

ある種の平面分割の母関数について

東大 理 岡田 聡一 (Soichi Okada)

§0 Introduction

plane partition (平面分割) とは, 自然数 a_{ij} と

$$\pi = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\lambda_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\lambda_2} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{r\lambda_r} \end{matrix}$$

のように並べたもので,

- (i) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$
- (ii) $a_{ij} \geq a_{i,j+1} \quad (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq \lambda_i - 1)$
- (iii) $a_{ij} \geq a_{i+1,j} \quad (1 \leq i \leq r-1, 1 \leq j \leq \lambda_{i+1})$

をみたすもののことをいう. このような π に対して, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ を π の shape といい, $sh(\pi)$ と表す. また, $a_{ij} > a_{i,j+1}$ ($\forall i, j$) [resp. $a_{ij} > a_{i+1,j}$ ($\forall i, j$)] が成り立つとき, π は row-strict [resp. column-strict] であるという. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$) と $N \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ が与えられたとき, $sh(\pi) = \lambda$, $a_{ij} \leq N$ ($\forall i, j$) となる row-strict [resp. column-strict] plane partition $\pi = (a_{ij})$ 全体を $\mathcal{P}_r(\lambda; \leq N)$ [resp. $\mathcal{P}_c(\lambda; \leq N)$] とする. 変数 $x_1, x_2, \dots$ を導入し,

plane partition $\pi = (a_{ij})$ に対して, $\chi^\pi = \prod_{i,j} \chi_{a_{ij}}$ と書く. この

とき, $\mathcal{P}_r(\lambda; \leq N)$, $\mathcal{P}_c(\lambda; \leq N)$ の母関数

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_r(\lambda; \leq N)} \chi^\pi, \quad \sum_{\pi \in \mathcal{P}_c(\lambda; \leq N)} \chi^\pi$$

は次の形に表されることが知られている.

定理 0 (Jacobi-Trudi identity) $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0)$,

$N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_r(\lambda; \leq N)} \chi^\pi = \det (e_{\lambda_i - i + j}^{(N)}(\chi))_{1 \leq i, j \leq r}$$

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_c(\lambda; \leq N)} \chi^\pi = \det (h_{\lambda_i - i + j}^{(N)}(\chi))_{1 \leq i, j \leq r}$$

ここで, $e_k^{(N)}(\chi) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} \chi_{i_1} \chi_{i_2} \dots \chi_{i_k}$ は elementary symmetric function, $h_k^{(N)}(\chi) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq N} \chi_{i_1} \chi_{i_2} \dots \chi_{i_k}$ は complete symmetric function であり, $k < 0$, $k > N$ のとき $e_k^{(N)}(\chi) = 0$, $k < 0$ のとき $h_k^{(N)}(\chi) = 0$ とする.

ここでは, row-strict plane partition と column-strict plane partition の間に位置する (A, B) -partially strict plane partition を定義し, その母関数について考える (§1) また, shifted plane partition についても, (A, B) -partially strict shifted plane partition を定義し, その母関数の行列式表示を与える (§2).

§1. (A, B) -partially strict plane partition

$A, B \subseteq \mathbb{N}$ と $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{N}$ とする $\mathbb{N}$ の部分集合とする.

定義 plane partition π は, 次の条件 (P1), (P2) をみたすとき,
 (A, B) -partially strict であるという.

(P1) 各 $m \in A$ に対して, m は 1 行に高々 1 回しか現れない.

(P2) 各 $m \in B$ に対して, m は 1 列に高々 1 回しか現れない.

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0), N \in \mathbb{N}$ に対して, $sh(\pi) = \lambda, a_{ij} \leq N$

とする (A, B) -partially strict plane partition $\pi = (a_{ij})$ 全体を.

$\mathcal{P}_{A,B}(\lambda; \leq N)$ とおく. 例えば, $A = \mathbb{N}, B = \emptyset$ [resp. $A = \emptyset, B = \mathbb{N}$] の

とき, $\pi = (a_{ij})$ に対する上の定義の条件 (P1), (P2) は, $a_{ij} >$

$a_{i,j+1} (\forall i, j)$ つまり row-strict [resp. $a_{ij} > a_{i+1,j} (\forall i, j)$ つまり,

column-strict] であるということに他ならない:

$$\mathcal{P}_{\mathbb{N}, \emptyset}(\lambda; \leq N) = \mathcal{P}_r(\lambda; \leq N)$$

$$\mathcal{P}_{\emptyset, \mathbb{N}}(\lambda; \leq N) = \mathcal{P}_c(\lambda; \leq N)$$

また, 例えば $A = \{1, 2\}, B = \mathbb{N} - A, \lambda = (3, 2)$ とすると,

$$\mathcal{P}_{A,B}(\lambda; \leq 2) = \emptyset$$

$$\mathcal{P}_{A,B}(\lambda; \leq 3) = \left\{ \begin{array}{cccc} 333 & 332 & 331 & 321 \\ 21 & 21 & 21 & 21 \end{array} \right\}$$

このとき, $\mathcal{P}_{A,B}(\lambda; \leq N)$ の母関数 $\sum_{\pi \in \mathcal{P}_{A,B}(\lambda; \leq N)} x^\pi$ は次の形の行列

式で表される.

定理 1 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0)$, $N \in \mathbb{N}$ に對して,

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_{A,B}(\lambda: \leq N)} \chi^\pi = \det (\tilde{q}_{A,B,\lambda_i-i+j}^{(N)}(\chi))_{1 \leq i,j \leq r}$$

ここで, $\tilde{q}_{A,B,k}^{(N)}(\chi)$ は母関数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{q}_{A,B,k}^{(N)}(\chi) t^k = \frac{\prod_{i \in A \cap [N]} (1 + \chi_i t)}{\prod_{j \in B \cap [N]} (1 - \chi_j t)} \quad ([N] = \{1, 2, \dots, N\})$$

で定義される $\chi_1, \dots, \chi_N$ の多項式であり, $k < 0$ のとき $\tilde{q}_{A,B,k}^{(N)}(\chi) = 0$ とする.

例えば, $A = \{1, 2\}$, $B = \mathbb{N} - A$, $\lambda = (3, 2)$ のとき, (上で与えた例)

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{A,B}(\lambda: \leq 3)} \chi^\pi &= \chi_1 \chi_2 \chi_3^3 + \chi_1 \chi_2^2 \chi_3^2 + \chi_1^2 \chi_2 \chi_3^2 + \chi_1^2 \chi_2^2 \chi_3 \\ &= \det \begin{pmatrix} \chi_1 \chi_2 \chi_3 + \chi_1 \chi_3^2 + \chi_2 \chi_3^2 + \chi_3^3 & \chi_1 \chi_2 \chi_3^2 + \chi_1 \chi_3^3 + \chi_2 \chi_3^3 + \chi_3^4 \\ \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 & \chi_1 \chi_2 + \chi_1 \chi_3 + \chi_2 \chi_3 + \chi_3^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$A = \mathbb{N}$, $B = \emptyset$; $A = \emptyset$, $B = \mathbb{N}$ のときを考えると, $\tilde{q}_{\mathbb{N}, \emptyset, k}^{(N)}(\chi) = e_k^{(N)}(\chi)$,
 $\tilde{q}_{\emptyset, \mathbb{N}, k}^{(N)}(\chi) = h_k^{(N)}(\chi)$ だから, 定理 1 の特別な場合として §0 で述べた Jacobi-Trudi identity が得られる.

系(定理 0)

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_r(\lambda: \leq N)} \chi^\pi &= \det (e_{\lambda_i-i+j}^{(N)}(\chi))_{1 \leq i,j \leq r} \\ \sum_{\pi \in \mathcal{P}_c(\lambda: \leq N)} \chi^\pi &= \det (h_{\lambda_i-i+j}^{(N)}(\chi))_{1 \leq i,j \leq r} \end{aligned}$$

実は, 定理 1 の行列式の形と $\tilde{q}_{A,B,k}^{(N)}(\chi)$ の定義から, $\mathcal{P}_{A,B}(\lambda: \leq N)$ は (λ と N を固定したとき) 本質的に $\#(A \cap [N])$, $\#(B \cap [N]) = N -$

$\#(A \cap [N])$ にしかよらないことがわかる。今、 $A \cap [N] = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ($a_1 < a_2 < \dots < a_k$), $B \cap [N] = \{b_1, b_2, \dots, b_l\}$ ($b_1 < b_2 < \dots < b_l$) ($k+l=N$) であるとする。変数 $X_1, X_2, \dots; Y_1, Y_2, \dots$ を用意し、母関数 $\sum_{\pi \in P_{AB}(\lambda, \leq N)} x^\pi$ において、 $x_{a_i} \mapsto X_i$ ($i=1, \dots, k$), $x_{b_j} \mapsto Y_j$ ($j=1, \dots, l$) とおきかえたものを $P(A, B; \lambda: \leq N)$ とする。

命題 (Stanley [St]) $(A, B), (A', B')$ を $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{N}, A' \cap B' = \emptyset, A' \cup B' = \mathbb{N}$ とする $\mathbb{N}$ の部分集合とする。今、 $\#(A \cap [N]) = \#(A' \cap [N]), \#(B \cap [N]) = \#(B' \cap [N])$ であると仮定すると、

$$P(A, B; \lambda: \leq N) = P(A', B'; \lambda: \leq N)$$

となる。特に、

$$\# \mathcal{P}_{A, B}(\lambda: \leq N) = \# \mathcal{P}_{A', B'}(\lambda: \leq N).$$

§2. (A, B) -partially strict shifted plane partition.

shifted plane partition とは、自然数 b_{ij} を

$$\sigma = \begin{array}{ccccccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1, \mu_1} \\ & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2, \mu_2} \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_{rr} \cdots b_{r, \mu_r} \end{array}$$

のように並べたもので、

$$(i) \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r$$

$$(ii) \quad b_{ij} \geq b_{i, j+1} \quad (1 \leq i \leq r, i \leq j \leq \mu_i - 1)$$

$$(iii) \quad b_{ij} \geq b_{i+1,j} \quad (1 \leq i \leq r-1, i+1 \leq j \leq \mu_{i+1})$$

をみたすもののことをいう。このような σ に対して, $sh(\sigma) = (\mu_1, \mu_2 - 1, \mu_3 - 2, \dots, \mu_r - r + 1)$ を σ の shape, $pr(\sigma) = (b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr})$ を σ の profile ということにする。shifted plane partition に対しても (A, B) -partially strict の概念が定義できる。 $A, B \subseteq \mathbb{N}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{N}$ となる $\mathbb{N}$ の部分集合とする。

定義 shifted plane partition σ は, 次の条件 (P1), (P2) をみたすとき, (A, B) -partially strict であるという。

(P1) 各 $m \in A$ に対して, m は 1 行に高々 1 回しか現れない。

(P2) 各 $m \in B$ に対して, m は 1 列に高々 1 回しか現れない。

$\sigma = (b_{ij})$ が (A, B) -partially strict shifted plane partition であるとき, $pr(\sigma) = (b_{11}, b_{22}, \dots)$ に対して $b_{11} > b_{22} > \dots$ となる。 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ($\lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0$), $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ ($\alpha_1 > \dots > \alpha_r > 0$) に対して, $sh(\sigma) = \lambda$, $pr(\sigma) = \alpha$ となる (A, B) -partially strict shifted plane partition σ 全体を $\mathcal{S}_{A,B}(\lambda; \alpha)$ とおく。例えば, $A = \{1, 2\}$, $B = \mathbb{N} - A$, $\lambda = (3, 2)$, $\alpha = (3, 2)$ のとき,

$$\mathcal{S}_{A,B}(\lambda; \alpha) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ & 2 & 1 \end{array}, \begin{array}{ccc} 3 & 3 & 2 \\ & 2 & 1 \end{array}, \begin{array}{ccc} 3 & 3 & 1 \\ & 2 & 1 \end{array}, \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \end{array} \right\}.$$

shifted plane partition $\sigma = (b_{ij})$ に対して, $x^\sigma = \prod_{i,j} x_{b_{ij}}$ と書き, 母関数

$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{A,B}(\lambda; \alpha)} x^\sigma$ を考える。すると,

定理 2. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) (\lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0)$, $a = (a_1, \dots, a_r) (a_1 > \dots > a_r > 0)$

に対し,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)} x^\sigma = \det \left(\tilde{q}_{A,B,\lambda_i}^{(a_j)}(x) - \tilde{q}_{A,B,\lambda_i}^{(a_j-1)}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq r}$$

特に, $A = \mathbb{N}, B = \emptyset$ [resp. $A = \emptyset, B = \mathbb{N}$] のとき, $\sigma = (b_{ij})$ に対する

(A,B) -partially strict shifted plane partition の条件 (P1), (P2) は $b_{ij} > b_{i,j+1}$

$(\forall i,j)$ [resp. $b_{ij} > b_{i+1,j} (\forall i,j)$] ということであり, このとき σ は

row-strict [resp. column-strict] であるという. さらに, $sh(\sigma) = \lambda$,

$pr(\sigma) = a$ となる row-strict [resp. column-strict] shifted plane

partition σ の全体を $\mathcal{R}(\lambda:a) = \mathcal{S}_{\mathbb{N},\emptyset}(\lambda:a)$ [resp. $\mathcal{C}(\lambda:a) = \mathcal{S}_{\emptyset,\mathbb{N}}(\lambda:a)$]

とおく.

系 1.
$$\sum_{\sigma \in \mathcal{R}(\lambda:a)} x^\sigma = \det \left(e_{\lambda_i}^{(a_j)}(x) - e_{\lambda_i}^{(a_j-1)}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq r}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{C}(\lambda:a)} x^\sigma = \det \left(h_{\lambda_i}^{(a_j)}(x) - h_{\lambda_i}^{(a_j-1)}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq r}$$

さらに, $x_i = q^i$ と代入すると, $\mathcal{R}(\lambda:a)$, $\mathcal{C}(\lambda:a)$ の一変数母

関数が得られる.

系 2. shifted plane partition $\sigma = (b_{ij})$ に対し, $|\sigma| = \sum_{i,j} b_{ij}$

と書くことにすると,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{R}(\lambda:a)} q^{|\sigma|} = \det \left(q^{a_j + \binom{\lambda_i}{2}} \begin{bmatrix} a_j - 1 \\ \lambda_i - 1 \end{bmatrix} \right)_{1 \leq i,j \leq r}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{C}(\lambda; a)} q^{|\sigma|} = \det (q^{a_j + \lambda_i - 1} \begin{bmatrix} a_j + \lambda_i - 2 \\ \lambda_i - 1 \end{bmatrix})_{1 \leq i, j \leq r}.$$

ここで, $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ は Gauss 多項式 (q -2項係数) である:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{cases} \prod_{i=1}^m \frac{1 - q^{n-i+1}}{1 - q^i} & (0 \leq m \leq n \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

この結果は, 対称性をもつ plane partition の母関数を求めるために用いられている. ([Ok1], [An], [MRR])

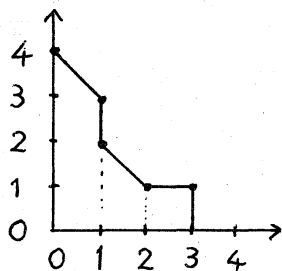
§3. 証明について,

定理 1, 2 は, 'lattice path' を用いることによつて, ほとんど同様に証明できる. そこで, 以下では定理 2 の証明について解説する.

以下, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{N}$ となる $\mathbb{N}$ の部分集合 A , B を固定して考える. $\Pi = \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \dots\}$) とおき, Π の各点 $v = (i, j)$ で行ける方向の集合 S_v を次のように定める.

$$S_v = \begin{cases} \{(1, -1)\} & (i=0, j \in A) & \searrow \\ \{(1, 0)\} & (i=0, j \in B) & \rightarrow \\ \{(1, -1), (0, -1)\} & (i > 0, j \in A) & \swarrow \searrow \\ \{(1, 0), (0, -1)\} & (i > 0, j \in B) & \swarrow \downarrow \\ \emptyset & (j=0) & \end{cases}$$

このとき, lattice path とは, Π の点列 $p = (v_0, v_1, \dots, v_\ell)$ ($v_k = (i_k, j_k) \in \Pi$) で $v_{k+1} - v_k \in S_{v_k}$ ($k=0, 1, \dots, \ell-1$) となるもののことをいふ. さらに, この p に対して $\omega(p) = \prod_{k: i_{k+1} - i_k = 1} \chi_{j_k}$ とおく. また, v_0 を p の始点, v_ℓ を p の終点と呼び, v_k と v_{k+1} ($k=0, 1, \dots, \ell-1$) の間を線分で結んで, p を視覚的に表す. 例えば, $A = \{\text{偶数}\}$, $B = \{\text{奇数}\}$ のとき, $p = ((0, 4), (1, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 0))$ は lattice path である.



のように表され, $\omega(p) = \chi_1 \chi_2 \chi_4$ である. v を始点とし, v' を終点とする lattice path 全体を $\mathcal{L}(v; v')$ とおく.

さて, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) (\lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0)$, $a = (a_1, \dots, a_r) (a_1 > \dots > a_r > 0)$ とし, shifted plane partition の集合 $\mathcal{S}_{A,B}(\lambda; a)$ と lattice path の関係をみる. そのために,

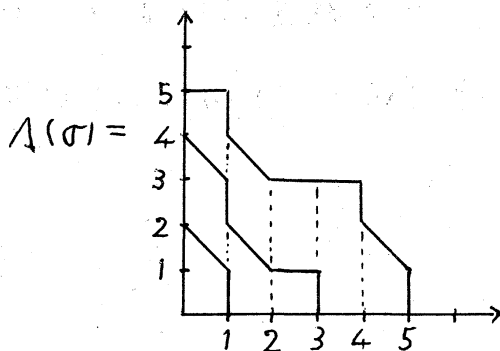
$$\mathcal{L}^0(\lambda; a) = \{ (p_1, \dots, p_r); (i) \ p_i \in \mathcal{L}((0, a_i); (\lambda_i, 0)), \\ (ii) \ i \neq j \text{ のとき } p_i, p_j \text{ は交わらない} \}$$

とおく. そして, $\sigma = (b_{ij}) \in \mathcal{S}_{A,B}(\lambda; a)$ に対して, $p_i \in \mathcal{L}((0, a_i); (\lambda_i; 0))$ を, $(j-i, a_{ij})$ と $(j-i+1, a_{ij}-1)$ ($a_{ij} \in A$ のとき) または $(j-i+1, a_{ij})$ ($a_{ij} \in B$ のとき) を結ぶ辺と, 必要な縦の辺から成

る lattice path とし, $\Lambda(\sigma) = (p_1, \dots, p_r)$ とおく. 例えば, $A = \{\text{偶数}\}$, $B = \{\text{奇数}\}$ のとき,

$$\sigma = \begin{array}{ccccc} & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ & 4 & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \end{array} \in \mathcal{S}_{A,B}((5,3,1); (5,4,2))$$

に対して,



となる.

補題 1. $\Lambda: \mathcal{S}_{A,B}(\lambda; a) \longrightarrow \mathcal{L}^o(\lambda; a)$ は全単射であり, $\sigma \in \mathcal{S}_{A,B}(\lambda; a)$ に対して $\Lambda(\sigma) = (p_1, \dots, p_r)$ とおくと,

$$\chi^\sigma = \prod_{i=1}^r \omega(p_i).$$

そこで, $L(\lambda; a) = \sum_{(p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{L}^o(\lambda; a)} \left(\prod_{i=1}^r \omega(p_i) \right)$ とおくと, 上の補題から,

$$(*) \quad L(\lambda; a) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{A,B}(\lambda; a)} \chi^\sigma$$

この $L(\lambda; a)$ を求めるために, $\omega \in \mathcal{G}_r$ に対して,

$$\mathcal{L}_\omega(\lambda; a) = \mathcal{L}((0, a_1); (\lambda_{\omega(1)}, 0)) \times \dots \times \mathcal{L}((0, a_r); (\lambda_{\omega(r)}, 0)),$$

$$\mathcal{L}(\lambda; a) = \bigsqcup_{\omega \in \mathcal{G}_r} \mathcal{L}_\omega(\lambda; a)$$

とおく. そして, $P \in \mathcal{L}_\omega(\lambda: a)$ に対して $\omega = \rho(P)$ と書くことに
 する. このとき, $\mathcal{L}^0(\lambda: a) \subset \mathcal{L}_e(\lambda: a)$ (e は G_r の単位元) である
 ことに注意する.

補題 2 次の条件 (i) ~ (iv) をみたす写像 $*$: $\mathcal{L}(\lambda: a) \longrightarrow \mathcal{L}(\lambda: a)$
 が存在する.

- (i) $P \in \mathcal{L}(\lambda: a)$ に対して, $P^{**} = P$
- (ii) $P \in \mathcal{L}^0(\lambda: a)$ に対して, $P^* = P$.
- (iii) $P = (p_1, \dots, p_r)$, $P^* = (p_1^*, \dots, p_r^*)$ とすると, $\prod_{i=1}^r \omega(p_i) = \prod_{i=1}^r \omega(p_i^*)$
- (iv) $P \in \mathcal{L}(\lambda: a) - \mathcal{L}^0(\lambda: a)$ に対して, $\text{sgn } \rho(P) = -\text{sgn } \rho(P^*)$

この補題により,

$$\sum_{P=(p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{L}(\lambda: a) - \mathcal{L}^0(\lambda: a)} \text{sgn } \rho(P) \left(\prod_{i=1}^r \omega(p_i) \right) = 0$$

となるから,

$$L(\lambda: a) = \sum_{P=(p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{L}(\lambda: a)} \text{sgn } \rho(P) \cdot \left(\prod_{i=1}^r \omega(p_i) \right).$$

ここで,

$$L_{\lambda_i, a_j} = \sum_{P \in \mathcal{L}((1, 0, a_j), (\lambda_i, 0))} \omega(P)$$

とおくと,

$$(**) \quad L(\lambda: a) = \det (L_{\lambda_i, a_j})_{1 \leq i, j \leq r}.$$

補題 3. $\sum_{k=1}^N L_{k, \ell} = \tilde{\mathcal{G}}_{A, B, k}^{(N)}(\chi)$

従, て, (*), (**) と 補題 3 より,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{A,B}(\lambda; \alpha)} \chi^{\sigma} = \det(\tilde{g}_{A,B,\lambda_j}^{(\alpha_i)}(\chi) - \tilde{g}_{A,B,\lambda_j}^{(\alpha_i-1)}(\chi))$$

となり, 定理 2 が示される.

定理 1 の方は, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0)$, $N \in \mathbb{N}$ とするとき,
上の議論の $\mathcal{L}^{\circ}(\lambda; \alpha)$ の代わりに

$$\mathcal{L}^{\circ}(\lambda; \leq N) = \{ (p_1, \dots, p_r) : \begin{array}{l} (i) \ p_i \in \mathcal{L}((r-i+1, N); (\lambda_i + r - i + 1, 0)) \\ (ii) \ i \neq j \text{ のとき, } p_i, p_j \text{ は交わらない.} \end{array} \}$$

を用い, 全単射 $\mathcal{P}_{A,B}(\lambda; \leq N) \ni \pi = (a_{ij}) \mapsto P = (p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{L}^{\circ}(\lambda; \leq N)$ を,

p_i は, $(r-i+j, a_{ij})$ と $(r-i+j+1, a_{ij-1})$ ($a_{ij} \in A$ のとき) または $(r-i+j+1, a_{ij})$ ($a_{ij} \in B$ のとき) を結ぶ辺と, 必要な縦の辺から成る.

ように定義すれば, 定理 2 の証明と同様にして示される.

最後に, 詳しくは, [Ok2] を参照された. また, 定理 2 の応用については [Ok3] も参照された.

参考文献

- [An] G.E. Andrews: Plane partitions (III). Invent. Math. 53 (1979)
- [MRR] W.H. Mills, D.P. Robbins, and H. Rumsey, Jr.: Proof of the Macdonald conjectures, Invent. Math. 66 (1982)
- [Ok1] S. Okada: On the generating functions for certain classes of plane partitions, to appear in J. Combin. Theory, Ser. A
- [Ok2] ———: Partially strict shifted plane partitions, to appear
- [Ok3] ———: shifted plane partitionの母関数, 数理研講究録
「組合せ論とその周辺の研究」
- [St] R.P. Stanley: Unimodality and Lie superalgebras, Studies in applied Math. 72 (1985)