

Monotone 又は anti-monotone pair skew information に関連した不確定性関係 の一般化について

(Generalized uncertainty relation associated with a
monotone or an anti-monotone pair skew
information)

柳 研二郎 (山口大学大学院理工学研究科)

Kenjiro Yanagi (Yamaguchi University)

梶原 聡 (山口大学大学院理工学研究科)

Satoshi Kajihara (Yamaguchi University)

1 はじめに

Wigner-Yanase skew information は [4] で次のように定義された.

$$I_{\rho}(H) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(i [\rho^{1/2}, H])^2 \right] = \text{Tr}[\rho H^2] - \text{Tr}[\rho^{1/2} H \rho^{1/2} H]$$

この量はある量子状態 ρ とある観測量 H の間の非可換性をあらわすある種の degree として考えられている. ここで $[X, Y] = XY - YX$ は commutator をあらわす. またこれは Dyson によって次のように拡張され Wigner-Yanase-Dyson skew information と呼ばれている.

$$I_{\rho, \alpha}(H) = \frac{1}{2} \text{Tr}[(i[\rho^{\alpha}, H])(i[\rho^{1-\alpha}, H])] = \text{Tr}[\rho H^2] - \text{Tr}[\rho^{\alpha} H \rho^{1-\alpha} H], \alpha \in [0, 1].$$

量子力学的には観測量 H は一般的には非有界作用素であるがこの論文では断らない限り $\mathbb{C}^n$ 上の有界線形作用素すなわち行列であると仮定する. 我々は [5] で一般化された skew information を新たに定義し, ある種の uncertainty relation を導いた. また [6] では Luo [2] の結果の一般化を与えた. 第 2 章では Wigner-Yanase-Dyson skew information の様々な性質を議論する. 第 3 章で主として 2 種類の一般化定理を述べる. 最後に第 4 章でこれらのすべての定理を包括する定理を述べる.

2 Wigner-Yanase-Dyson skew information に関する不確定性関係

Wigner-Yanase skew information と uncertainty relation の間の関係を見ることにする. 量子力学の system においては量子状態 ρ における物理量 H を観測したときの期待値は $\text{Tr}[\rho H]$ であらわされる. また分散は次で定義される.

$$V_\rho(H) = \text{Tr}[\rho(H - \text{Tr}[\rho H]I)^2] = \text{Tr}[\rho H^2] - \text{Tr}[\rho H]^2.$$

ここで量子状態 ρ と 2 つの物理量 A, B に対して次の不等式が成り立つことが知られている.

$$V_\rho(A)V_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|\text{Tr}[\rho[A, B]]|^2 \quad (1)$$

しかし Wigner-Yanase skew information に対する次のような uncertainty relation については成り立たないことが知られている. ([3, 5] を見よ)

$$I_\rho(A)I_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|\text{Tr}[\rho[A, B]]|^2.$$

最近 S.Luo は classical mixture を排除した量子的不確定性をあらわす次のような量 $U_\rho(H)$ を導入した.

$$U_\rho(H) = \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_\rho(H))^2}, \quad (2)$$

このとき S.Luo は [2] において $U_\rho(H)$ に関する次のような uncertainty relation を得た.

$$U_\rho(A)U_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|\text{Tr}[\rho[A, B]]|^2. \quad (3)$$

ここで次の関係に注意する.

$$0 \leq I_\rho(H) \leq U_\rho(H) \leq V_\rho(H). \quad (4)$$

不等式 (3) は (4) の意味で不等式 (1) の精密化である. この章では不等式 (3) に対する one-parameter 拡張を考える.

Definition 2.1 $0 \leq \alpha \leq 1$ と量子状態 ρ と 物理量 H に対して Wigner-Yanase-Dyson skew information を次のように定義する.

$$I_{\rho,\alpha}(H) = \frac{1}{2}\text{Tr}[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^{1-\alpha}, H_0])] = \text{Tr}[\rho H_0^2] - \text{Tr}[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0]$$

また関連して次の量も定義する.

$$J_{\rho,\alpha}(H) = \frac{1}{2}\text{Tr}[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^{1-\alpha}, H_0\}] = \text{Tr}[\rho H_0^2] + \text{Tr}[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0],$$

ただし $H_0 = H - \text{Tr}[\rho H]I$ であり $\{X, Y\} = XY + YX$ は anti-commutator をあらわす.

このとき次の関係が成り立つ.

$$I_{\rho,\alpha}(H) \leq I_{\rho}(H) \leq J_{\rho}(H) \leq J_{\rho,\alpha}(H). \quad (5)$$

(2) の直接の一般化として次を定義する.

$$U_{\rho,\alpha}(H) = \sqrt{V_{\rho}(H)^2 - (V_{\rho}(H) - I_{\rho,\alpha}(H))^2},$$

このとき (5) の最初の不等式より次が成り立つ.

$$0 \leq I_{\rho,\alpha}(H) \leq U_{\rho,\alpha}(H) \leq U_{\rho}(H).$$

我々の関心は不等式 (3) の直接の一般化である. そこで次の結果を得た.

Theorem 2.1 ([6]) 任意の量子状態 ρ と任意の物理量 A, B と任意の $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して次が成り立つ.

$$U_{\rho,\alpha}(A)U_{\rho,\alpha}(B) \geq \alpha(1-\alpha)|\text{Tr}[\rho[A, B]]|^2. \quad (6)$$

Remark 2.1 (6) において $\alpha = 1/2$ とおくことにより (3) が得られる. したがって Theorem 2.1 は Luo [2] の結果の一般化であることがわかる.

3 一般化(その1)

Definition 3.1 $\alpha, \beta \geq 0$ と量子状態 ρ と物理量 H に対して一般化された Wigner-Yanase-Dyson skew information と関連する量を次のように定義する.

$$\begin{aligned} I_{\rho,\alpha,\beta}(H) &= \frac{1}{2} \text{Tr}[(i[\rho^{\alpha}, H_0])(i[\rho^{\beta}, H_0])\rho^{1-\alpha-\beta}] \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Tr}[\rho H_0^2] + \text{Tr}[\rho^{\alpha+\beta} H_0 \rho^{1-\alpha-\beta} H_0] \} - \frac{1}{2} \{ \text{Tr}[\rho^{\alpha} H_0 \rho^{1-\alpha} H_0] + \text{Tr}[\rho^{\beta} H_0 \rho^{1-\beta} H_0] \}. \\ J_{\rho,\alpha,\beta}(H) &= \frac{1}{2} \text{Tr}[\{\rho^{\alpha}, H_0\}\{\rho^{\beta}, H_0\}\rho^{1-\alpha-\beta}] \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Tr}[\rho H_0^2] + \text{Tr}[\rho^{\alpha+\beta} H_0 \rho^{1-\alpha-\beta} H_0] \} + \frac{1}{2} \{ \text{Tr}[\rho^{\alpha} H_0 \rho^{1-\alpha} H_0] + \text{Tr}[\rho^{\beta} H_0 \rho^{1-\beta} H_0] \}. \end{aligned}$$

また次のように定義する.

$$U_{\rho,\alpha,\beta}(H) = \sqrt{I_{\rho,\alpha,\beta}(H)J_{\rho,\alpha,\beta}(H)}.$$

Theorem 3.1 ρ が invertible のとき, $\alpha, \beta \geq 0$ が $\alpha + \beta \geq 1$ または $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}$ を満たすとき次の不等式が成り立つ.

$$U_{\rho, \alpha, \beta}(A)U_{\rho, \alpha, \beta}(B) \geq \alpha\beta |Tr[\rho[A, B]]|^2. \quad (7)$$

Definition 3.2 $\alpha, \beta \geq 0$ と量子状態 ρ と物理量 H に対して一般化された Wigner-Yanase-Dyson skew information (2) と関連する量を次のように定義する.

$$\tilde{I}_{\rho, \alpha, \beta}(H) = \frac{1}{2} Tr[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^\beta, H_0])] = Tr[\rho^{\alpha+\beta} H_0^2] - Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^\beta H_0]$$

$$\tilde{J}_{\rho, \alpha, \beta}(H) = \frac{1}{2} Tr[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^\beta, H_0\}] = Tr[\rho^{\alpha+\beta} H_0^2] + Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^\beta H_0]$$

また次のように定義する.

$$\tilde{U}_{\rho, \alpha, \beta}(H) = \sqrt{\tilde{I}_{\rho, \alpha, \beta}(H)\tilde{J}_{\rho, \alpha, \beta}(H)}.$$

Theorem 3.2 ρ が invertible のとき, $\alpha, \beta \geq 0$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\tilde{U}_{\rho, \alpha, \beta}(A)\tilde{U}_{\rho, \alpha, \beta}(B) \geq \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} |Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A, B]]|^2. \quad (8)$$

Remark 3.1 (7) と (8) において $\alpha + \beta = 1$ とおくことにより (6) が得られる. したがって Theorem 3.1 と Theorem 3.2 は Theorem 2.1 の結果の一般化であることがわかる. したがってこれは Luo [2] のさらなる拡張である.

4 一般化(その2)

Definition 4.1 $f(x), g(x)$ を $[0, 1]$. 上の非負連続関数とする. このとき $f(x), g(x)$ が次の2条件

- (1) 任意の $x, y \in [0, 1]$ に対して $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ が成り立つ
- (2) $f(x), g(x)$ は $(0, 1)$ 上で微分可能で $F(x) = \log f(x), G(x) = \log g(x)$ とおくと

$$0 \leq \inf_{0 < x < 1} \frac{G'(x)}{F'(x)} \leq \sup_{0 < x < 1} \frac{G'(x)}{F'(x)} < \infty$$

が成り立つ

を満たすとき, 対 (f, g) を *compatible in log-increase, monotone pair* (略して *CLI monotone pair*) という.

同様にして

Definition 4.2 $f(x), g(x)$ を $[0, 1]$ 上の非負連続関数とする. このとき $f(x), g(x)$ が次の2条件

- (1) 任意の $x, y \in [0, 1]$ に対して $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \leq 0$ が成り立つ
- (2) $f(x), g(x)$ は $(0, 1)$ 上で微分可能で $F(x) = \log f(x), G(x) = \log g(x)$ とおくと

$$0 \leq \inf_{0 < x < 1} \frac{G'(x)}{F'(x)} \leq \sup_{0 < x < 1} \frac{G'(x)}{F'(x)} < \infty$$

が成り立つ

を満たすとき, 対 (f, g) を *compatible in log-increase, anti-monotone pair* (略して *CLI anti-monotone pair*) という.

Definition 4.3 $\alpha, \beta \geq 0$ と量子状態 ρ と物理量 H に対して一般化された *skew information* と関連する量 $I_{\rho, (f, g, h)}(H)$ と関係した量 $J_{\rho, (f, g, h)}(H)$ および $U_{\rho, (f, g, h)}(H)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} I_{\rho, (f, g, h)}(H) &= \frac{1}{2} \text{Tr}[(\iota[f(\rho), H_0])(\iota[g(\rho), H_0])h(\rho)] \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Tr}[f(\rho)g(\rho)g(\rho)H_0^2] + \text{Tr}[f(\rho)g(\rho)H_0h(\rho)H_0] \\ &\quad - \text{Tr}[f(\rho)H_0g(\rho)h(\rho)H_0] - \text{Tr}[f(\rho)h(\rho)H_0g(\rho)H_0] \} \\ J_{\rho, (f, g, h)}(H) &= \frac{1}{2} \text{Tr}[\{f(\rho), H_0\}\{g(\rho), H_0\}h(\rho)] \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Tr}[f(\rho)g(\rho)g(\rho)H_0^2] + \text{Tr}[f(\rho)g(\rho)H_0h(\rho)H_0] \\ &\quad + \text{Tr}[f(\rho)H_0g(\rho)h(\rho)H_0] + \text{Tr}[f(\rho)h(\rho)H_0g(\rho)H_0] \} \\ U_{\rho, (f, g, h)}(H) &= \sqrt{I_{\rho, (f, g, h)}(H)J_{\rho, (f, g, h)}(H)} \end{aligned}$$

この論文の主定理を得るために次の記号を導入する.

Definition 4.4 $f(x), g(x), h(x)$ および $F(x) = \log f(x), G(x) = \log g(x), H(x) = \log h(x)$ に対して

$$m = \inf_{0 < x < 1} \frac{G'(x)}{F'(x)}, \quad M = \sup_{0 < x < 1} \frac{G'(x)}{F'(x)}$$

$$n = \inf_{0 < x < 1} \frac{H'(x)}{F'(x)}, \quad N = \sup_{0 < x < 1} \frac{H'(x)}{F'(x)}$$

とおくとき $\beta(f, g, h)$ を次のように定義する.

$$\beta(f, g, h) = \min \left\{ \frac{m}{(1+m+n)^2}, \frac{m}{(1+m+N)^2}, \frac{M}{(1+M+n)^2}, \frac{M}{(1+M+N)^2} \right\}$$

さらに次の2つの仮定を設ける.

(I) $(f, g), (f, h)$ は次を満たす CLI monotone pair である.

$$1 + \frac{G(y) - G(x)}{F(y) - F(x)} \leq \frac{H(y) - H(x)}{F(y) - F(x)} \quad (x < y).$$

(II) $(f, g), (f, h)$ は次を満たす CLI monotone pair と CLI anti-monotone pair である.

$$1 + \frac{G(y) - G(x)}{F(y) - F(x)} + \frac{H(y) - H(x)}{F(y) - F(x)} > 0 \quad (x < y).$$

次の定理が得られる.

Theorem 4.1 仮定 (I) 又は (II) の下で次の *trace inequality* が成り立つ. 任意の $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して

$$U_{\rho, (f, g, h)}(A) U_{\rho, (f, g, h)}(B) \geq \beta(f, g, h) |\text{Tr}[f(\rho)g(\rho)h(\rho)[A, B]]|^2.$$

$h(x) = 1$ のとき Ko-Yoo [1] の結果が得られる.

Corollary 4.1 (f, g) が CLI monotone pair のとき, 任意の $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して

$$U_{\rho, (f, g)}(A) U_{\rho, (f, g)}(B) \geq \beta(f, g) |\text{Tr}[f(\rho)g(\rho)[A, B]]|^2.$$

$f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \geq 0$), $g(x) = x^\beta$ ($\beta \geq 0$), $h(x) = x^\gamma$ ($\gamma \geq 0$ 又は $\gamma \leq 0$) のとき次の Corollary が得られる.

Corollary 4.2 次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ が $0 < \alpha + \beta \leq \gamma$ を満たすとき

$$\beta(f, g, h) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

(2) $\alpha, \beta \geq 0, \gamma \leq 0$ が $\alpha + \beta + \gamma > 0$ を満たすとき

$$\beta(f, g, h) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

Remark 4.1 $\alpha, \beta \geq 0, \gamma < 0$ が $\alpha + \beta + \gamma > 0$ を満たすとき

$$\lim_{x \rightarrow +0} h(x) = +\infty$$

となるので $h(x)$ は $[0, 1]$ で連続ではない. このときには ρ の最小固有値より小さい $\epsilon > 0$ をとると $h(x)$ は $[\epsilon, 1]$ で連続になるので, この区間で Theorem 4.1 を適用すれば Corollary 4.2 を得る.

Remark 4.2 Corollary 4.2 の (2) で $\gamma = 0$ とすると [8] の Theorem 2.3 が得られる. また Corollary 4.2 で $\alpha + \beta + \gamma = 1$ とすると [7] の Theorem 2.2 が得られる. つまり (1) から $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq \frac{1}{2}$ となり, また (2) から $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta \geq 1$ となる.

参考文献

- [1] C.K.Ko and H.J.Yoo, *Uncertainty relation associated with amonotone pair skew information*, J.Math.Anal.Appl., vol.383(2011), pp.208-214.
- [2] S.Luo, *Heisenberg uncertainty relation for mixed states*, Phys. Rev. A, vol.72(2005), p.042110.
- [3] S.Luo and Q.Zhang, *On skew information*, IEEE Trans. Information Theory, vol.50(2004), pp.1778-1782, and *Correction to "On skew information"*, IEEE Trans. Information Theory, vol.51(2005), p.4432.
- [4] E.P.Wigner and M.M.Yanase, *Information content of distribution*, Proc. Nat. Acad. Sci. U,S,A., vol.49(1963), pp.910-918.

- [5] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, *A generalized skew information and uncertainty relation*, IEEE Trans. Information Theory, vol.51(2005), pp.4401-4404.
- [6] K.Yanagi, *Uncertainty relation on Wigner-Yanase-Dyson skew information*, J. Math. Anal. Appl., vol.365(2010), pp.12-18.
- [7] K.Yanagi, *Uncertainty relation on generalizaed Wigner-Yanase-Dyson skew information*, Linear Algebra and its Applications, vol.433(2010), pp.1524-1532.
- [8] K.Yanagi, *Trace inequality related to generalized Wigner-Yanase-Dyson skew information*, preprint.
- [9] K.Yanagi and S.Kajihara, *Generalized uncertainty relation associated with a monotone or an anti-monotone pair skew information*, preprint.