

等方性乱流の超高次構造関数

電通大 細川 巖 (Iwao Hosokawa)

航技研 山本稀義 (Kiyoshi Yamamoto)

1. 研究の目的

ある変数のゆらぎを定量的にみるために構造関数という概念が登場し，乱流ではAnselmet et al¹⁾が速度構造関数 $\langle [u(x+r)-u(x)]^n \rangle \sim r^{\zeta_n}$ を実験的に調べ， r の慣性領域でべき指数 ζ_n を $n = 18$ まで求め，既成の統計理論 (β モデル，lognormal理論) と比べている。 $\langle \quad \rangle$ は平均操作を意味する。

速度の構造もさることながら，dissipation の構造も乱流の特性を示す重要な統計量であるから，さらに

$$\langle \varepsilon_r^q \rangle / \varepsilon_L^q \sim (r/L)^{-\mu_q} \quad (1)$$

を考えよう。 ε_r は r の直径の球内の dissipation の平均値， L は等方性乱流を包含する macroscale である。 μ_q は intermittency exponent と呼ばれ， $\zeta_n = n/3 - \mu_{n/3}$ の関係がある。

このようなべき法則がどのように存在し、 μ_q が q と共にどう変化するかを、典型的な等方性乱流²⁾において定量的に調べようというのが、当面の目的である。実験では ε は直接扱えず、 $(\nu/2)(\partial u/\partial x)^2$ などの量の1次元平均で代表させている現状であるから、この研究は興味がある。われわれは正しい ε を計算し、3次元平均を使い、(1)の関係を $-30 \leq q \leq 30$ について調べた。

2. Multifractal theory との理論的関連

intermittency exponent μ_q が、最近カオスの研究方法論として確立したmultifractal theory とどう関係するかを注意しておこう。Hentschel & Procaccia³⁾は generalized dimension D_q を次のように導入した。

$$\sum_i N_i p_i^q = (r/L)^{(q-1)D_q} \quad \text{for } r/L \rightarrow 0 \quad (2)$$

ここに $p_i = E_r^{(i)}/E_L$ で、(乱流においては) E_r は辺 r の d 次元箱内の total dissipation と考える。 N は辺 L の箱に含まれるすべての disjoint な辺 r の subbox の数である。従って、 $E_r \sim \varepsilon_r r^d$, $E_L \sim \varepsilon_L L^d$, $N = r^d/L^d$ の関係から、(1),(2)を同一のものと見ることができ、

$$-\mu_q = (q-1)(D_q - d) \quad (3)$$

が得られる。カオスシステムの $f-\alpha$ スペクトルは、

Meneveau & Sreenivasan⁴⁾により, D_q が分かれば,

$$\text{scaling index: } \alpha = d/dq[(q-1)(D_q - d + 1)]$$

$$\text{spectrum of } \alpha : f(\alpha) = \alpha^q - (q-1)(D_q - d + 1) + d - 1$$

のようになる。これらは μ_q の重要性を再認識させる。

しかし, (1)から(2)への移行は無条件ではない。(1)のようなべき法則は慣性領域での話であり, (2)では $r/L \rightarrow 0$ とはいっても, 無限に小さく self-similarity が成り立つような場合は自然界には多くはない。乱流の場合には(2)は慣性領域以下にまでは適用できないと思われる。このことを確認しておかないと(1)と(2)の関連は破れ, (3)は成り立たないであろう。

3. 結果の説明

Fig. 1 は $q > 0$ において $\langle \varepsilon_{r,q} \rangle / \varepsilon_{L,q}$ の r 依存を示す。 r が小さいほど dissipation のモーメントは大きくなり, dissipation のゆらぎがいかに大きいかが分かる。破線で挟まれた部分が, われわれの行った direct simulation (DS)²⁾ において fully-developed state に達した ($t = 10$) 乱流のエネルギースペクトルの慣性領域の波数に対応する eddy length の部分である。この範囲でべき法則を認定することは容易であろう。 λ で示した長さは Taylor's microscale である

。Fig. 2 は $q < 0$ において，前と同じことを行った。負のモーメントの概念は全く新しいが，慣性領域のべき法則は認められよう。Fig. 1 は大きい dissipation のゆらぎを強調したのに対し，Fig. 2 はゼロに近い小さい dissipation のゆらぎを強調する。Fig. 3 に極端な場合を示す。

Fig. 4 には，DS による μ_q ($\diamond$ で示す。)のほかに，現在手に入るほとんどのデータを書き入れた。 $\times$ は Anselmet et al¹⁾ の実験値， $\square$ は Antonia et al⁵⁾ の実験値， $|\text{---}|$ で示したのは Meneveau & Sreenivasan⁴⁾ の誤差ぐるみの実験値である。誤差が大きいのは，彼等が D_q の実験値を得るときに慣性領域を正確に把握していないことと， $(\partial u / \partial x)^2$ の 1 次元データの量が十分でないことによると思われる。 $\bullet$ は Cantor set を使った彼等の理論 (p -model) である。 $\circ$ は square-root exponential model⁶⁾， $+$ は Benzi et al⁷⁾ による random β model である。DS の結果からみて， p -model は定性的に最も有望であるが， $|q|$ の大きいところでの漸近行動はかなり外れる。 β model と lognormal 理論が点線で描かれている。

Fig. 5 は，DS の μ_q から (3) 式を使って D_q を出し，Meneveau & Sreenivasan の結果に重ね書きをしたものである。

$D_{-\infty}$ の値にこれほどの違いがあると，別の理論が必要であら

う。

D S について興味のある μ_q 値を挙げておこう。

$$i) \mu_2 = \mu = 0.19$$

これは最近定説になりつつある値を支持する。

$$ii) \mu_{2/3} = -0.018$$

区間 $[0,1]$ では $\mu_q < 0$ に注意。この値は $\langle \varepsilon^{2/3} \rangle$ にもとずく Kolmogorov index $(-5/3)$ の intermittency correction を示す。(lognormal の場合は $-\mu/9$ 。)

$$iii) \mu_{3/2} / \mu = 0.411$$

$\varepsilon \sim (\partial u / \partial x)^2$ を仮定すれば, (1) から, この量が skewness-kurtosis 関係の power index $(\log s / \log l)$ になることが容易に分かる。(lognormal の場合は $3/8$ 。) 実際これを Fig. 6 に示す。

4. D S における平均操作

$\langle \rangle$ について, D S でやった方法を説明する。われわれは $L = 4\pi$ の立方体の中に周期性乱流をもっている。この中に均等に 8^3 個の格子点を取り, これらを中心とする直径 r の球をつくって, その中で ε_r を計算し, これの 8^3 個の平均をとるのである。ほかにもいろいろな平均操作は可能であるが, r の変化に対して平均データのバラツキがみられないこと

から，これで十分であると考えている。 $\langle \rangle$ を1次元平均でとると，話は全く別で， 8^3 をはるかにこえるアンサンブルをとってもバラツキは絶えないのである。

参考文献

- 1) F. Anselmet, Y. Gagne, E. J. Hopfinger and R. A. Antonia, J. F. M. 140 (1984) 63.
- 2) K. Yamamoto and I. Hosokawa, J. P. S. J. 57 (1988) 1532.
- 3) H. G. E. Hentschel and I. Procaccia, Physica 8D (1983) 435.
- 4) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1424.
- 5) R. A. Antonia, B. R. Satyaprakash and A. K. M. Hussain, J. F. M. 119 (1982) 55.
- 6) I. Hosokawa, Phys. Fluids 32 (1989), to appear.
- 7) R. Benzi, G. Paradin, G. Parisi and A. Vulpiani, J. Phys. A17 (1984) 3521.

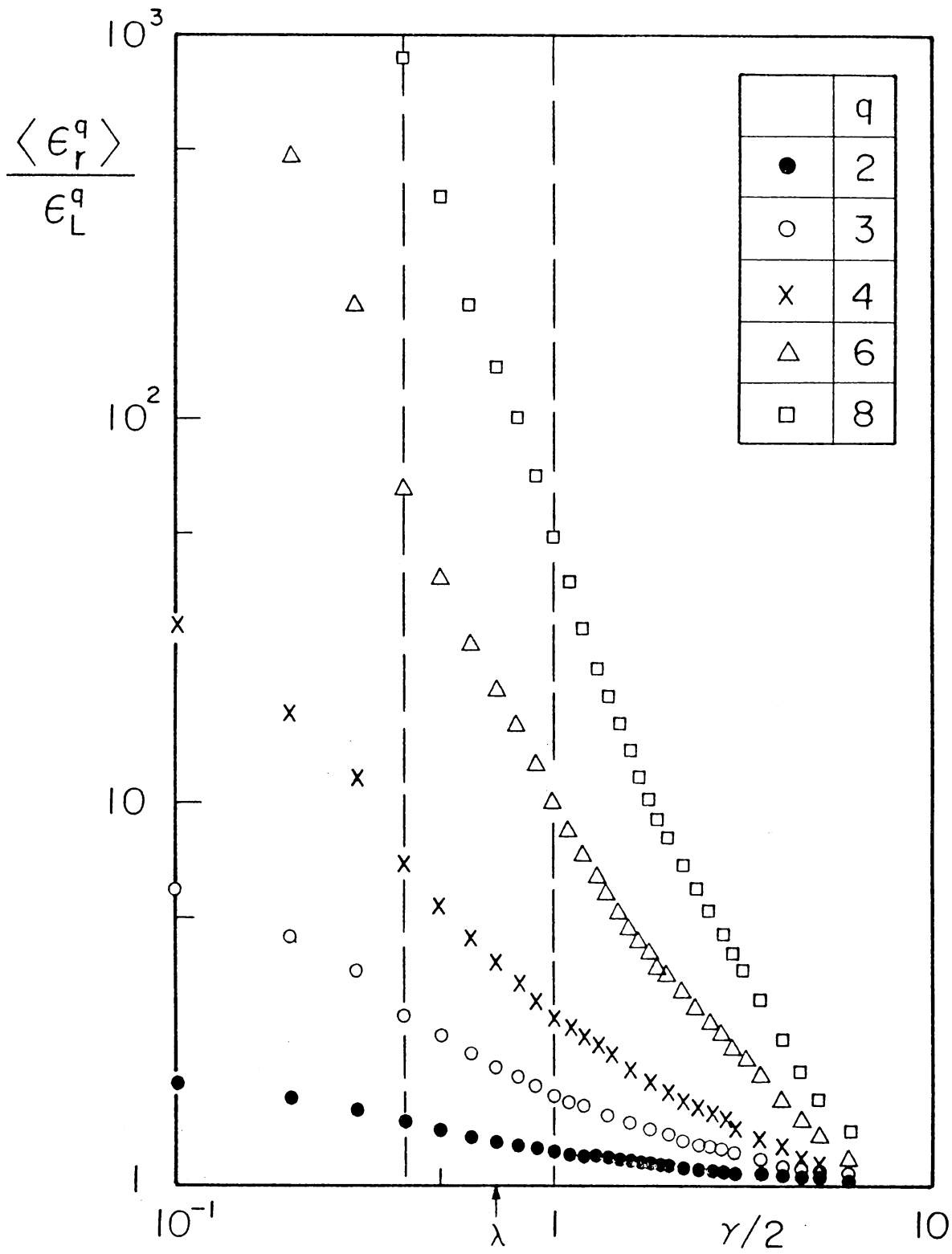


FIG. 1

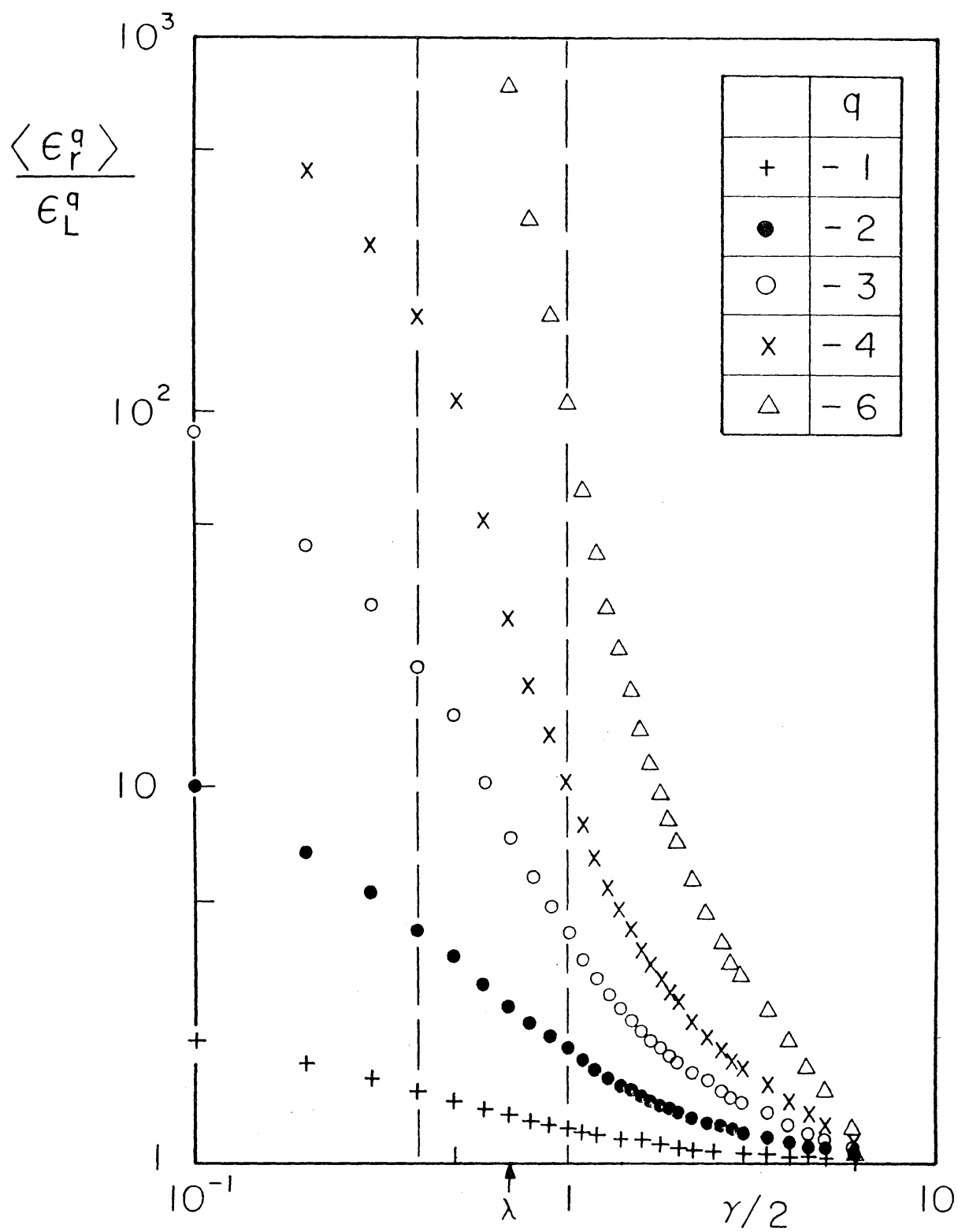


FIG. 2

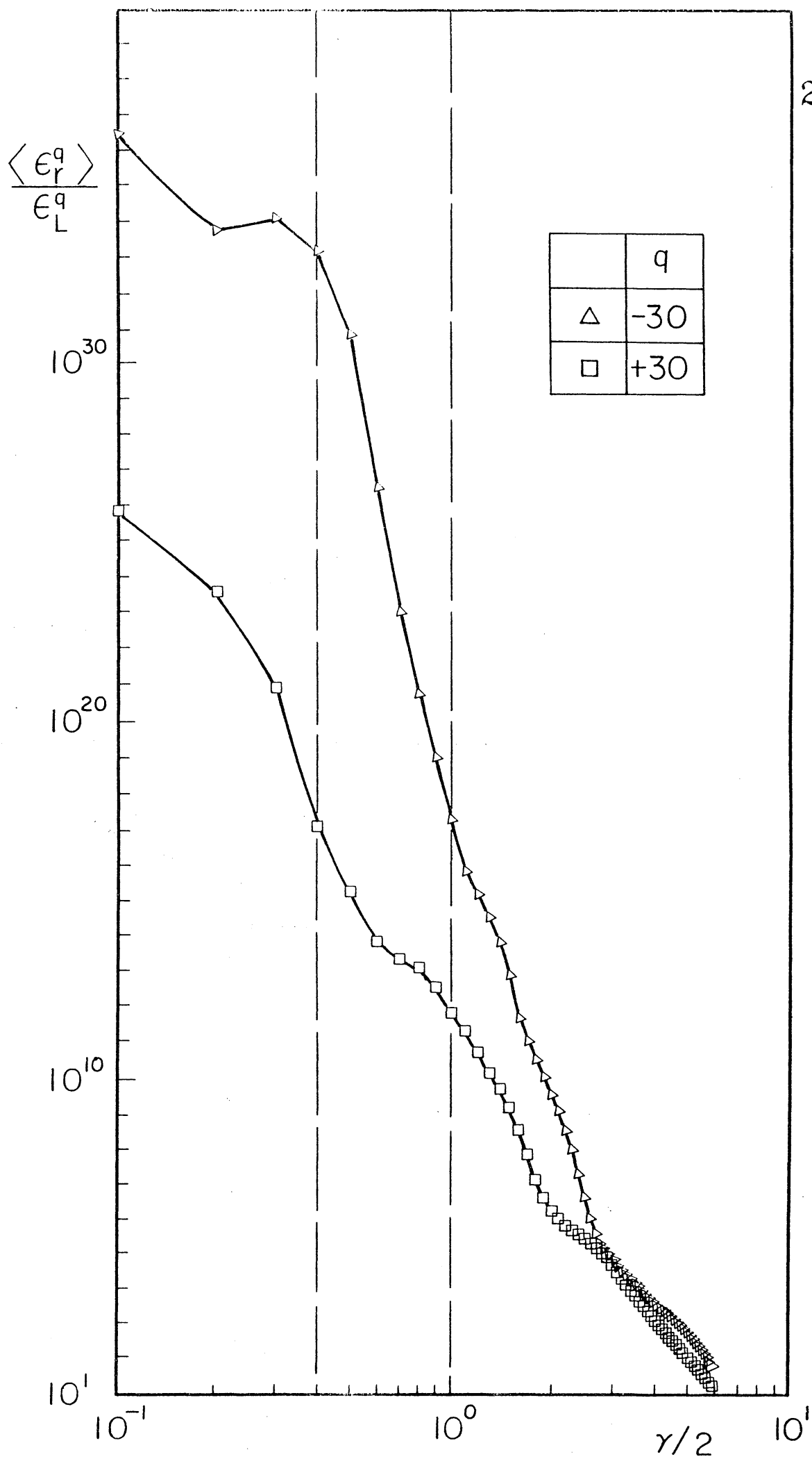


FIG. 3

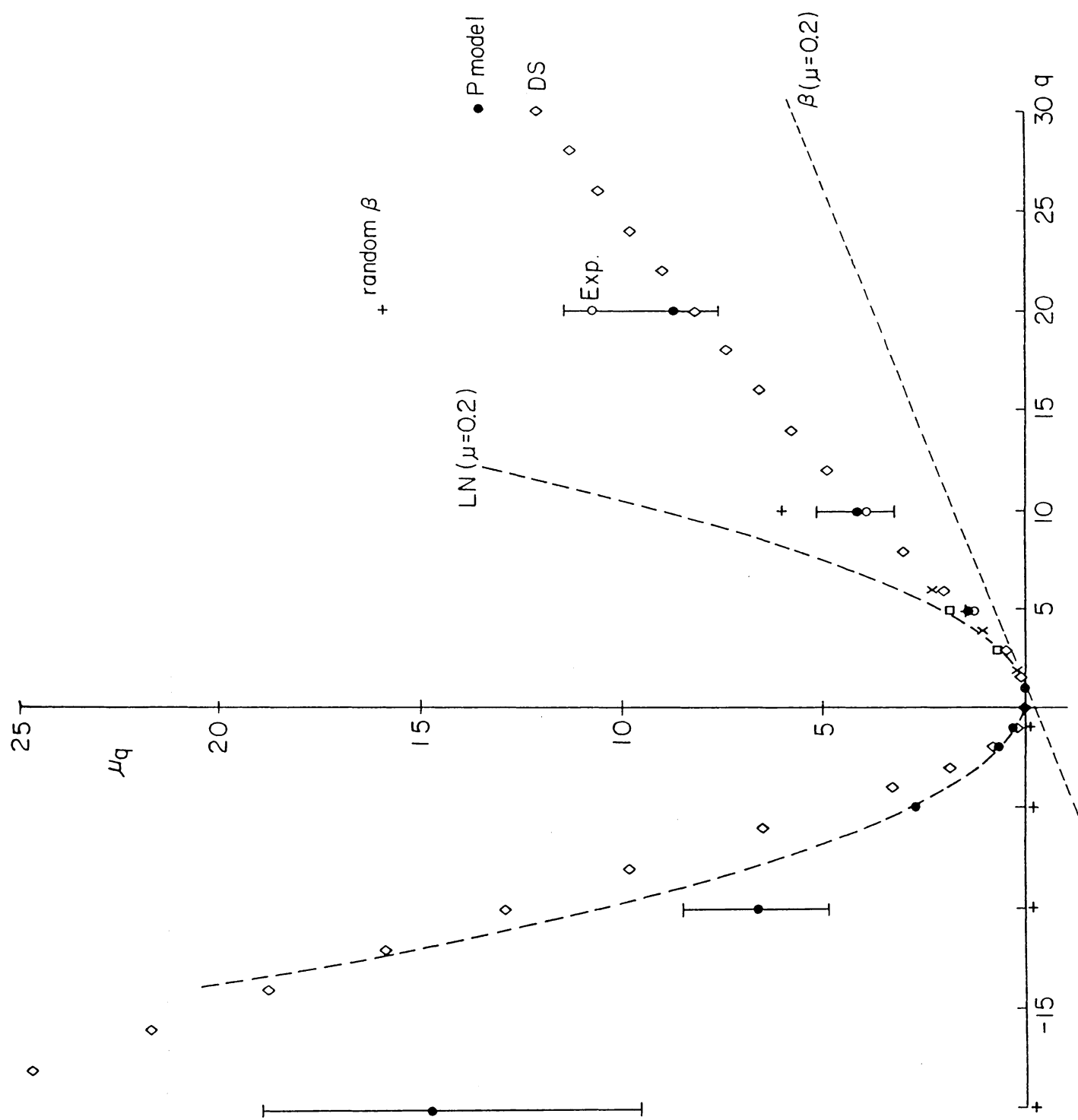


FIG. 4

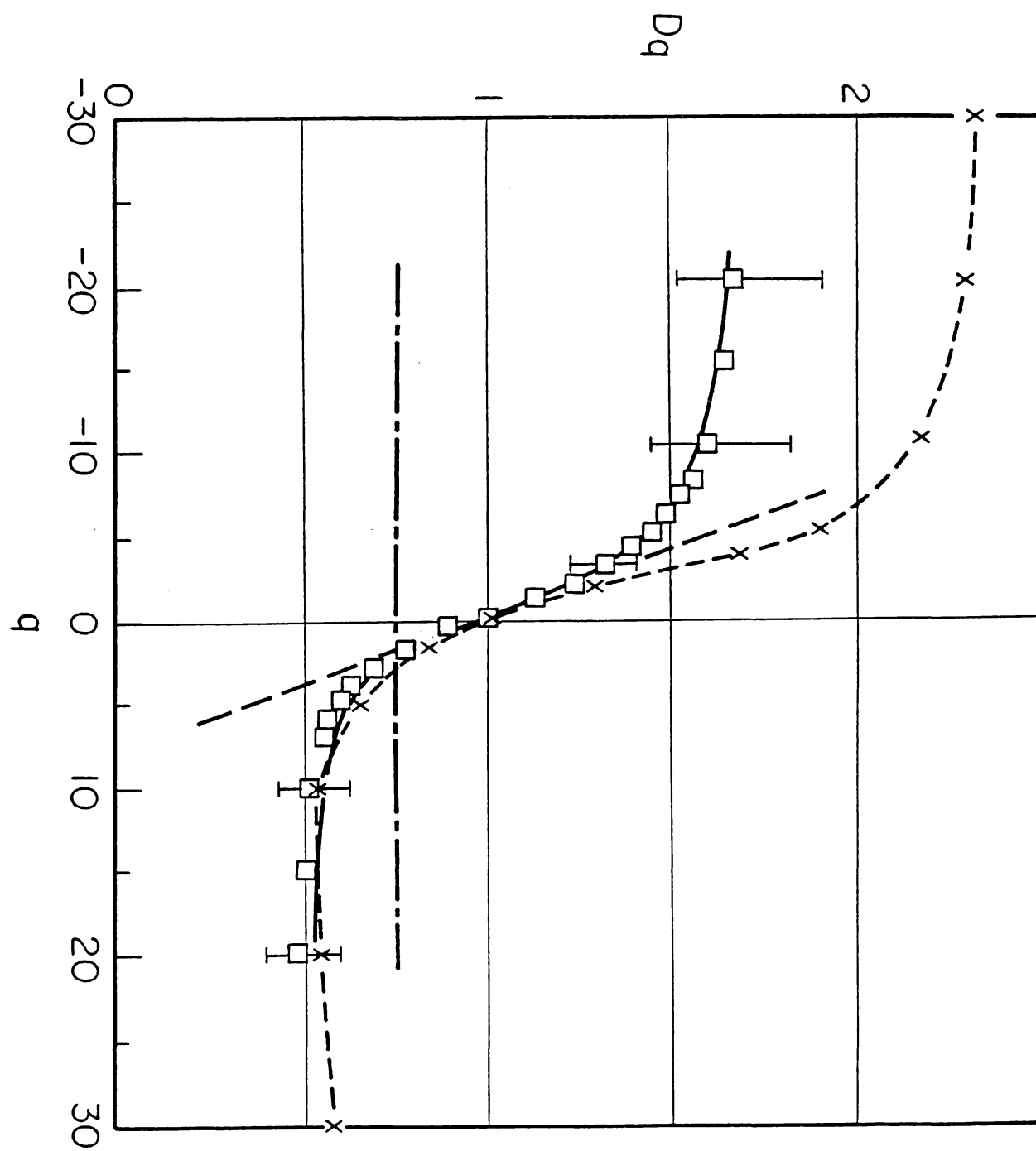


FIG. 5

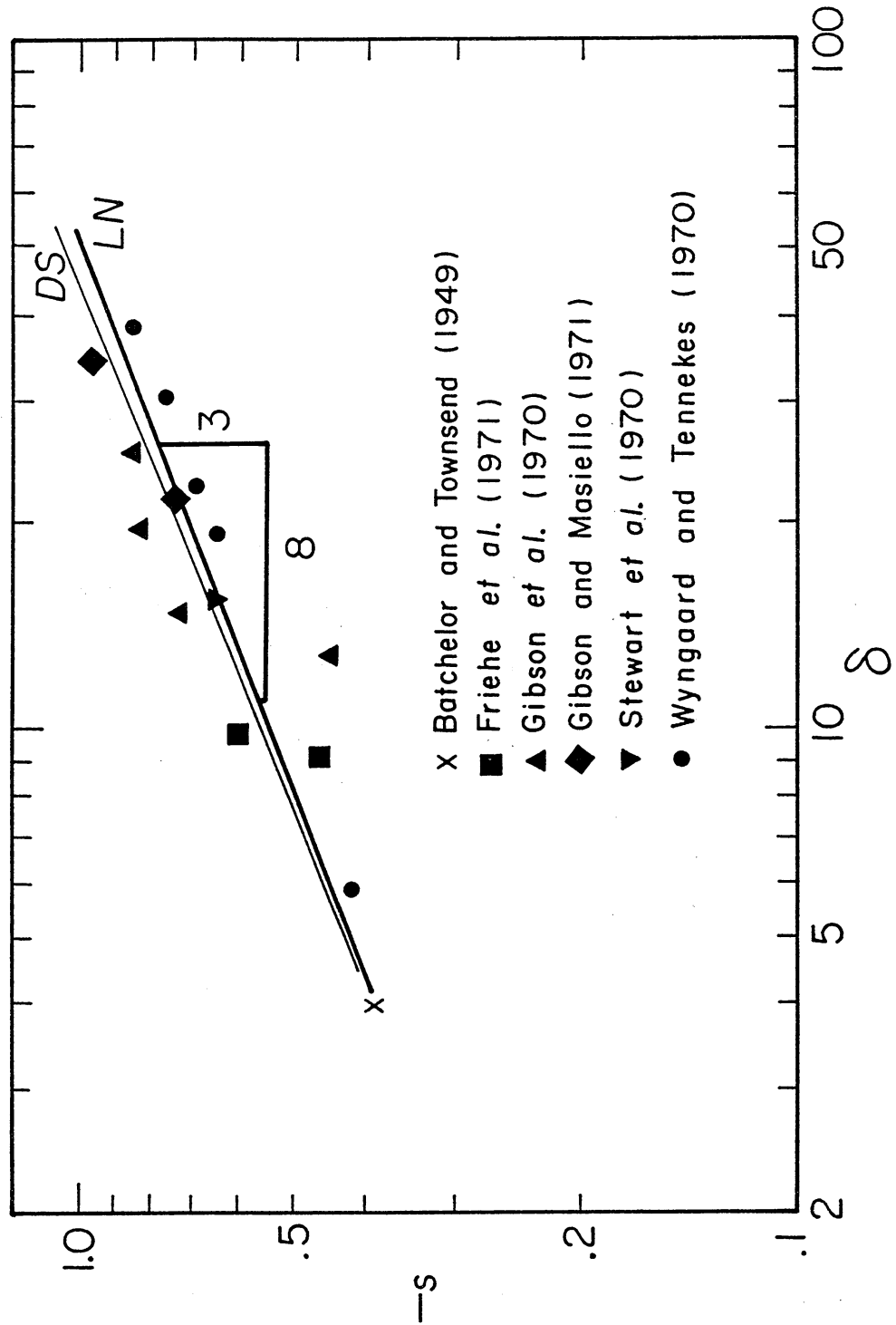


FIG. 6