

余次元 1 の極小葉層について

東北大理 押切 源一 (Gen-ichi Oshikiri)

1. D.L. Johnson と L.B. Whitt は [2] で、次のような定理を証明している。

[定理 (Theorem 3.1, [2])] M を完備で連結なリーマン多様体で、コンパクトな葉のみからなる余次元 1 の全測地的葉層をもつものとする。このとき、キリングベクトル場 X が $\mathfrak{g}$ に M のある点で接すれば、 M 上到处 X は $\mathfrak{g}$ に接する。

この結果、キリングベクトル場が $\mathfrak{g}$ とその直交方向に分解されること、更に、直交方向には高々一次元しか出てこないことを示している。その応用として、 M の等長変換群の identity component について調べている。ここでは、同様の考察を、少なくとも一つのコンパクトな葉をもつ余次元 1 の極小葉層について行なう。上の定理は、コンパクトな葉の和集合の上において成立していることがわかる (定理 A)。また、キリン

ベクトル場 X がコンパクトな葉 L に横断的な場合は、すべての葉 L に等長的になっていることがわかる (定理 B)。この結果、子に横断的な方向には、高々一次元しかキリングベクトル場が出てこないことがわかる (系)。証明には、Harvey-Lawson [1] にある "geometrically very tight" が本質的な役割を果たす。

以下、出てくるものはすべて C^∞ 級とする。

2. (M, g) を完備で連結な $(n+1)$ 次元リーマン多様体、子 Σ をその上の余次元 1 の葉層で、 M, Σ と向きづけ可能と仮定しておく。 N を子に直交する M 上の単位ベクトル場とし、以上をまとめて (M, Σ, g, N) とかくことにする。子のすべての葉が (M, g) の極小部分多様体になっているとき、 (M, Σ, g, N) を極小葉層という。このとき、 (M, Σ, g, N) 上のキリングベクトル場に対して、次が成り立つ。

〔定理 A〕 (M, Σ, g, N) を極小葉層とする。子はコンパクトな葉を持つと仮定する。 $C(\Sigma)$ で子のすべてのコンパクトな葉の和を表わすことにする。このとき、キリングベクトル場 X が $C(\Sigma)$ のある点で子に接すれば、 X は $C(\Sigma)$ 上到處で子に接する。

コンパクトでない葉に対しては、必ずしも成立しているとは限らない。Johnson-Whitt [2] は、 T^2 上でそのような例を作っている。一方、キリングベクトル場がコンパクトな葉に横断的な場合には、次が成り立つ。

〔定理 B〕 $(M, \mathcal{F}, g, N)$ を極小葉層とする。 $\mathcal{F}$ はコンパクトな葉 L をもつと仮定する。このとき、キリングベクトル場 X が L の一点で $\mathcal{F}$ に横断的なら、 $\mathcal{F}$ のすべての葉はコンパクトで、 X の flow によって L へ等長的にうつされる。

$I_0(M, g)$ で、リーマン多様体 (M, g) の等長変換群の identity component を表わすことにすると、

(系) 定理 A の $(M, \mathcal{F}, g, N)$ に対して、

$$\dim I_0(M, g) \leq \min \{ \dim I_0(L, g|_L) : L \in \mathcal{F} \} + 1.$$

この不等式で等号が成り立てば、 $\mathcal{F}$ のすべての葉はコンパクトで

$$\dim I_0(M, g) = \dim I_0(L, g|_L) + 1$$

となる。ここで、 L は $\mathcal{F}$ の任意のコンパクトな葉。

$\mathcal{F}$ がコンパクトな葉をもたない場合は、必ずしも成り立たない。例えば、 $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^{n+1}, g)$ で n 次元平面からなる全測地的葉層を考えると、

$$\dim I_0(\mathbb{R}^{n+1}, g) > \dim I_0(L, g|_L) + 1$$

となる。

3. 定理の証明の前に、準備として次の命題を証明しておく。これは、余次元 1 の極小葉層は、Harvey-Lawson [1] の意味で “geometrically very tight” になっているということの意味している。

(命題) $(M, \mathcal{F}, g, N)$ を極小葉層とし、 $\mathcal{F}$ はコンパクトな葉 L_0 をもつとする。このとき、 M の恒等写像にホモトピー的な (M, g) の等長変換 ψ は、 L_0 を $\mathcal{F}$ の葉にうつす。

(証明) $\mathcal{F}$ に向きを定めて、向きづけられた $\mathcal{F}$ の接空間 $T_p \mathcal{F}$ を $\vec{T}_p$ で表わす。場合によっては、 $\vec{T}_p \in \wedge^n T_p M$ とみることもある。 $L \in \mathcal{F}$ に対しても $T_p L$ を $\vec{L}_p$ とかくことにする。 $\mathcal{F}$ の向きづけられた局所正規直交基底 $\{\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n\}$ をとる。これに対し、 n -形式 $\chi_{\mathcal{F}}$ を

$$\chi_{\mathcal{F}}(\eta_1, \dots, \eta_n) \equiv \det(\langle \eta_i, \vec{z}_j \rangle)$$

で定義する。但し $\langle \eta_i, \vec{z}_j \rangle = g(\eta_i, \vec{z}_j)$ とする。これは、局所正規直交基底 $\{\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n\}$ のとり方によらず、従って、 M 上の n -形式を定める。このとき、次の (1) ~ (4) が成り立つ。

$$(1) \quad d\chi_{\mathcal{F}} = 0,$$

(2) $\eta_p \in \wedge^n T_p M \in p \in M$ における単位 simple vector とするとき,

$$\chi_{\mathcal{F}}(\eta_p) = 1 \iff \eta_p = \overrightarrow{\mathcal{F}}_p,$$

$$(3) \quad f \in I(M, g) \text{ より } \text{vol}(L_0) = \text{vol}(f(L_0)),$$

$$(4) \quad f \simeq \text{id}_M \text{ より }, \quad [L_0] = [f(L_0)] \in H_n(M; \mathbb{Z}).$$

(2)~(4) は定義より明うか。また, (1) は Kummer [5] による。

よって, $L_0, f(L_0)$ を n -current $(L_0), (f(L_0))$ とみたとき, 定義より, $(L_0)(\chi_{\mathcal{F}}) \equiv \int_{L_0} \chi_{\mathcal{F}} = \text{vol}(L_0),$

$$(2) \text{ より }, \quad (f(L_0))(\chi_{\mathcal{F}}) \equiv \int_{f(L_0)} \chi_{\mathcal{F}} \leq \text{vol}(f(L_0)).$$

(1), (4) によって $(L_0)(\chi_{\mathcal{F}}) = (f(L_0))(\chi_{\mathcal{F}})$ だから,

$$\text{vol}(L_0) = \int_{f(L_0)} \chi_{\mathcal{F}} \leq \text{vol}(f(L_0)).$$

$$(3) \text{ より }, \quad \chi_{\mathcal{F}}(\overrightarrow{f(L_0)}) = 1 \quad \text{a.e. on } f(L_0).$$

$$(2) \text{ より }, \quad \overrightarrow{f(L_0)} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \quad \text{on } f(L_0).$$

よって, $f(L_0) \in \mathcal{F}$ となる。

#

4. 以下, 定理の証明を与える。

(定理 A の証明) $\mathcal{F}_t$ を X の flow とするとき, 命題によって, コンパクトな葉 L に対して, $\mathcal{F}_t(L)$ も $\mathcal{F}$ のコンパクトな葉となる。よって, X がコンパクトな葉 L の一点で L に接すれば, X は L 上刻る所で L に接する (cf. Corollary 2, [4])。

また、 X がコンパクトな葉 L' に L' の一点で横断的なら、 L 上
 到る所で X は L に横断的になっている。

今、 $L \subset C(\mathcal{F})$ で X は L に接し、 $L' \subset C(\mathcal{F})$ で X は L' に横断
 的とすると、次のようにして矛盾が出る (cf [2])。

$\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ を $\gamma(0) \in L$, $\gamma(1) \in L'$ なる L と L' を結ぶ M 上の
 最短測地線とする。 $\langle \gamma(1), X \rangle > 0$ としてよい (< 0 なら
 $-X$ を考えればよい)。 $t > 0$ を十分小さくとると、 $\varphi_t(\gamma)$
 は測地線であって $\varphi_t(\gamma(0)) \in L$ かつ $\varphi_t(\gamma(s)) \in L'$ がある $s < 1$
 について成り立つ。これは γ が L と L' の間の最短測地線であ
 ることに反する。 ~~///~~

(定理 B の証明) φ_t を X の flow とする。 $C(\mathcal{F})$ で、 $\mathcal{F}$
 のすべてのコンパクトな葉の和を表わす。以下、 $C(\mathcal{F})$ が
 M に一致することを示す。

まず、 $C(\mathcal{F})$ が M の開集合になることを示す。 X がコン
 パクトな葉 L の一点で $\mathcal{F}$ に横断的だから、定理 A によって、
 $C(\mathcal{F})$ のすべての点で X は $\mathcal{F}$ に横断的。各コンパクト葉 L
 $C(\mathcal{F})$ に対して、その適当な近傍はコンパクトな葉 $\varphi_t(L)$,
 $-\varepsilon < t < \varepsilon$, でおおわれるから、 $C(\mathcal{F})$ は開集合となる。

次に、 $M - C(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ として矛盾を出す。 $A = M - C(\mathcal{F})$
 とおくと上で示したことにより、 A は閉集合となる。コン

パクトな葉 L に対して $\varphi_t(L)$ もコンパクトな葉となることから $\varphi_t(A) \subset A$ がわかる。 L をコンパクトな葉とすると、 A が閉集合で M が完備であることから、 A と L を結ぶ最短測地線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ で $\gamma(0) \in A$, $\gamma(1) \in L$ なるものが存在する。

$\langle \gamma(1), X \rangle > 0$ と仮定してよい。 $t > 0$ を十分小さくすると、 $\varphi_t(\gamma)$ は $\varphi_t(\gamma(0)) \in A$ なる測地線であり、しかも、 L とはその内点 $\varphi_t(\gamma(s))$, $s < 1$ で交わる。 これは、 γ が A と L を結ぶ最短測地線であることに矛盾する。 よって、 $M = C(\mathcal{F})$ が示された。

定理 A によって、 X は M 上到處所子に横断的であるから、各 $p \in M$ に対し、 $\{\varphi_t(p) : t \in (-\infty, \infty)\}$ は $\mathcal{F}$ のすべての葉と交わる。 よって、 $\mathcal{F}$ のすべての葉は φ_t によって L へ等長的にうつされる。

#

(系の証明) X, Y を M 上のキリングベクトル場とする。もし X と Y が $\mathcal{F}$ のある葉の上で一致すれば、 $\mathcal{F}$ の余次元が 1 であることから、 M 上で X と Y は一致する (Theorem 5.3 [3])。 L をコンパクトな葉とし、 $p \in L$ において $X - cY \in T_p L$ がある定数 c に対して成り立つとする。 $X - cY$ はキリングベクトル場であるから、命題より、 $X - cY$ は L に接する。定理 A によって、 $X - cY$ は $C(\mathcal{F})$ 上で $\mathcal{F}$ に接する。 従っ

て、上の不等式が成り立つ。

次に、等号が成り立っているとすると、コンパクトな葉 L とそれに横断的なキリングベクトル場 X が存在する。従って、定理 B により L のすべての葉はコンパクトで、しかも等長的になっている。従って、等式は $\dim I_0(M, g) = \dim I_0(L, g|_L) + 1$ となる。

参考文献

- [1] R. Harvey, H. B. Lawson, *Calibrated foliations*,
Amer. J. of Math. 104 (1982), 607-633.
- [2] D. L. Johnson, L. B. Whit, *Totally geodesic foliations*,
J. Differential Geom. 15 (1980), 225-235.
- [3] S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*,
Ergebnisse der Math., Band 70, Springer-Verlag. 1972.
- [4] G. Oshikiri, *Jacobi fields and the stability of leaves of codimension-one minimal foliations*, Tôhoku Math. J. 34 (1982).
- [5] H. Rummeler, *Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts*,
Comment. Math. Helv. 54 (1979), 224-239.