

剪断乱流におけるエネルギー とエネルギー散逸率のスケーリング則

東大理学部 下村 裕 (Yutaka Shimomura)

1. はじめに

非圧縮乱流のもつ独立な次元の個数は2である。つまり、時間 $[T]$ と空間 $[L]$ の次元である。この2個の独立な次元は、乱流エネルギー K とエネルギー散逸率 ε と置くても良い。(

$[K] = [L]^2 [T]^{-2}$, $[\varepsilon] = [L]^2 [T]^{-3}$) 従って、この K と ε によって種々の乱流統計量を表現する立場が考えられる。例えば、渦粘係数は ν_e は、 $[\nu_e] = [L]^2 [T]^{-1}$ なので、 $\nu_e \propto K^2 \varepsilon^{-1}$ と表わすのである。 K と ε に対する支配方程式を解き、このように乱流場を求める方法と、乱流の2方程式モデル、あるいは K - ε モデル¹⁾と呼ぶ。

K - ε モデルは工学の分野でも多用され、多くの研究者によって発展させられてきた。通常用いられる標準的な K - ε モデルにおける、 K に対する方程式は以下の様に見える。

$$\frac{DK}{Dt} = P - \varepsilon + \frac{\rho}{\rho x^a} \left\{ \frac{\nu_e}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x^a} \right\}, \quad (1)$$

$$\nu_e = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (2)$$

(1)式において D/Dt はラグラジアン微分、 P はエネルギー生産項と呼ばれる正符号をもつ項、 ν_e は(2)式で与えられる渦粘性である。(1)、(2)式中の σ_k 、 C_ν は正定数で経験的に、

$$\sigma_k \sim 1.0, \quad C_\nu \sim 0.09, \quad (3)$$

という値がよく用いられる。(1)式において乱流モデルを組み込んだのは、右辺第三項の振数値のみであり、この項が重要である。しかしながら、Yoshizawa²⁾が統計理論を用いて、解析した結果、この項は次の様に表現されるべきだと主張された。

$$\frac{\rho}{\rho x^a} \left\{ \frac{\nu_e}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x^a} + \frac{\nu_e}{\sigma_{k\varepsilon}} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^a} \right\}, \quad (4)$$

つまり、(4)式右辺の第二項から必要なのである。この付加項は cross-diffusion 項と呼ばれる、壁乱流の漸近挙動に関する Takemitsu³⁾の解析によつてその重要性が指摘された。

本研究は、この経験的に用いられるモデル((1)式右辺第三項)と理論的に導出されたモデル((4)式)とのギャップを埋められることと主張するものである。

結論を言えば、それは次の様にスケールされる事

式を示すのである。

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = C_0 \left(\frac{k}{k_0}\right)^{-\frac{11}{6}} \quad (5)$$

(5)式の対数微分をとればわかるように、(4)式は(1)式右辺の第3項の形と同等なのである。(C₀は定数)(ε₀, k₀はそれぞれε, kの定数)。

(5)式は、kとεに関する一種のスケーリング則である。スケーリング則は、臨界現象等いろいろな物理の分野で重要な法則である。Kolmogorovの-5/3則もFourier空間における、エネルギーとエネルギー散逸率と波数に関するスケーリング則である。

スケーリング則は、たいてい簡単な議論に基づいて導き出される大変有用な法則である。以下に(5)式の導出方法を説明する。

2. 導出方法

解析手法として、Yoshizawa⁴⁾の考案したTwo-Scale Direct Interaction Approximation (TSDIA)を基本に用いる。その概略と、今回改良した部分について説明するが、詳細は文献を参照されたい。

時空点(t, $\vec{x}$)における乱流の情報を得るために、以下の手順を行う。

① 擾乱場 u^{α} に対する支配方程式中の平均速度場 U^{α} を、点 $(t_0, \vec{x}_0)$ のまわりにテイラー展開する。

② τ スケールで

$$\tau \equiv t - t_0, \quad T_0 \equiv \delta(t - t_0), \\ \vec{\tau} \equiv \vec{x} - \vec{x}_0, \quad \vec{X}_0 \equiv \delta(\vec{x} - \vec{x}_0). \quad (6)$$

を導入し、平均場は $(T_0, \vec{X}_0)$ のみに、擾乱場は $(\tau, T_0, \vec{\tau}, \vec{X}_0)$ に依存すると仮定し、方程式を書き変える。(8はスケール-9-)

③ ②で得られた方程式を、 τ に関して Fourier 変換する。

④ 擾乱場を δ で展開し、各次の方程式を求める。

$$u^{\alpha}(\vec{k}; \tau) = u_0^{\alpha}(\vec{k}; \tau) + \delta u_1^{\alpha}(\vec{k}; \tau) + \dots \\ (\vec{k}: \text{波数}).$$

⑤ 応答関数を導入することによって、 $u_0^{\alpha}, u_1^{\alpha}, \dots$ の形式的解を求める。(u^{α} に関しては、連続の条件を満たす様にする。)

⑥ u_0^{α} 場は、 τ に関して一様、等方であると仮定して、種々の統計量を計算する。

⑦ のステップが今回改良をふたつであり、この操作を繰り返すことにより、平均場の τ 空間における変化が表現される。その結果、(2)式における C_v の値が

$$C_v \sim 0.08 \pm \dots \quad (7)$$

と結論づけ、経験値 0.09 (31) との一致が良い。ちなみに

に、 u^α 場の連続の条件を満足するように (5) 17 行、7 行、Hamba⁵⁾ の計算にすると $C_V \sim 0.12$ と計算されてしまう。

(ステップ ① と行かない計算。)

① ~ ④ を行、下の場合、 δ^1 の次数の方程式は

$$u_1^\alpha(\vec{k}; \tau) = -\frac{ik^a}{k^2} \frac{\partial u_0^\alpha(\vec{k}; \tau)}{\partial X_0^a} + v_1^\alpha(\vec{k}; \tau), \quad (8)$$

と 17.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_1^\alpha(\vec{k}; \tau)}{\partial \tau} + \nu k^2 v_1^\alpha(\vec{k}; \tau) - 2iM^{\alpha ab} \int \int \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) u_0^a(\vec{p}; \tau) v_1^b(\vec{q}; \tau) \\ &= -\frac{D}{DT_0} u_0^\alpha(\vec{k}; \tau) - N^{\alpha abc}(\vec{k}; \tau) \frac{\partial u_0^b}{\partial X_0^a} u_0^c(\vec{k}; \tau) \\ &+ \frac{DU_0^a}{DT_0} (ik^a \tau) u_0^\alpha(\vec{k}; \tau) - 2i\nu k^a \frac{\partial}{\partial X_0^a} u_0^\alpha(\vec{k}; \tau) \\ &+ 2M^{\alpha ab}(\vec{k}) \int \int \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) u_0^a(\vec{p}; \tau) \frac{q^b}{q^2} \frac{\partial u_0^c(\vec{q}; \tau)}{\partial X_0^c} \\ &- D^{\alpha d}(\vec{k}) L^{\alpha bcd}(\vec{k}) \int \int \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) \frac{\partial}{\partial X_0^c} \{u_0^a(\vec{p}; \tau) u_0^b(\vec{q}; \tau)\}, \end{aligned}$$

と 7 行。ここで ν は粘性率であり、 $\bar{\nu} = \nu/L$ 、 $L^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $N^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $M^{\alpha\beta\gamma}$, $D^{\alpha\beta}$ (9) は、

$$L^{\alpha\beta\gamma\delta}(\vec{k}) = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} + \frac{1}{2} \delta^{\beta\gamma} \delta^{\alpha\delta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} \delta^{\gamma\delta},$$

$$N^{\alpha\beta\gamma\delta}(\vec{k}, \omega_k) = \delta^{\beta\delta} \left(\delta^{\alpha\gamma} - 2 \frac{k^\alpha k^\gamma}{k^2} \right) - \delta^{\alpha\delta} k^\gamma \frac{\partial}{\partial k^\beta},$$

$$M^{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}) = \frac{1}{2} (k^\beta D^{\alpha\gamma}(\vec{k}) + k^\gamma D^{\alpha\beta}(\vec{k})),$$

$$D^{\alpha\beta}(\vec{k}) = \delta^{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2}, \quad (40)$$

で与えられる。($\delta^{\alpha\beta}$ は、クロネッカーの δ 記号)

また、(9)式中の

$$U_0^\alpha, \quad \frac{\partial U_0^\alpha}{\partial X_0^\beta}, \quad \frac{DU_0^\alpha}{DT_0},$$

は、点 $(T_0=0, \vec{X}_0=0)$ での値を示していることに注意(な)ければならない。

さて、(9)より(5)を導く。(9)に U_0 を、(10)に $U_0 U_0$ をかけてやることにする。

$$\int_{\vec{k}} d\vec{k} \frac{D}{DT_0} \langle U_0^\alpha(\vec{k}; \tau) U_0^\alpha(-\vec{k}; \tau) \rangle / \delta_{(0)},$$

$$\int_{\vec{k}} d\vec{k} \int_{\vec{p}} d\vec{p} \int_{\vec{q}} d\vec{q} \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q}) \frac{D}{DT_0} \langle U_0^\alpha(\vec{p}; \tau) U_0^\alpha(\vec{q}; \tau) U_0^\alpha(-\vec{k}; \tau) \rangle / \delta_{(0)},$$

(= 0)

を求める。局所平衡 $\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \cdot \rangle = 0$ に注意し、

DIA の精神に基づいて計算した結果、それよりから式で得る。

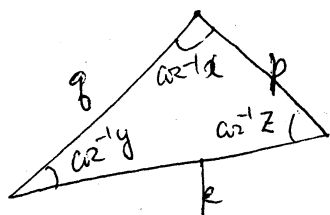
$$\int dk \, k^2 \frac{D}{D_0} \Theta(k) = 0,$$

$$\int_{\mathbf{k}} \int_{\mathbf{p}} \int_{\mathbf{q}} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}) S_1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial X_0} \{ \Theta(p) \Theta(q) \} = 0$$

(11)

(11) 式 $S_1(x, y, z)$ は geometrical factor⁶⁾ である。

$$\begin{aligned} S_1(x, y, z) = & \frac{1}{6} \left[\frac{k}{q} (x^2 y + 2xy^2 z + 2y^3 + 2yz^2 - y) \right. \\ & + \frac{k}{p} (x^2 z + 2xyz^2 + 2xy + 6y^2 z + 2z^3 + z) \\ & \left. - 4(x^2 + 3xyz + y^2 z^2 + 3y^2 + 2z^2) \right], \end{aligned}$$



(12)

と与えられる。 $\mathcal{I} = \Theta(k)$ は、一様等価電流の1時刻2次元相関で、中性領域近似より、

$$\Theta(k) \propto \xi^{2/3} k^{-11/3} H(k - k_m), \quad (13)$$

と近似する。(13)において $H(k - k_m)$ は階段関数であり、

k_m は cut off 波数で、

$$k_m \propto \epsilon k^{-\frac{3}{2}}, \quad (14)$$

で与えられる。(13)を(11)に代入することにより、

$$\begin{aligned} \frac{D}{DT_0} (\epsilon^{2/3} k_m^{-11/3}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial X_0^2} \{ (\epsilon^{2/3} k_m^{-11/3})^2 \} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

が結論される。要するに、

$$\frac{2}{3} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\frac{D}{DT_0}}{\frac{\partial}{\partial X_0^2}} \right) \epsilon - \frac{11}{3} \frac{1}{k_m} \left(\frac{\frac{D}{DT_0}}{\frac{\partial}{\partial X_0^2}} \right) k_m = 0. \quad (16)$$

(16)に(14)を代入することにより

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \frac{D\epsilon}{DT_0} &= \frac{11}{6} \frac{1}{k} \frac{Dk}{DT_0}, \\ \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial X_0^2} &= \frac{11}{6} \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial X_0^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

となる。(17)はすなわち(5)であり、 k と ϵ に對するスケール則が導き出された。

3. 応用

スケール則(5)を一樣減衰流に適用してみる。

$$\frac{Dk}{DT_0} = -\epsilon \propto -k^{\frac{11}{2}}, \quad (18)$$

より

$$k \propto T^{-\frac{6}{5}}, \quad (19)$$

が結論される。 $\frac{6}{5} = 1.2$ は、実験値に非常に近い。

次に 1. に述べた k の支配方程式における拡散項の整理に注目する。拡散項 D を

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{2} \langle u'^a u'^a u'^d \rangle - \langle p' u'^d \rangle \\ &= \frac{k^3}{\varepsilon} \left[C_{kk} \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial X^d} - C_{k\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^d} \right], \quad (20) \end{aligned}$$

と書いた場合、Yoshizawa²⁾ の計算結果によれば、

$$C_{kk} \sim 1.27, \quad C_{k\varepsilon} \sim 0.720, \quad (21)$$

となるが、今回の計算方法によると

$$C_{kk} \sim 0.588, \quad C_{k\varepsilon} \sim 0.335, \quad (22)$$

と、ほぼ半分の値となる。この数値を出す際、次の積分を計算しなければならぬ。

$$I = \int_0^\infty dk \int_1^\infty dp \int_1^\infty dg \quad F(k, p, g) \quad (k, p, g). \quad (23)$$

ここで Δ は、 k, p, g が三角形となる領域である。すなわち

$$\begin{cases} F(k, p, g) = F(k, g, p), \\ F(ak, ap, ag) = a^{-n} F(k, p, g), \end{cases} \quad (24)$$

が満足されると、この三重積分は、二重積分に変換できることになり、本研究で判明した。すなわち、

$$I = 8\pi^2 \left[\int_0^{1/2} dv \int_{1-v}^{1+v} dw + \int_{1/2}^{\infty} dv \int_v^{1+v} dw \right] \left(\frac{1}{n-6} v^{n-5} w \right) X$$

$$F(k, p, q) \Big|_{\substack{k=1 \\ p=v \\ q=w}} \quad (25)$$

(20) (17) の第2式を用いて、 k だけの拡散形

$$D = C_{kk}' \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x^\alpha}, \quad (26)$$

に書いた場合、本計算では、

$$C_{kk}' \sim -0.0260, \quad (27)$$

と、 C_{kk}' が負になってしまった。これは、(1) の様な経験的モデルと定性的に違うけれど、 C_{kk}' は絶対値が小さいので、これは正の小さな値とも解釈する方が良いであろう。重要なのは、cross-diffusion 効果は必要ないということである。ただし、この結論は、leading order の近似であり、また、境界のない理想化された状況下の剪断乱流に対して成り立つものである。従って、本結論は、1. に説明した Takemitsu³⁾ の主張と矛盾するものではない。

最後に、チャネル乱流のラージエディ-シミュレーション⁷⁾ によるデータを用いて (5) のスケーリング則を検証する。

図1は、 k と ε の関係を対数目盛りでプロットした図であり、 (5) の成り立つ領域が一部見られる。図2は、チャンネル中心で $\varepsilon = 0$ 、壁で $\varepsilon = 0.5$ と1で、 $\varepsilon/k^{1/6}$ を ε に對してプロットした図であり、図1で (5) の成り立つ領域は、チャンネル中心と壁の間の領域であることがわかる。壁近傍で (5) が成立しないのは明らかであるが、チャンネル中心でも成り立たないのはどうしてなのか？ 以下のように、チャンネル中心では、 k 、 ε の空間分布の大きさを比較すると、 (17) 式の第2の式の精度が低くなっていることに起因するのであろう。

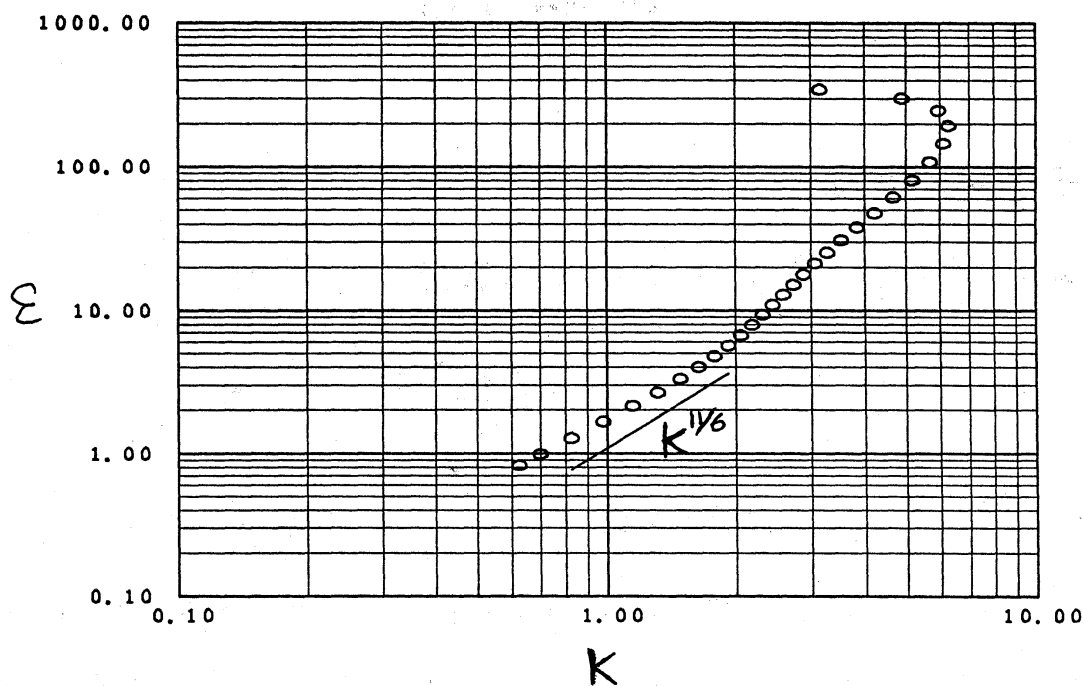


図 1.

ENERGY-EPSILON

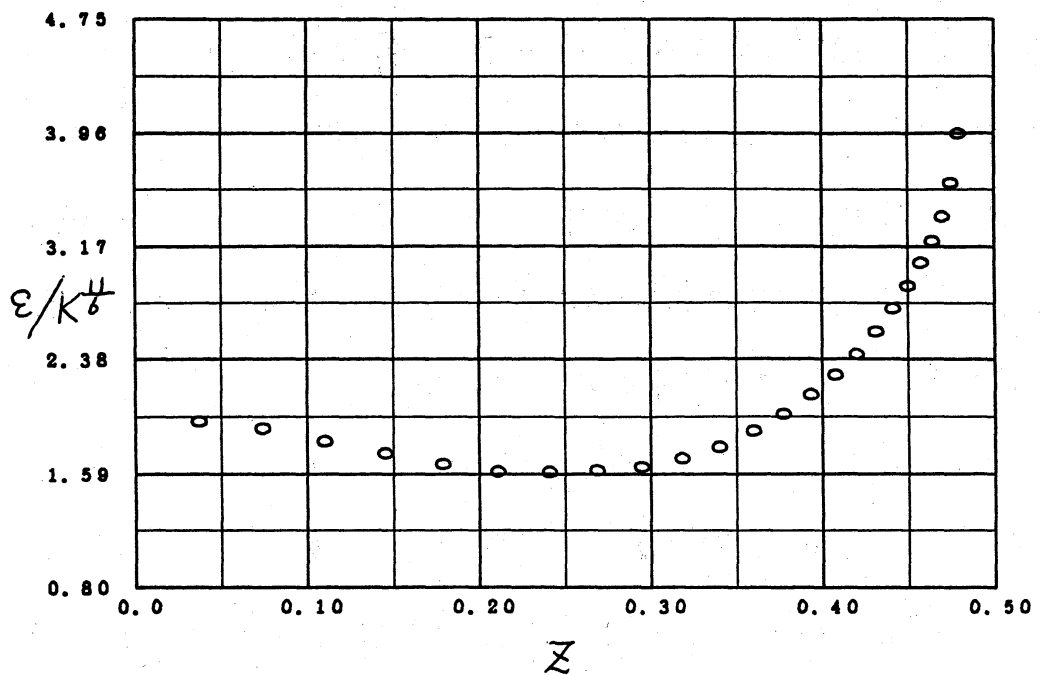


図 2.
 $\epsilon / k^{11/6}$

4. まとめと展望

乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ϵ の間に

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) = C_0 \left(\frac{k}{k_0}\right)^{\frac{11}{6}},$$

というスケーリング則が成り立つことが理論的に示された。この関係式によって、cross-diffusion 項は、必要ではないことが結論され、従来用いられていたモデルの理論的妥当性が判明した。

最後に将来の展望を記す。

今回の解析は、 $O(\delta')$ までのものであるが、 $O(\delta^2)$ まで次
 報を上げることで、その支配方程式と、 ε, k 、シアレートに
 関する空間的スケールリング則が得られることが予想される。
 後者に関する準備的な計算によると、平均流 U が y に 1 か依存
 している場合、

$$k \propto U'^{\frac{6}{5}}, \quad \varepsilon \propto U'^{\frac{11}{5}}$$

というスケールリングが示唆される。($U' \equiv \frac{dU(y)}{dy}$)

もう一つの興味として、今回の手紙で、バニブスカラー
 に関するスケールリング則を導出することである。もし速度場
 の長さスケールと、スカラー場の長さスケールがほぼ等しい場
 合は、 ε_0 (スカラー場の散逸率) = ε となることが最近
 示された。

さらに今回改良された TS DIA を用いて、二次元乱流の渦
 粘性を計算するのも興味深い。今回の定式化では、彼も k に
 関する微分項があるので、自らの渦粘性を計算する可能性が
 ある。

以上、新しい結果が次第報告する予定である。

参考文献

- 1) P. Bradshaw, T. Cebeci, and J. H. White law :
"Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow"
(Academic , London, 1981) p. 37.
- 2) A. Yoshizawa : J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 2326
- 3) N. Takemitsu : Trans. Jpn. Soc. Mech. Engrs.
B 53 (1987) 2528.
- 4) A. Yoshizawa : Phys. Fluids, 27 (1984) 1377.
- 5) F. Hamba : J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) 79.
- 6) D. C. Leslie : " Developments in the Theory of
Turbulence " (Oxford University Press , 1983).
- 7) Y. Shimomura : submitted to Phy. Fluids A.