. すると次に示すように左作用がえられる:

$$(\gamma \circ \gamma_1)(\mu) := \gamma(\gamma_1(\mu)), \quad \gamma, \gamma_1 \in I(X, h) \quad (24)$$

定理 (M.Bourdon([B])). 等長変換 $\gamma \in I(X, h)$ が引き起こす理想境界 ∂X の変換 γ は次の Jacobian 表示式をもつ:

$$\gamma^*(d\theta(\theta')) = \Phi(\gamma^{-1}(x_o), \theta) d\theta(\theta); \quad \theta' = \gamma(\theta)$$

ここに x_o は正規化された Poisson 核の基点. すなわち右辺の Poisson 核関数は左辺の正規化標準体積要素 $d\theta$ の γ による引き戻し (Jacobian に相当) の密度をあたえる. たとえば γ が基点を固定する変換 ($\gamma(x_o) = x_o$) とすると $\gamma^*(d\theta(\theta')) = \Phi(x_o, \theta) d\theta(\theta) = d\theta(\theta)$ となる. このことは, γ が x_o での接ベクトル空間の等長的線形変換であるという事実, 同一視 $\partial X = U_{x_o} X$ および $d\theta$ が単位接球面 $U_{x_o} X$ 上の標準体積要素であるという事実より, $d\theta$ が γ で不変となることと符合する.

Bourdon の公式から正規化された Poisson 核について変換公式がえられる ([B-C-G]):

$$\Phi(\gamma(x), \theta) = \Phi(x, \gamma^{-1}(\theta)) \Phi(\gamma(x_o), \theta) \quad (25)$$

命題 3.2 ([I-Sh],[Sh-2]). Poisson 核写像 $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(\partial X)$ は X の等長変換 γ と可換である:

$$\varphi(\gamma(x)) = \gamma(\varphi(x)), \quad x \in X \quad (26)$$

すなわち

$$\Phi(\gamma(x), \theta) d\theta = \gamma(\Phi(x, \theta) d\theta), \quad x \in X. \quad (27)$$

命題 3.3 ([I-Sh],[Sh-2]). 等長変換 $\gamma \in I(X, h)$ が引き起こす理想境界上の確率測度の空間 $\mathcal{P}(\partial X)$ の変換は情報計量 g に関して等長変換となる:

$$g_{\gamma(\mu)}(d\gamma(\tau_1), d\gamma(\tau_2)) = g_{\mu}(\tau_1, \tau_2), \quad \tau_i \in T_{\mu} \mathcal{P}(\partial X), \quad i = 1, 2, \quad \mu \in \mathcal{P}(\partial X)$$

3.9 命題の証明. $\mu = m(\theta) d\theta$ とおく. さらに $\tau_i = f_i(\theta) \mu \in T_{\mu} \mathcal{P}(\partial X)$, $i = 1, 2$ とおく. ∂X の変換としてみた $\gamma \in I(X, h)$ の微分写像 $d\gamma: T_{\mu} \mathcal{P}(\partial X) \rightarrow T_{\mu} \mathcal{P}(\partial X)$ は写像 $\gamma^{-1}: \partial X \rightarrow \partial X$ による ∂X 上の $(n-1)$ -形式の引き戻しに他ならない: $d\gamma(\tau_i) = (\gamma^{-1})^*(\tau_i)$. 計算すると, $\gamma(\mu) = m(\gamma^{-1}(\theta)) \gamma(d\theta) = m(\gamma^{-1}(\theta)) \Phi(\gamma(x_o), \theta) d\theta$, $\tau_i = f_i(\theta) \mu$ より

$$d\gamma(\tau_i) = \gamma(\tau_i) = f_i(\gamma^{-1}(\theta)) \gamma(\mu)$$

よって

$$\frac{d\gamma(\tau_i)}{d\gamma(\mu)} = f_i(\gamma^{-1}(\theta)) \cdot$$

したがって

$$\begin{aligned} g_{\gamma(\mu)}(d\gamma(\tau_1), d\gamma(\tau_2)) &= \int_{\partial X} \frac{d\gamma(\tau_1)}{d\gamma(\mu)} \cdot \frac{d\gamma(\tau_2)}{d\gamma(\mu)} \gamma(\mu) \\ &= \int f_1(\gamma^{-1}(\theta)) f_2(\gamma^{-1}(\theta)) m(\gamma^{-1}(\theta)) \Phi(\gamma(x_o), \theta) d\theta \end{aligned}$$

ここで

$$(\gamma^{-1})^*(d\theta) = \Phi(\gamma(x_o), \theta) d\theta$$

より $\theta' = (\gamma^{-1})^*(\theta)$ と変数変換すると, 積分は

$$\int_{\theta' \in \partial X} f_1(\theta') f_2(\theta') m(\theta') d\theta'$$

これは Fisher 情報計量の定義より $g_{\mu}(\tau_1, \tau_2)$ に等しい. よって命題は示された.

3.10 定理の証明. 等長変換群の推移性により原点 x_o で Poisson 核写像 φ の微分写像 $d\varphi : T_{x_o}X \rightarrow T_{\mu}\mathcal{P}(\partial X)$, $\mu = \varphi(x_o)$ が所与の等式をみたすことを示せばよい. $\varphi(x) = \Phi(x, \theta) d\theta = \exp(-\rho B(x, \theta)) d\theta$ および $B(x_o, \theta) = 0$ より $u \in T_{x_o}X$ を任意単位接ベクトルとすれば

$$\begin{aligned} d\varphi(u) &= -\rho dB(\cdot, \theta)(u) \exp(-\rho B(x_o, \theta)) d\theta \\ &= -\rho dB(\cdot, \theta)(u) d\theta, \quad u \in T_{x_o}X \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \varphi^*g(u, u) &= \rho^2 \int_{\partial X} (dB(\cdot, \theta)(u))^2 d\theta \\ &= \rho^2 \int (h(u, c'(0))(dB(\cdot, \theta)(c'(0))))^2 d\theta \end{aligned} \quad (29)$$

である. 第2の等号は x_o で正規化された Busemann 関数の性質 $dB(\cdot, \theta)(c'(0)) = -1$ を用いた. ここで $c(t)$ は始点 x_o , $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \theta$ なる正規測地線である.

$$\varphi^*g(u, u) = \rho^2 \int (h(u, c'(0)))^2 d\theta \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
&= \rho^2 \int_w h(u, w)^2 dw \\
&= \rho^2 \int_{w \in \partial X = S^{n-1}} h(u, w)^2 dw \\
&= \rho^2 \int_{w \in \partial X = S^{n-1}} \xi_1^2 dw
\end{aligned}$$

ここで ξ_1 は w の, $T_{x_0}X$ の正規直交基底 $\{e_1 = u, e_2, \dots, e_n\}$ に関する成分である. 球面積分公式 $\int_{S^{n-1}} \xi_1^2 dw = \frac{1}{n}$ より右辺は

$$\frac{\rho^2}{n} = \frac{\rho^2}{n} h(u, u).$$

証明おわり.

3.11 注. 定理より Poisson 核写像ははめ込みとなり, 3.6 で示した単射性からさらに埋め込みでもある.

定理 3.12 (I-Sh), [Sh-2]). (X, h) を階数 1 の非コンパクト型対称空間とする. すると Poisson 核写像は極小埋め込み写像である.

3.11 定理の証明. Poisson 核写像の同変性により, 基点 x_0 にて極小性を示せばよい. $T_{x_0}X$ の正規直交基底を $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ とする. $d\varphi(u) = -\rho dB(\cdot, \theta)(u)d\theta$ なので, 基点 x_0 では $d\varphi(e_i) = -\rho\theta_i d\theta$. ここに θ_i は同一視 $\partial X = U_{x_0}X$ のもとでの θ の e_i -成分. Fisher 情報計量の Levi-Civita 接続の公式より

$$\nabla_{d\varphi(e_i)} d\varphi(e_j) = \frac{1}{2} \left(\rho^2 \theta_i \theta_j - \rho^2 \int_{S^{n-1}} \theta_i \theta_j d\theta \right) d\theta. \quad (31)$$

$\sum \theta_i^2 = 1$ より

$$\sum_{i=1}^n \nabla_{d\varphi(e_i)} d\varphi(e_i) = 0. \quad (32)$$

よって Poisson 核写像は極小である.

4. Poisson 核の幾何学

4.1 解析的に定義される Poisson 核と測地線的幾何学的に定義される Busemann 関数の関係は相性がよい. 特に階数 1 の非コンパクト型対称空間群では顕著である. 実際

$$\Phi(x, \theta) = \exp(-cB(x, \theta)) \quad (33)$$

なる関係式 (c は定数) をもつ. そこで, この関係式をみたす単連結完備負曲率多様体は階数 1 の対称空間かという逆問題を考えよう. この特徴付け問題について次の定理がえられる.

定理 4.2 ([I-Sh],[Sh-2]). (X, h) を単連結完備 n -次元負曲率 Riemann 多様体で曲率条件 2.1 をみたすものとする. $n \geq 3$ かつ (X, h) はコンパクト商をもつ (すなわち $I(X, h)$ の部分群 Γ が存在して商空間 X/Γ はコンパクト C^∞ -多様体となる) と仮定する. もし Poisson 核が

$$\Phi(x, \theta) = \exp(-cB(x, \theta)), \quad (34)$$

(c は定数) で与えられるならば, (X, h) は階数 1 の非コンパクト型対称空間である. さらに c は体積エントロピー ρ に一致する.

証明には次の定理を用いる.

定理 ([B-C-G]). (X, h) を, 連結コンパクト n -次元負曲率 Riemann 多様体とする. X の普遍被覆空間 $\tilde{X}$ が漸近的調和 (すなわち任意のホロ球面の平均曲率が一定である) ならば, $\tilde{X}$ は階数 1 の対称空間である.

定理 4.2 の証明. 点 x での接ベクトル空間 $T_x X$ の正規直交基底を $\{e_i | i = 1, \dots, n\}$ とする. 一般性を失うことなく, x で $\nabla_{e_i} e_j = 0$ としてよい. 関数 $x \mapsto \Phi(x, \theta)$ に Laplacian Δ を作用させると, $\Phi(x, \theta)$ の形から

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(x, \theta) &= - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \Phi(x, \theta) \\ &= -c \{ \Delta B(x, \theta) + c \|\nabla B(x, \theta)\|^2 \} \Phi(x, \theta) \end{aligned} \quad (35)$$

一般的に, Busemann 関数は各点において $\|\nabla B(x, \theta)\| = 1$ ([E],[S] 参照) より,

$$\Delta \Phi(x, \theta) = -c \{ \Delta B(x, \theta) + c \} \Phi(x, \theta). \quad (36)$$

Poisson 核は調和関数なので, 左辺は 0. よって右辺, $\Delta B(x, \theta) = -c$ である.

さてベクトル $\nabla B(x, \theta)$ は θ 中心のホロ球面 $H_x(\theta) = \{y \in X | B(y, \theta) = B(x, \theta)\}$ の x における内向き法線ベクトルである. さらに法線ベクトル $\nabla B(x, \theta)$ についての第二基本形式 Π は点 $y \in H_x(\theta)$ において

$$\begin{aligned} \Pi(v, w) &= -\text{Hess} B(\cdot, \theta)(v, w), \quad v, w \in T_y H_x(\theta) \\ &= -\langle \nabla_v (\nabla B(\cdot, \theta)), w \rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

単位ベクトル e_1 をベクトル $\nabla B(\cdot, \theta)$ ととれることおよび $\nabla B(\cdot, \theta)$ が測地線に接することに注意して

$$\begin{aligned}\Delta B(\cdot, \theta) &= -\langle \nabla_{e_1}(\nabla B(\cdot, \theta)), e_1 \rangle - \sum_{i=2}^n \langle \nabla_{e_i}(\nabla B(\cdot, \theta)), e_i \rangle \quad (38) \\ &= -\sum_{i=2}^n \langle \nabla_{e_i}(\nabla B(\cdot, \theta)), e_i \rangle\end{aligned}$$

この右辺は $-\text{Hess}B(\cdot, \theta)$ の $T_y H_x(\theta)$ でのトレースに等しい. すなわちこれは平均曲率をあらわすので, 平均曲率はホロ球面上一定である. Besson, Courtois, Gallot の定理を適用できて定理の証明が終わる.

4.3 実は定理の逆命題がえられる.

命題 4.3 ([I-Sh],[Sh-2]). (X, h) を単連結, 完備負曲率 Riemann 多様体で, 曲率条件 2.1 をみたすものとする. どのホロ球面の平均曲率も一定でしかも共通の値 $c > 0$ をとるものとする. すると Poisson 核関数は Busemann 関数を指数関数の肩にもつ:

$$\Phi(x, \theta) = \exp(-cB(x, \theta)) \quad (39)$$

証明は次のようにする. 仮定よりホロ球面の平均曲率が一定でしかも共通の値をとるので, さきほどの定理の証明中の議論の逆をたどれば $\Delta B(x, \theta) = -c$ である. ここで新たな関数を $\Psi(x, \theta) = \exp(-cB(x, \theta))$ とおく. 定理の証明の中の議論から $\Psi(x, \theta)$ は x について調和関数である. また Busemann 関数の性質より $\Psi(x, \theta)$ は Poisson 核の性質をみたす. 正規化された Poisson 核の一意性より ([Sch-Y]), $\Psi(x, \theta)$ は正規化された Poisson 核に他ならない.

系 4.4 (X, h) を単連結, 完備負曲率 Riemann 多様体で, 曲率条件 2.1 をみたすものとする. Poisson 核が Busemann 関数を指数関数の肩にもつことと, どのホロ球面の平均曲率も一定でしかも共通の値 c をとるということとは同値である.

5. 残された問題と今後の課題

5.1 問題: 定理 3.1 または定理 3.1 プラス定理 3.12 の結論から逆に (X, h) は階数 1 の対称空間となるか?

5.2 問題: 定理 4.2 においてコンパクト商の仮定がとれるか? 関連して Damek-Ricci 空間なる負曲率をもつ単連結完備 Riemann 等質空間が存

在する. 等質性から曲率条件 2.1 がみたされ, 調和的であるので漸近調和でもある. ホロ球面の平均曲率が共通一定値をとるかどうかわかり, Poisson 核と Busemann 関数の関係性を調べることは興味ある問題である. なぜならば Damek-Ricci 空間はコンパクト商をもたないことが [B-C-G] において示されているので, 定理 4.2 でのコンパクト商の仮定が本質的かどうか検証できることになる.

5.3 熱核 $k(x, y; t)$ は熱方程式の基本解である:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u. \quad (40)$$

Poisson 核と同様に, 熱核写像 $\varphi_t : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$; $\varphi_t(x) = k(x, y; t)dv$ の幾何学が考えられる. Poisson 核写像との違いは値域を X 自身上の確率測度空間 $\mathcal{P}(X)$ にとれるということである. 熱核は確率論的にはまさに Brown 運動そのものである.

5.4 熱核の例. ユークリッド空間 $(X, h) = (\mathbf{R}^n, h_o)$ 上, 熱核 $k(x, y; t)$ は

$$k(x, y; t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\}. \quad (41)$$

[K-K], 6 章参照.

命題 5.1. ユークリッド空間 $(X, h) = (\mathbf{R}^n, h_o)$ に対して Fisher 情報計量の熱核写像による引き戻しは次をみたす:

$$(\varphi_t)^* g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{t^2} \{x_i x_j + 2t \delta_{ij}\} \quad (42)$$

参考文献

- [A-N] S. Amari, H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, Translations of Math. Monographs, 191, AMS, 2000.
- [A-Sch] M.T.Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, *Ann. Math.*, 121(1985).
- [B] M. Bourdon, Structure Conforme au Bord et Flot Géodesique d'un CAT(−1)-espace, *L'Enseignement Mathématique*, t.41 (1995).
- [B-C-G] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, Entropes et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative, *GAF*, 5(1995).

- [D-Ea] E. Douady, C. Earle, Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle, *Acta Math.*, 157(1986).
- [E] P. Eberlein, *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*, The University of Chicago Press, 1944.
- [F] T. Friedrich, Die Fisher Information und symplektische Strukturen, *Math. Nachrichten*, 153(1991).
- [G] P.B.Gilkey, *The Index Theorem and the Heat Equation*, Publish or Perish, 1974.
- [H] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1962.
- [I-Sh] M. Itoh, Y. Shishido, Fisher Information Metrics and Poisson Kernels, submitted .
- [K-K] 北原晴夫, 河上肇, 調和積分論, 近代科学社, 1991.
- [P] イ・ゲ・ペトロフスキー, 偏微分方程式論, 東京図書, 1976.
- [S]. 酒井 隆, リーマン幾何学, 裳華房, 1993.
- [Sch-Y] R. Schoen, S.T. Yau, *Lectures on Differential Geometry*, Conference Proc. and Lecture Note in Geometry and Topology, Intern. Press, 1994.
- [Sh-1] Y. Shishido, Geometry of infinite dimensional statistical manifolds, Master thesis, 2004.
- [Sh-2] Y. Shishido, Differential Geometry of the Fisher Information Metrics and the Space of Probability Measures, Doctor Thesis, 2007.
- [Shi] 志摩裕彦 ヘッセ幾何学, 裳華房, 2001.