

数理解析研究所講義録
等質構造の部分多様体論的研究

円 の 幾 何

名古屋工業大学 工学部 足立 俊 明
Nagoya Institute of Technology Toshiaki ADACHI

§1. 導入

完備リーマン多様体 M 上の弧長で径数づけられた曲線 γ が 曲率 (geodesic curvature) $\kappa_\gamma (\geq 0)$ の circle であるとは

$$(1) \quad \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = -\kappa_\gamma^2 \dot{\gamma}$$

を満たすことを言う。ただし κ_γ は定数とする。定義式 (1) は、曲線 γ に沿った単位ベクトル場 $X = \dot{\gamma}$, Y を使った式

$$(2) \quad \begin{cases} \nabla_X X = \kappa_\gamma Y \\ \nabla_X Y = -\kappa_\gamma X \end{cases}$$

と同値になる。この曲線は、弧長で係数づけられていることから $\|\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}\| = \kappa_\gamma$ を満たす。従って、曲線 γ が $\kappa_\gamma = 0$ の circle であることと測地線であることは同値であり、circle という概念は測地線の概念の一つの拡張になっている。なお、常微分方程式の解の存在性と一意性から、ある点 $p \in M$ における正規直交接ベクトル $u, v \in T_p M$ と定数 $\kappa \geq 0$ とが与えられれば、曲率 κ の circle γ で $\dot{\gamma}(0) = u$, $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}(0) = \kappa v$ を満たす物がただ 1 つ存在する。また、 M の完備性から、曲線 $\gamma(t)$ は $-\infty < t < \infty$ で定義されている。今なぜ circle を考えるのか、少々独善的ではあるがこれまでの結果のいくつかをまとめて報告する。

リーマン幾何学の考察において、測地線が重要な役割を果たすことは改めて言うまでもないことであるが、他の幾何構造の情報を含む曲線を考えることは無意味なのであろうか。例えば、 (M, J) が複素構造 J を持つケーラー多様体である場合、circle γ に対して

$$(3) \quad \tau_\gamma = \langle \dot{\gamma}, J \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \rangle / \|\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}\| = \langle X, JY \rangle$$

は $|\tau| \leq 1$ を満たす定数になる。これを γ の複素れい率 (complex torsion) という。また 4 元数ケーラー多様体 $(M, \{I, J, K\})$ 上の circle γ に対して

$$(4) \quad \tau^2 = \langle X, IY \rangle^2 + \langle X, JY \rangle^2 + \langle X, KY \rangle^2$$

も定数になる。このような多様体において、構造の様子が circle の性質に深く関係していることは十分予想される。ここで circle の congruency について考える。2つの circle γ_1, γ_2 が congruent であるとは、パラメーターの取り替えを除いて等長変換で移り合う、すなわち $\gamma_2(t) = \varphi \circ \gamma_1(t+t_0)$ を満たす等長変換 $\varphi \in Iso(M)$ と定数 t_0 とが存在することと定義する。底多様体 M が複素射影空間または複素双曲空間である場合を考えると、2つの circle γ_1, γ_2 が congruent であるための必要十分条件は、これら circle の曲率と複素れい率の絶対値とが互いに等しいこと ($\kappa_{\gamma_1} = \kappa_{\gamma_2}, |\tau_{\gamma_1}| = |\tau_{\gamma_2}|$) になる ([MO])。従って、(少なくとも複素空間形においては) circle は多様体のある種の幾何学的な情報を与えていると思われる。

§2. 空間形上の circle の様子

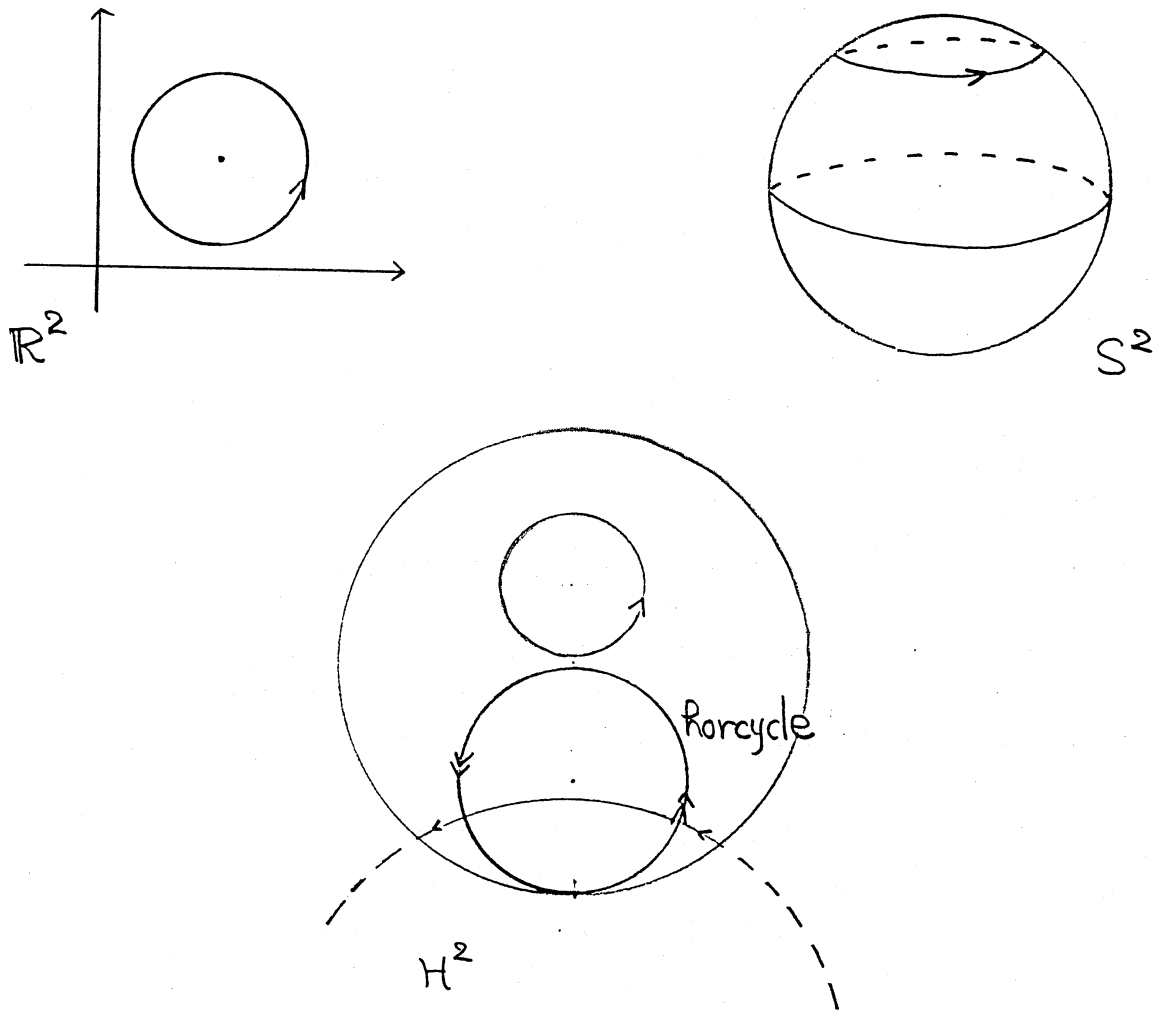
通常、円というと定点から一定の距離にある閉じた曲線を想像するが、ここで述べる circle とはどのようなものであろうか。滑らかな曲線 γ が閉じている (closed) とは

$$(5) \quad \text{すべての } t \text{ について} \quad \gamma(t+t_0) = \gamma(t)$$

という性質を満たす定数 t_0 が存在することをいう。曲線 γ が closed であるとき (5) を満たす最小の正の数 t_0 を γ の長さといって $length(\gamma)$ と表す。閉じていない circle は open であるといって、このとき形式的に $length(\gamma) = \infty$ と表す。

まず実空間形上の circle について簡単に眺めておこう。曲率 c の標準球面 $S^n(c)$ 上の circle は全て閉じていて、曲率が κ であればその長さは $2\pi/\sqrt{\kappa^2 + c}$ である。またユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の circle は日常で使っている円のことであり、すべて閉じていて、その長さは曲率が κ であれば $2\pi/\kappa$ であり、半径は $1/\kappa$ である。一方、曲率 $-c$ の双曲空間 $H^n(-c)$ 上では circle は、曲率が $\kappa > \sqrt{c}$ であれば常に閉じているが、曲率が $\kappa \leq \sqrt{c}$ の場合は非有界な開曲線になる。Hadamard 多様体としての理想境界 (図 1 (c) の位相的な境界と同等) を付加して compact 化すると、曲率が $\kappa \leq \sqrt{c}$ の場合には、極限点 $\gamma(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$, $\gamma(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t)$ が存在する。これらの極限点は $\kappa = \sqrt{c}$ の場合に限り $\gamma(\infty) = \gamma(-\infty)$ になる。この場合には $\rho(\infty) = \gamma(\infty)$ を満たす測地線 ρ と交わるのであれば直交する。そこでこの circle は holocyclic であるということにする。

実空間形上の円の様子



次に複素空間形上の circle を眺めてみると、複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ 上では実ユークリッド空間上と同じ形状をしているが、**non-flat** な場合は多少様子が異なり、有界な circle であっても閉じていないものがある。

命題 1 ([AMU1]) 正則断面曲率 c の複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ 上の曲率 κ_γ の circle γ は

- (1) $\tau_\gamma = \pm 1$ であれば **totally geodesic** に埋め込まれた $\mathbb{C}P^1$ 上に載っていて、長さ $2\pi/\sqrt{\kappa_\gamma^2 + c}$ の閉曲線である。
- (2) $\tau_\gamma = 0$ であれば **totally geodesic** に埋め込まれた $\mathbb{R}P^2$ 上に載っていて、長さ $4\pi/\sqrt{4\kappa_\gamma^2 + c}$ の閉曲線である。
- (3) $0 < |\tau_\gamma| < 1$ であれば、 τ_γ により閉じることも閉じないこともある。

る。閉じるための必要十分条件は、3次方程式

$$c\lambda^3 - (4\kappa_\gamma^2 + c)\lambda + 2\sqrt{c}\kappa_\gamma\tau_\gamma = 0$$

の3解の比が有理数になることである。

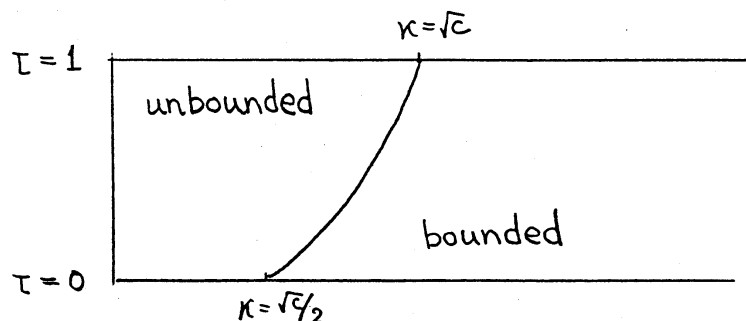
3番目の性質は3節で述べる Naitoh's parallel embedding からわかるが、torus 上の測地線に類似した性質である。

命題2 ([AM1]) 正則断面曲率 $-c$ の複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(-c)$ 上の circle γ について

- (1) $\tau_\gamma = \pm 1$ であれば totally geodesic に埋め込まれた $\mathbb{C}H^1$ 上に載っている。
- (2) $\tau_\gamma = 0$ であれば totally geodesic に埋め込まれた H^2 上に載っている。
- (3) $\kappa(0) = \sqrt{c}/2, \kappa(1) = \sqrt{c}$ を満たす関数 $\kappa(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq 1$) が存在して、
 - a) $\kappa_\gamma > \kappa(|\tau_\gamma|)$ ならば有界である。
 - b) $\kappa_\gamma \leq \kappa(|\tau_\gamma|)$ ならば非有界で、Hadamard 多様体としての理想境界に極限点 $\gamma(\infty), \gamma(-\infty)$ を持つ。
 - c) $\kappa_\gamma \leq \kappa(|\tau_\gamma|)$ ならば $\gamma(\infty) \neq \gamma(-\infty)$ である。
 - d) $\kappa_\gamma = \kappa(|\tau_\gamma|)$ ならば horocyclic である。
- (4) γ が有界である場合、すなわち $\kappa_\gamma > \kappa(|\tau_\gamma|)$ の場合
 - a) $\tau_\gamma = \pm 1$ であれば、長さ $2\pi/\sqrt{\kappa^2 - c}$ の閉曲線である。
 - b) $\tau_\gamma = 0$ であれば、長さ $4\pi/\sqrt{4\kappa^2 - c}$ の閉曲線である。
 - c) $0 < |\tau_\gamma| < 1$ であれば、 τ_γ により閉じることも閉じないこともある。閉じるための必要十分条件は、3次方程式

$$c\lambda^3 - (4\kappa_\gamma^2 - c)\lambda + 2\sqrt{c}\kappa_\gamma\tau_\gamma = 0$$

の3解の比が有理数になることである。



$\kappa(\tau)$ は方程式 $27c^2\kappa^2\tau^2 = (4\kappa - c)^3$ の正の解 κ

以下、ケーラー多様体上の複素れい率 $\tau = \pm 1$ の circle を holomorphic circle と、複素れい率 $\tau = 0$ の circle を totally real circle と呼ぶことにする。

これ以外の空間形、つまり階数 1 の対称空間上の circle に関しては [MT] や [A2] により複素空間形上の circle と同じ性質を持つことが知られている。従って、階数 1 の対称空間は、circle の性質に関して実空間形とそれ以外の non-flat な空間形とに分類される。また階数 2 以上の compact なエルミート対称空間上では、曲率 κ の holomorphic circle の中でも閉じるものと、閉じないものがある ([A8], [AMU2])。

§3. 部分多様体論からの考察

この節で、複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 上の circle がどのように現れるかを部分多様体の立場から考察しておこう。リーマン多様体 N は M の部分多様体とする。ここでは等長埋め込み (isometric embedding) $\iota: N \rightarrow M$ を考える。 N 上の曲線が M 上ではどのように見えるかという問題は以前から研究されている。例えば、全測地的 (totally geodesic) ならば曲線は同じように見える。また ι が円測地的 (circular geodesic) であるとは N 上の測地線 ρ が M では、つまり $\iota \circ \rho$ が、circle に見えることをいう。ここでは、複素射影空間上の circle が自然に現れていることを観察する。

[1] Naitoh's parallel immersion

内藤氏は [N] の中で $S^1 \times S^{n-1}$, $SU(3)/SO(3)$, $SU(3)$, $SU(6)/Sp(3)$, E_6/F_4 という階数 2 の対称空間から複素射影空間への circular geodesic immersion を構成している。このうち代表的な $\iota: S^1 \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^n(4)$ は Hopf fibration $Proj: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n(4)$ を使って、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \iota(e^{i\theta}, (a_1, a_2, \dots, a_n)) \\ &= Proj \left(\frac{1}{3}(e^{-2i\theta/3} + 2a_1 e^{i\theta/3}), \frac{\sqrt{2}}{3}(e^{-2i\theta/3} - a_1 e^{i\theta/3}), \right. \\ & \quad \left. \frac{2}{\sqrt{6}}ia_2 e^{1\theta/3}, \dots, \frac{2}{\sqrt{6}}ia_n e^{1\theta/3} \right) \end{aligned}$$

ただし、 $S^1 \times S^{n-1}$ の計量は S^1 と S^{n-1} の通常計量を使って

$$\langle (u, \xi), (v, \eta) \rangle = \frac{2}{9} \langle u, v \rangle + \frac{2}{3} \langle \xi, \eta \rangle, \quad u, v \in TS^1, \xi, \eta \in TS^{n-1}$$

と定める。なお

$$\psi(e^{i\theta}, (a_1, a_2, \dots, a_n)) = (-e^{i\theta}, (-a_1, -a_2, \dots, -a_n))$$

という $S^1 \times S^{n-1}$ 上の対蹠点同一視により、この immersion は $(S^1 \times S^{n-1})/\psi \rightarrow \mathbb{C}P^n(4)$ という埋め込みを導く。これらの immersion は parallel (第2基本形式平行) であり、 N 上の全ての測地線を $\mathbb{C}P^n(4)$ 上の曲率 $\frac{\sqrt{2}c}{4}$ の circle に写す。

[2] Homogeneous real hypersurface

次に homogeneous real hypersurface 上の測地線が $\mathbb{C}P^n$ 上でどのように見えるかを観察しておこう。homogeneous real hypersurface は [T] により

- (1) A 型: $\mathbb{C}P^k$ を中心とする半径 r の tube (特に $k = n-1$ の場合を AI 型、それ以外を AII 型という)
- (2) B 型: complex quadric Q_{n-1} を中心とする半径 r の tube
- (3) C 型: $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{(n-1)/2}$ を中心とする半径 r の tube
- (4) D 型: complex Grassmann 多様体 $G_{2,5}(\mathbb{C})$ を中心とする半径 r の tube
- (5) E 型: $SO(10)/U(5)$ を中心とする半径 r の tube

に分類される。real hypersurface N の unit normal を n とし $\xi = -Jn$ と表すと、 N が homogeneous であれば ξ は主曲率方向になる。ある点において ξ 方向に出る N 上の測地線は常に ξ 方向にあって $\mathbb{C}P^n$ 上の holomorphic circle に見える。また ξ と直交方向に出る測地線は、やはり常に ξ と直交方向になっていて $\mathbb{C}P^n$ 上の totally real circle に見える。

実は homogeneous real hypersurface はこのような性質で特徴づけられている。

定理 3 ([AKM]) N は $\mathbb{C}P^n$ の real hypersurface とする。 N が homogeneous であるための必要十分条件は、「各点 $p \in N$ において $\mathbb{C}P^n$ では circle に見えるような ξ と直交する測地線の方法は、 ξ と直交する部分空間を生成する」こと、すなわち

$$(\mathbb{R}\xi)^\perp = \{ \{v \in (\mathbb{R}\xi)^\perp \subset T_p N \mid \dot{\rho}_v(0) = v \text{ なる測地線 } \rho_v \text{ は } \mathbb{C}P^n \text{ において circle に見える} \} \}$$

という条件が成り立つことである。

ここで簡単に homogeneous real hypersurface について述べておこう。 $\phi: TN \rightarrow TN$ を $u \in T_p N$ に対して $\langle \phi(u), v \rangle = \langle Ju, v \rangle$ がすべての

$v \in T_p N$ について成り立つように定める。分類で述べた半径を r としたとき、第2基本形式の主曲率になる可能性があるのは

$$a_1 = -\tan r, a_2 = \cot r, a_3 = \frac{1 + \cot r}{1 - \cot r}, a_4 = \frac{1 - \cot r}{1 + \cot r}$$

である。主曲率 a の部分空間を $V(a)$ と表すことにすると

- (1) A 型: $T_p N = V(a_1) \oplus V(a_2) \oplus \mathbb{R}\xi$
- (2) B 型: $T_p N = V(a_3) \oplus V(a_4) \oplus \mathbb{R}\xi$
- (3) C,D,E 型: $T_p N = V(a_1) \oplus V(a_2) \oplus V(a_1) \oplus V(a_2) \oplus \mathbb{R}\xi$

と固有空間に分解される。ただし AI 型の場合 $V(a_2) = \{0\}$ である。ここで $V(a_1), V(a_2)$ は ϕ -invariant、 $\phi(V(a_3)) = V(a_4)$, $\phi(V(a_4)) = V(a_3)$ である。そして foliation $V(a_1) \oplus \mathbb{R}\xi$, $V(a_2) \oplus \mathbb{R}\xi$, $V(a_3), V(a_4)$ はそれぞれ integrable になり、各 leaf は homogeneous real hypersurface N の totally geodesic な部分多様体になる。実は $V(a_3), V(a_4)$ に対する leaf は $\mathbb{C}P^n$ の totally real かつ totally geodesic な部分多様体である $\mathbb{R}P^n$ の totally umbilic な hypersurface になり、 $V(a_1) \oplus \mathbb{R}\xi, V(a_2) \oplus \mathbb{R}\xi$ に対する leaf は $\mathbb{C}P^n$ の holomorphic totally geodesic な部分多様体である $\mathbb{C}P^k$ ($k = \frac{1}{2} \dim(V(a_i))$) の AI 型 real hypersurface になる。そして AI 型の場合、シェイプ作用素 A と ϕ との可換性に注意すると、曲率 $\tan r$ の circle になることが簡単な計算によりわかる。

なお、homogeneous real hypersurface 上の測地線 ρ で $\dot{\rho}(0) \notin \mathbb{R}\xi$ かつ $\dot{\rho}(0) \notin (\mathbb{R}\xi)^\perp$ なるものについて、AI 型では4次の holomorphic helix になる ([AM6])。きちんと計算すれば AII 型では6次の helix になることがわかるであろうと思われるが、A 型以外では曲率が定数ですらない ([M1])。ここではケーラー多様体上の等長変換群の一径数部分群の orbit になっている螺旋を holomorphic helix という (cf. [MA])。

[3] Circle の像

次に複素射影空間を別の空間に埋め込んだとき、複素射影空間上の circle がどのように見えるか考察しておくことにしよう。

まず first standard embedding

$$\iota : \mathbb{C}P^n(c) \xrightarrow{\text{minimal}} S^{n(n+1)-1}\left(\frac{n+1}{2n}c\right) \xrightarrow{\text{umbilic}} \mathbb{R}^{n(n+1)}$$

を考える。この埋め込みは parallel かつ isotropic(すなわち第2基本形式 σ について $\sigma(u, u)/\|u\|^2$ が一定値) であることから、複素射影空間上の

- (1) holomorphic circle γ について $\iota \circ \gamma$ は $\mathbb{R}^{n(n+1)}$ 上の circle

- (2) totally real circle γ について $\iota \circ \gamma$ は $\mathbb{R}^{n(n+1)}$ 上の 4 次の holomorphic helix になる。

first standard embedding はこの性質で特徴付けられて

定理 4 ([AMO1]) non-flat な Kähler 多様体 M を実空間形 X に埋め込んだ ($\iota: M \rightarrow X$) とき、「 M 上の曲率 κ の holomorphic circle がすべて X 上で circle に見える」という性質が成り立つ定数 $\kappa > 0$ が存在するための必要十分条件は、 $M = \mathbb{C}P^n$ かつ ι が first standard embedding であることである。

なお [MT] の結果を用いることで、四元数射影空間 HP^n やケーリー射影平面 CaP^2 の first standard embedding についても同様の特徵付けができる ([AMO1], [AMO2])。

最後に $b(n, p) = \binom{n+p}{p} - 1$ として

$$\iota_{n,p}: \mathbb{C}P^n\left(\frac{c}{p}\right) \ni [z] \mapsto \left[\sqrt{\frac{p!}{\alpha!}} z^\alpha \right] \in \mathbb{C}P^{b(n,p)}$$

で定義される Veronese embedding $\iota_{n,p}$ を考える。ただし $z = (z_0, \dots, z_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ として $z^\alpha = z_0^{\alpha_0} \times \dots \times z_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \alpha_0! \times \dots \times \alpha_n!$ をそれぞれ表す。また、 $[\cdot]$ は homogeneous coordinate とする。このとき

- (1) $\mathbb{C}P^n$ 上の測地線は $\mathbb{C}P^{b(n,p)}$ 上 p 次の螺旋に見え ([MO])、
- (2) $p = 2$ の場合 $\mathbb{C}P^n$ 上の曲率 κ の holomorphic circle は $\mathbb{C}P^{b(n,p)}$ 上で $\kappa \neq \frac{\sqrt{2c}}{4}$ ならば 4 次の holomorphic helix に、 $\kappa = \frac{\sqrt{2c}}{4}$ ならば 3 次の holomorphic helix にみえる ([AM3])。

著者は、一般に $\mathbb{C}P^n$ 上の holomorphic circle は、

- (1) p が奇数の場合には $\mathbb{C}P^{b(n,p)}$ 上で $p+1$ 次の holomorphic helix に見え、
- (2) p が偶数の場合には $\mathbb{C}P^{b(n,p)}$ 上で一般には $p+2$ 次の holomorphic helix に見え、特殊に $p+1$ 次の holomorphic helix に見える

と予想している。

§4. circle の length spectrum

2節で **non-flat** な複素空間形上の circle は閉じるものと閉じないものがあることを述べた。では閉じているものの長さはどのように分布しているのだろうか。実空間形上の circle の場合、

- i) 2つの circle が **congruent** であるための必要十分条件は曲率が等しいこと
 - ii) 曲率により長さが決定していて、また逆に長さから曲率がわかる
- ということから、circle の **congruence class** のパラメーターとして長さを選ぶこともできる。では、複素空間形上の circle の場合はどうであろうか。長さと曲率とを、または長さと複素曲率とを与えれば circle の **congruence class** を決定することができるのだろうか。この問いに関しては次のような否定的な解答が得られている。

定理 5 ([A7],[AM2]) 複素射影空間または複素双曲空間において

- (1) 互いに **congruent** ではない2つの circle γ_1, γ_2 で $\kappa_{\gamma_1} = \kappa_{\gamma_2}$ かつ $length(\gamma_1) = length(\gamma_2)$ なるものが存在する。
- (1') 互いに **congruent** ではない2つの circle γ_1, γ_2 で $\tau_{\gamma_1} = \tau_{\gamma_2}$ かつ $length(\gamma_1) = length(\gamma_2)$ なるものが存在する。
- (2) 長さが λ である曲率 κ の circle の **congruence class** の個数 (multiplicity) $m_\kappa(\lambda)$ は高々有限であるが、 λ を大きくしていくと multiplicity がいくらでも大きいところが存在する。

もう少し説明するためにいくつかの記号を準備しよう。多様体 M 上の circle の **congruence class** 全体の集合を $Cir(M)$ と表し、length spectrum of circle を

$$\mathcal{L} : Cir(M) \ni [\gamma] \mapsto length(\gamma) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

と定める。 $\mathcal{L}$ の像

$$LSpec(M) = \mathcal{L}(Cir(M)) \cap \mathbb{R}$$

を length spectrum of circle ということもある。また、曲率 κ の circle の **congruence class** 全体の集合を $Cir_\kappa(M)$ と表し、 $\mathcal{L}_\kappa$ は $\mathcal{L}$ の $Cir_\kappa(M)$ への制限、 $LSpec_\kappa(M) = \mathcal{L}_\kappa(Cir_\kappa(M)) \cap \mathbb{R}$ とそれぞれ定義する。

複素射影空間と複素双曲空間の length spectrum of circles を考察する上で鍵になるのは、 $\mathcal{L}_\kappa$ の構造が本質的に κ に依らない点である。複素射影空間 $CP^n(c)$ においては、各 κ に対して bijection

$$\Phi_\kappa : Cir_\kappa(CP^n(c)) \setminus \{[\gamma_{\kappa,1}]\} \longrightarrow Cir_{\frac{\sqrt{2c}}{4}}(CP^n(c)) \setminus \{[\gamma_{\frac{\sqrt{2c}}{4},1}]\}$$

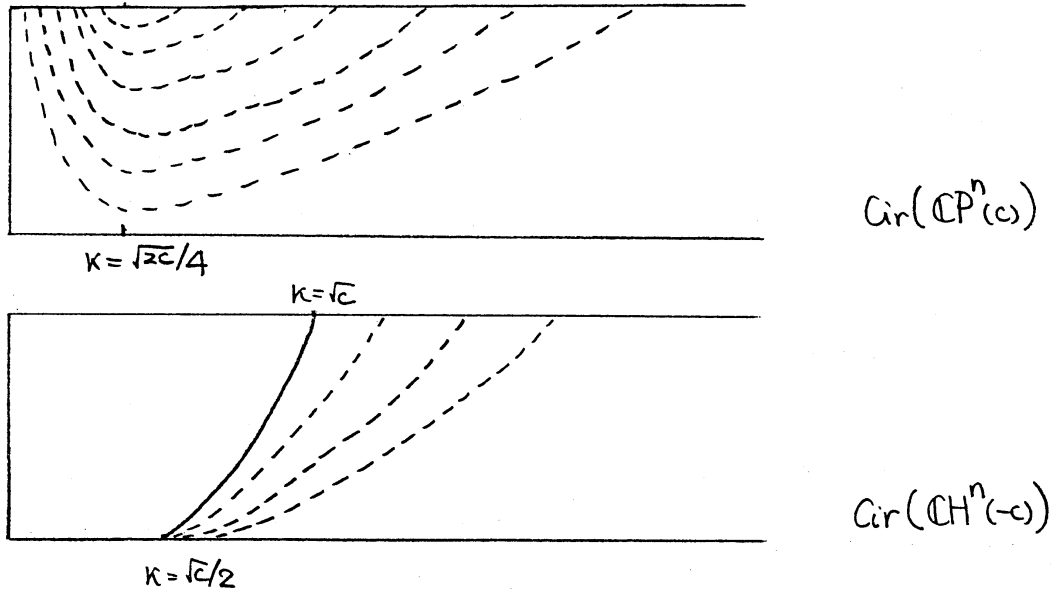
及び定数 C_κ で $\mathcal{L}_\kappa = C_\kappa \cdot \mathcal{L}_{\frac{\sqrt{2c}}{4}} \circ \Phi_\kappa$ を満たすものが存在する。ただし $[\gamma_{\kappa,1}]$ は曲率 κ の holomorphic circle の congruence class を表すものとする。また複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(-c)$ においては、各 $\kappa (> \sqrt{c}/2)$ に対し、曲率 κ を持つ有界な circle の congruence class の集合 $\mathcal{M}_\kappa$ からの bijection

$$\begin{aligned} \Phi'_\kappa : \mathcal{M}_\kappa(\mathbb{C}H^n(-c)) &\longrightarrow \mathcal{M}_{\sqrt{c}}(\mathbb{C}H^n(-c)) \\ &= \text{Cir}_{\sqrt{c}}(\mathbb{C}H^n(-c)) \setminus \{[\gamma_{\sqrt{c},1}]\} \end{aligned}$$

及び定数 C'_κ で $\mathcal{L}_\kappa = C'_\kappa \cdot \mathcal{L}_{\sqrt{c}} \circ \Phi'_\kappa$ を満たすものが存在すし、さらに

$$\Psi : \text{Cir}_{\frac{\sqrt{2c}}{4}}(\mathbb{C}P^n(c)) \setminus \{[\gamma_{\frac{\sqrt{2c}}{4},1}]\} \longrightarrow \text{Cir}_{\sqrt{c}}(\mathbb{C}H^n(-c)) \setminus \{[\gamma_{\sqrt{c},1}]\}$$

という bijection も存在する。



そこで Naitoh's parallel embedding を利用して $L\text{Spec}_{\frac{\sqrt{2c}}{4}}(\mathbb{C}P^n(c))$ を調べると

$$\begin{aligned} L\text{Spec}_{\frac{\sqrt{2c}}{4}}(\mathbb{C}P^n(c)) &= \left\{ \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{c}} \pi, \frac{4}{3} \sqrt{\frac{6}{c}} \pi \right\} \\ &\cup \left\{ \frac{4}{3\sqrt{c}} \pi \sqrt{2(3p^2 + q^2)} \mid p > q, pq \text{ is even,} \right. \\ &\quad \left. p \text{ and } q \text{ are mutually prime} \right\} \\ &\cup \left\{ \frac{2}{3\sqrt{c}} \pi \sqrt{2(3p^2 + q^2)} \mid p > q, pq \text{ is odd,} \right. \\ &\quad \left. p \text{ and } q \text{ are mutually prime} \right\} \end{aligned}$$

となる。bijection の様子を見ることから以下の表の結果が得られる。なお multiplicity $m_\kappa(\lambda) = \#\mathcal{L}_\kappa^{-1}(\lambda)$ の増大度に関して $\log(\log \lambda)$ 以下であることもわかる。

Table for length spectrum of circles of curvature κ

	$\mathbb{C}H^n(-c)$	$\mathbb{C}P^n(c)$
$LSpec_\kappa$	$\emptyset$, if $0 \leq \kappa \leq \frac{\sqrt{c}}{2}$ discrete, unbounded, if $\kappa > \frac{\sqrt{c}}{2}$	discrete, unbounded
multiplicity	$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} m_\kappa(\lambda) = \infty$, if $\kappa > \frac{\sqrt{c}}{2}$	$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} m_\kappa(\lambda) = \infty$
1st length spectrum	$\frac{4\pi}{\sqrt{4\kappa^2 - c}}$, simple, if $\kappa > \frac{\sqrt{c}}{2}$ (length spectrum of totally real circles)	$\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa^2 + c}}$, simple (length spectrum of holomorphic circles)
2nd length spectrum	simple $4\pi\sqrt{\frac{7}{3(4\kappa^2 - c)}}$, if $\frac{\sqrt{c}}{2} < \kappa < \frac{5\sqrt{c}}{4}$ (length spectrum of circles with $\tau = \frac{10(4\kappa^2 - c)^{3/2}}{21\sqrt{21}c\kappa}$) $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa^2 - c}}$, if $\kappa \geq \frac{5\sqrt{c}}{4}$ (length spectrum of holomorphic circles)	$\frac{4\pi}{\sqrt{4\kappa^2 + c}}$, simple (length spectrum of totally real circles)

Table for full length spectrum of circles

	$\mathbb{C}H^n(-c)$	$\mathbb{C}P^n(c)$
$LSpec$	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$
multiplicity $m_{\mathcal{L}}$	finite at each λ monotone increasing polynomial growth left continuous $m_{\mathcal{L}}(\lambda) \geq 2$ $m_{\mathcal{L}}(\lambda) = 2$ if and only if $0 < \lambda \leq \frac{8\pi}{3\sqrt{c}}$	finite at each λ $m_{\mathcal{L}}(\lambda) \geq 1$ $m_{\mathcal{L}}(\lambda) = 1$ if and only if $\frac{2}{\sqrt{c}}\pi < \lambda \leq \frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{c}}\pi$

Table for length spectrum of circles of complex torsion τ

	$\mathbb{C}H^n(-c)$	$\mathbb{C}P^n(c)$
length spectrum of holomorphic circles $LSpec^1$	$(0, \infty)$	$(0, \frac{2\pi}{\sqrt{c}}]$
length spectrum of totally real circles $LSpec^0$	$(0, \infty)$	$(0, \frac{4\pi}{\sqrt{c}})$
$LSpec^\tau, (0 < \tau < 1)$	unbounded discrete	unbounded discrete

§5. 磁場と holomorphic circle

最後に、複素双曲空間上の非有界な holomorphic circle について考察しよう。

既に [A4] でも報告したことであるが、holomorphic circle は物理的な観点で磁場と深く関係している。詳しくは [A4] および [A1],[A5],[A6],[G]

を参照してもらうことにして、ここでは最小限のことを復習しておこう。 $\mathbb{R}^3$ における静磁場の概念の拡張として、リーマン多様体 M 上の閉 2 次形式 $\mathbb{B}$ を磁場という。skew symmetric operator $\Omega_{\mathbb{B}}$ を $v \in T_p M$ に対して $\mathbb{B}(u, v) = \langle u, \Omega_{\mathbb{B}}(v) \rangle$ がすべての $u \in T_p M$ について成り立つように定めると、磁場 $\mathbb{B}$ の作用の下で等速運動をする荷電粒子の運動方程式は

$$(6) \quad \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \Omega_{\mathbb{B}}(\dot{\gamma})$$

となる。特に、 $\mathbb{B}$ が global vector potential を持つ、つまり 1 次微分形式 $\mathbb{A}$ で $d\mathbb{A} = \mathbb{B}$ を満たすものが存在する場合に、path $c: [0, 1] \rightarrow M$ に対して path のエネルギー汎関数 $E_{\mathbb{A}}$ を

$$E_{\mathbb{A}}(c) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \|\dot{c}(t)\|^2 + \mathbb{A}(\dot{c}(t)) \right\} dt$$

と定めると、この方程式 (6) は、 $E_{\mathbb{A}}$ の Euler-Lagrange 方程式になっている。(6) を満たす弧長で径数付けられた曲線を $\mathbb{B}$ -(normal) trajectory と呼ぶ。

M がケーラー多様体の場合、定数 κ に対して $\mathbb{B}_{\kappa} = \kappa \times (\text{Kähler 形式})$ と定めると一様な ($\nabla \Omega_{\mathbb{B}_{\kappa}} = 0$ となる) 磁場である。この磁場をケーラー磁場と呼ぶことにする。ケーラー磁場 $\mathbb{B}_{\kappa}$ に対する運動方程式 (6) を表すと

$$(7) \quad \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \kappa J \dot{\gamma}$$

となって、 $\mathbb{B}$ -trajectory は曲率 $|\kappa|$ の holomorphic circle になっていることがわかる。なお、上半平面 $\mathbb{C}H^1 \cong H^2 = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ の場合 $\mathbb{B}_{\kappa} = \frac{\kappa}{y^2} dx \wedge dy$ で global vector potential $\mathbb{A}_{\kappa} = \frac{\kappa}{y} dx$ を持っている。

$\mathbb{B}$ -trajectory に対しては、測地線の考察の時に考えられた種々の概念が自然に拡張できる。例えば unit sphere bundle の元 $v \in UM$ に対して γ_v は (6) と $\dot{\gamma}(0) = v$ とを満たす弧長で径数付けられた曲線を表すものとして、点 $p \in M$ における magnetic exponential map $\mathbb{B} \exp_p : T_p M \rightarrow M$ を

$$\mathbb{B} \exp_p(u) = \begin{cases} p, & u = 0 \text{ の場合} \\ \gamma_v(\|u\|) & u \neq 0 \text{ の場合, ただし } v = \frac{u}{\|u\|} \end{cases}$$

と定め、magnetic flow $\mathbb{B} \varphi_t : UM \rightarrow UM$ を

$$\mathbb{B} \varphi_t(v) = \dot{\gamma}_v(t)$$

と定義することができる。

複素空間形上のケーラー磁場に関しては magnetic flow は次のようなきれいな性質を持つ。

命題 5 ([A1]) 複素射影空間 $CP^n(c)$ の magnetic flow $\mathbb{B}_\kappa\varphi_t$ は互いに strong smoothly conjugate である。すなわち、可微分写像 $g_\kappa : UM \rightarrow UM$ で

$$g_\kappa^{-1} \circ \mathbb{B}_\kappa\varphi_t \circ g_\kappa = \mathbb{B}_0\varphi_{\sqrt{\kappa^2+ct}/\sqrt{c}}$$

を満たすものが存在する。

命題 6 ([A1]) 複素双曲空間 $CH^n(-c)$ の magnetic flow $\mathbb{B}_\kappa\varphi_t$ は本質的に

- i) rotation flow: $|\kappa| > \sqrt{c}$ の場合
- ii) horocyclic flow: $|\kappa| = \sqrt{c}$ の場合
- iii) hyperbolic flow: $|\kappa| < \sqrt{c}$ の場合

という 3 つの strong smoothly conjugate class に分類される。特に $|\kappa| < \sqrt{c}$ の場合、可微分写像 $g_\kappa : UM \rightarrow UM$ で

$$g_\kappa^{-1} \circ \mathbb{B}_\kappa\varphi_t \circ g_\kappa = \mathbb{B}_0\varphi_{\sqrt{c-\kappa^2}t/\sqrt{c}}$$

を満たすものが存在する。なお、この性質は商空間 $CH^n(-c)/\Gamma$ 上の magnetic flow にも遺伝する。

一般の場合にも magnetic Jacobi 場に関する比較定理から magnetic flow の Anosov 性を導くことができる ([G], (cf. [A3]))。

これらの命題により、unit sphere bundle を考えれば測地流と深く関係し、従って底多様体の幾何学が反映されていることはわかる。しかし、著者はより直接的な関係を導けないのだろうかと考えている。そこで命題 6 を解釈し直しておくことにする。

複素双曲空間の等長変換 $\varphi \in Iso(CH^n(-c)) \setminus \{Id\}$ は空間上のただ 1 つの測地線 ρ を translate する、すなわち $\varphi \circ \rho(t) = \rho(t + \omega_\varphi)$ を満たす正の数 ω_φ が存在する。[A1] における命題 6 の証明を注意深く読むと次が得られる。

定理 7 複素双曲空間 $CH^n(-c)$ 上の $|\kappa| < \sqrt{c}$ なるケーラー磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ について、等長変換 $\varphi \in Iso(CH^n(-c)) \setminus \{Id\}$ は空間上のただ 1 つの $\mathbb{B}_\kappa$ -trajectory γ を translate する、すなわち $\varphi \circ \gamma(t) = \gamma(t + \omega_{\varphi, \kappa})$ を満たす正の数 $\omega_{\varphi, \kappa}$ が存在する。

測地線に関する ω_φ の場合

$$\omega_\varphi = \min\{d(p, \varphi(p)) \mid p \in \mathbb{C}H^n\}$$

としても与えられているが、 $\omega_{\varphi, \kappa}$ の場合はそれほど単純ではない。Hadamard 多様体上の測地線と同様に、異なる 2 点 $p, q \in \mathbb{C}H^n(-c)$ を結ぶ p から q への holomorphic circle はただ 1 本存在するが、その長さ ℓ を調べると

$$\sqrt{c} \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{c - \kappa^2}\ell\right) = \sqrt{c - \kappa^2} \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}d(p, q)\right)$$

となり、複素双曲空間上で局所的に見ると、その関係は少々複雑で、少なくとも

$$\omega_{\varphi, \kappa} \neq \min\{p \text{ から } \varphi(p) \text{ への holomorphic circle の長さ} \mid p \in \mathbb{C}H^n\}$$

である。複素双曲空間では holomorphic circle の幾何は理想境界の様子とより密接に関係しているように思われる (cf.[NU])。

ところで $\omega_{\varphi, \kappa}$ は複素双曲空間の商空間上の閉じた holomorphic circle の長さを表している。そこで、商空間上の閉じた holomorphic circle の長さを考察することにしよう。測地線の考察と同様に、複素双曲空間の compact quotient $M = \mathbb{C}H^n(-c)/\Gamma$ 上の $\mathbb{B}_\kappa$ -trajectory に対して力学系的 zeta 関数 $\zeta_{M, \kappa}$ を

$$\zeta_{M, \kappa}(s) = \prod_{\gamma} \{1 - \exp(-s \cdot \text{length}(\gamma))\}^{-1}$$

と定める。ただし γ は M 上の $\mathbb{B}_\kappa$ -trajectory (の像) 全体を走るものとする。このとき、命題 6 により $|\kappa| < \sqrt{c}$ のとき

$$\zeta_{M, \kappa}(s) = \zeta_{M, 0}\left(\sqrt{\frac{c}{c - \kappa^2}}s\right)$$

を満たす。命題 6 及び測地線に関する zeta 関数の結果から (または Anosov flow の zeta 関数の一般論から) $\zeta_{M, \kappa}$ は $|\kappa| < \sqrt{c}$ のとき

- (1) $\text{Re}(s) > h(\kappa) = n\sqrt{c - \kappa^2}$ で絶対収束し、正則
- (2) $\text{Re}(s) > h(\kappa)$ を含む領域に meromorphic に拡張され
- (3) その領域では $s = h(\kappa)$ に simple pole を持つ他は pole を持たない。

が得られる。従って通常解析数論の結果から (実は命題 6 から直ちに) 閉じた $\mathbb{B}_\kappa$ -trajectory の個数の長さに関する漸近展開が得られる。

系 8 $M = \mathbb{C}H^n(-c)/\Gamma$ 上の閉じた $\mathbb{B}_\kappa$ -trajectory の個数について、 $|\kappa| < \sqrt{c}$ ならば

$$\#\{\mathbb{B}_\kappa\text{-trajectory } \gamma \mid \text{length}(\gamma) < \lambda\} \sim \frac{\exp(h(\kappa)\lambda)}{h(\kappa)\lambda}$$

である。ただし、2つの関数 f, g について $f \sim g$ は $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda)/g(\lambda) = 1$ を表す。

なお、magnetic flow $\mathbb{B}_\kappa \varphi_t$ の topological entropy $h(\kappa)$ は、点 $p \in M$ を中心とする magnetic r -ball

$$\mathbb{B}_\kappa B_r(p) = \{\mathbb{B}_\kappa \exp_p(tv) \mid 0 \leq t < r, v \in U_p \mathbb{C}H^n(-c)\}$$

の体積増大度を使って

$$h(\kappa) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(\text{Vol}(\mathbb{B}_\kappa B_r(\cdot)))$$

と表現することもできる。

また測地線の場合と同様に、基本群 Γ の m 次元ユニタリ表現 $\nu: \Gamma \rightarrow U(m)$ に対して力学系の L-関数 $L_{M,\kappa}(s; \nu)$ を

$$L_{M,\kappa}(s; \nu) = \prod_{\gamma} \{\det(I_m - \nu(\langle \gamma \rangle) \exp(-s \cdot \text{length}(\gamma)))\}^{-1}$$

を考えることもできる。ただし $\langle \gamma \rangle \in \Gamma$ は、その conjugacy class が γ の free homotopy class に対応するものとする。Anosov flow の L 関数の一般論 ([AS]) から $L_{M,\kappa}(s, \nu)$ は $|\kappa| < \sqrt{c}$ のとき

- (1) $\text{Re}(s) > h(\kappa) = n\sqrt{c - \kappa^2}$ で絶対収束し、正則
- (2) $\text{Re}(s) > h(\kappa)$ を含む領域に meromorphic に拡張され
- (3) $m \leq 2$ ならば $\text{Re}(s) > h(\kappa)$ を含む領域で正則
- (4) $m = 1$ (character の場合) $s = h(\kappa) + \sqrt{-1}t$ ($t \in \mathbb{R}$) に pole を持つための必要十分条件は、全ての γ に対して

$$\nu(\langle \gamma \rangle) = \exp(\sqrt{-1}t \cdot \text{length}(\gamma))$$

が成り立つことである。このとき $L_{M,\kappa}(s; \nu) = \zeta_{M,\kappa}(s - \sqrt{-1}t)$ となって $\text{Re}(s) = h(\kappa)$ 上の pole は全て simple

という性質を満たす。このことから homology class で分類した holomorphic circle の長さに関する漸近展開を得ることもできる (cf. [AS], [KS])。

一方 Selberg 型の zeta 関数

$$Z(s) = Z_{M,\kappa}(s) = \prod_{j=0}^{\infty} \prod_{\gamma} \{1 - \exp(-(s+j) \cdot \text{length}(\gamma))\}$$

を考えてみよう。先に挙げた力学系の zeta 関数とは

$$\zeta_{M,\kappa}(s) = Z_{M,\kappa}(s+1)/Z_{M,\kappa}(s)$$

という関係にある。測地線の場合、この関数は trace formula を通してラプラス作用素を使って表現する事ができた。ケーラー磁場の場合はどのようなになっているのであろうか。力学系の zeta 関数と異なり命題 6 を単純に適用するわけにはいかない。ケーラー磁場に対しても、上半平面 $\mathbb{C}H^1 \cong H^2$ の場合には [H], [P], [IM] などにシュレディンガー作要素

$$H_{\kappa} = \frac{1}{2}y^2(\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\kappa}{y})^2 - \frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

に関する trace formula は考察されているが、その公式は ω_{φ} と κ を用いていて $\omega_{\varphi,\kappa}$ を用いてはいないので、もう少し考察する必要があると思われる。

REFERENCES

- [A1] T. Adachi, *Kähler magnetic flows on a manifold of constant holomorphic sectional curvature*, Tokyo J. Math. 18(1995), 473-483.
- [A2] T. Adachi, *Circles on a quaternionic space form*, J. Math. Soc. Japan 48 (1996), 205-227.
- [A3] T. Adachi, *Magnetic flows for a surface of negative curvature*, Bull. Nagoya Institute Tech. 47(1995), 161-170.
- [A4] T. Adachi, ケーラー磁場の軌道と円, 数理解析研究所講究録 907 「部分多様体論とその周辺」 (1995), 22-43.
- [A5] T. Adachi, *Curvature bound and trajectories for magnetic fields on a Hadamard surface*, Tsukuba J. Math. 20(1996), 225-230.
- [A6] T. Adachi, *A comparison theorem for magnetic Jacobi fields*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 40(1997), 293-308.

- [A7] T. Adachi, *Length spectrum of circles on a complex hyperbolic space*, Nagoya. Math. J..
- [A8] T. Adachi, *A note on trajectories for Kähler magnetic fields on a product manifold*, NIT Semnar Report Math..
- [AKM] T. Adachi, M. Kimura and S. Maeda, *A characterization of all homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space by observing the extrinsic shape of geodesics*, preprint.
- [AM1] T. Adachi and S. Maeda, *Global behaviours of circles in a complex hyperbolic spaces*, Tsukuba J. Math. 21(1997), 29-42.
- [AM2] T. Adachi and S. Maeda, *Length spectrum of circles in a complex projective spaces*, to appear in Osaka Math. J..
- [AM3] T. Adachi and S. Maeda, *A construction of closed helices with self- intersections in a complex projective space by using submanifold theory*, to appear in Hokkaido J. Math..
- [AM4] T. Adachi and S. Maeda, *Circular helices in a standard sphere*, to appear in New Zealand J. Math..
- [AM5] T. Adachi and S. Maeda, *Some aspects on circles and helices in a complex projective space*, preprint.
- [AM6] T. Adachi and S. Maeda, *Geodesics on a homogeneous real hypersphere in a complex projective space*, N.I.T. Sem. Report Math..
- [AMO1] T. Adachi, S. Maeda and K. Ogiue, *Extrinsic shape of circles and standard imbedding of projective spaces*, manuscripta math. 93(1997), 267-272.
- [AMO2] T. Adachi, S. Maeda and K. Ogiue, *Extrinsic shape of circles and the standard imbedding of a Cayley projective plane*, Hokkaido Math. J. 26(1997), 411-419.
- [AMU1] T. Adachi, S. Maeda and S. Udagawa, *Circles in a complex projective spaces*, Osaka J. Math. 32(1995), 709-719.
- [AMU2] T. Adachi, S. Maeda and S. Udagawa, *Circles in symmetric spaces are not necessarily simple*, preprint.
- [AS] T. Adachi and T. Sunada, *Twisted Perron-Frobenius theorem and L- functions*, J. Func. Anal. 71(1987), 1-46.
- [C] A. Comtet, *On the Landau levels on the hyperbolic plane*, Ann. of Phys. 173(1987), 185-209.
- [CM] B.Y. Chen and S. Maeda, *Extrinsic characterization of circles in a complex projective space*, Tokyo J. Math. 19(1996), 169-185.
- [G] N. Gouda, *Magnetic flows of Anosov type*, Tôhoku Math. J. 49(1997), 165-183.
- [H] D. Hejál, *The Selberg trace formula for $PSL(2, \mathbb{R})$ I, II*, Lecture Notes in Math. 548, 1001, Springer-Verlag, 1976, 1983.
- [IM] N. Ikeda and H. Matsumoto, *Brownian motion on the hyperbolic plane and Selberg trace formula*, preprint.
- [KS] A. Katsuda and T. Sunada, *Closed orbits in homology classes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 71(1990), 5-32.

- [M1] S. Maeda, *Real hypersurfaces of complex projective spaces*, Math. Ann. 263 (1983), 473-478.
- [M2] S. Maeda, *Isotropic immersions*, Canad. J. Math. 38(1986), 416-430.
- [MA] S. Maeda and T. Adachi, *Holomorphic helices in a complex space form*, Proc. A.M.S. 125(1997), 1197-1202.
- [MO] S. Maeda and Y. Ohnita, *Herical geodesic immersion into complex space forms*, Geom. Dedicata 30(1989), 93-114.
- [MS] S. Maeda and S. Udagawa, Tokyo J. Math. 13(1990), 341-351.
- [MT] K. Mashimo and K. Tojo, *Circles in Riemannian symmetric spaces*, preprint.
- [N] H. Naitoh, *Isotropic submanifolds with parallel second fundamental form in $P^n(\mathbb{C})$* , Osaka J. Math. 18(1981), 427-464.
- [NU] S. Nishikawa and K. Ueno, *Dirichlet problem at infinity for harmonic maps between Carnot spaces*, Proc. Japan Acad. 73 Ser. A (1997), 168-169.
- [NY] K. Nomizu and K. Yano, *On circles and spheres in Riemannian geometry*, Math. Ann. 210(1974), 163-170.
- [P] S.J. Patterson, *The Laplace operator on a Riemann surface*, Compo. Math. 31(1975), 83-107.
- [PP] W. Parry and M. Pollicott, *An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows*, Ann. of Math. 118(1983), 573-591.
- [S1] T. Sunada, *Magnetic flows on a Riemann surface*, Proc. KAIST Math. Workshop 8(1993) "Analysis and geometry", 93-108.
- [S2] T. Sunada, 基本群とラプラシアン, 紀伊国屋, 1990.
- [T] R. Takagi, *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka J. Math. 10(1973), 495-506.