

Tropical toric geometry

梶原 健*

概要

We present a theory of tropical toric varieties, and, two applications, tropical moment maps and intersection theory on tropical toric surfaces.

本稿は、城崎代数幾何学シンポジウムでの講演に基づいて、トロピカル幾何の紹介と、トロピカルトーリック曲面上の交点理論について紹介したい。

講演の機会を与えていただいた世話人の方々、講演の際、プロジェクター等の準備にあたっていただいた方々に感謝します。

1 トロピカル幾何とは

はじめに、トロピカル幾何について簡単に紹介する。“トロピカル”幾何という名称を聞いて、“トロピカル”とは一体どんな幾何だろうか、と興味をもつ方も多いのではないだろうか。

Speyer と Sturmfels [17] によると、「min-plus(あるいは max-plus) 代数に注目したブラジル人の Imre Simon 氏に、フランス人の同僚の Jean-Eric Pin 氏らが、Simon 氏に敬意を表して、この代数をトロピカルと呼んだ」ということである。これがトロピカルという形容詞が使われるようになった経緯らしい。この経緯のキーワードは、ブラジル人とフランス人である。再び [17] によれば、トロピカルというのは、フランス人からみたブラジルのことを表す形容詞らしい。このような経緯らしいので、トロピカルからくるイメージと代数や幾何の実体の関係はあまりないと思われる。

次に、トロピカル幾何に登場する基本的な概念について説明する。

1.1 トロピカル代数

min-plus 代数とか max-plus 代数と呼ばれる代数をトロピカル代数と呼ぶが、例えば min-plus 代数とは、通常の加法と乗法の代数系の公理を、加法を“最小値”に、乗法を通常の和に置き換えたものである。詳しく述べると、トロピカル半体 (tropical semi-field) と

*2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary: 14M25, 14P99 Secondary: 52B70, 68W30
本研究は科学研究費萌芽研究 (19654002) の援助を受けています。

は、実数体と、次の2つの2項演算 $+^{\text{trop}}$ (トロピカル和), $\times^{\text{trop}}$ の組のことである: $a, b \in \mathbb{R}$ に対して,

$$a +^{\text{trop}} b := \min(a, b), \quad a \times^{\text{trop}} b := a + b.$$

この代数系は、通常の体の公理のうち、零元の存在と加法に関する逆元の存在以外はみたすので、半体と呼ばれる。

具体的に計算してみると,

$$1 +^{\text{trop}} 0 = 0, \quad 1 +^{\text{trop}} 1 = 1, \quad 1 \times^{\text{trop}} 0 = 1, \quad 1 \times^{\text{trop}} 1 = 2$$

である。

零元については、 $\mathbb{R}$ のすべての元よりも大きい元 (例えば ∞ と書いて) をつけて、零元の存在をみたす半体を考えることができる。しかし、トロピカル和がべき等的 (つまり、 $a \in \mathbb{R}$ に対して $a +^{\text{trop}} a = a$) なので、零元以外に逆元をつけることは原理的にできない。

1.2 トロピカル多項式

トロピカル多項式の定義を述べる。 t を底とするトロピカル多項式とは、変数 $t, x_1, \dots, x_n$ の $\mathbb{R}$ 係数ローラン多項式 $f := \sum_{\alpha} a_{\alpha} t^{c_{\alpha}} x^{\alpha}$ が定義する区分的線形関数

$$f^{\text{trop}} := \left(\sum_{\alpha} a_{\alpha} t^{c_{\alpha}} x^{\alpha} \right)^{\text{trop}} := \min_{a_{\alpha} \neq 0} (\langle \alpha, x \rangle + c_{\alpha})$$

(ここで $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ を表す) のことである。例えば、2変数のとき $(x + ty)^{\text{trop}} = \min(x, 1 + y)$ である。

(多くの文献ではこのトロピカル多項式を “ $0x + 1y$ ” と書く。上の定義では t と書いた底は、形式的なもので特別な意味はない。その意味で、多くの文献にあるように、“ $0x + 1y$ ” と書く方が自然であるが、この表記は具体的に手で計算する際に混乱しやすいように思う。そこで、本稿では、“底” という用語を用いた。)

また、本稿では、関数を多項式と呼ぶのを避けるため、これらの関数をローラン多項式のトロピカル化と呼んで多項式と区別することにする。

1.3 トロピカル幾何

トロピカル幾何を (非常に雑ではあるが) 標語的にいうと、線形不等式の幾何、とか、min-plus 代数の幾何と呼べるかもしれない。例えば、次のトロピカル曲線の例で考える。

1.1 例 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $\varphi: (\xi, \eta) \mapsto \min(\xi, \eta, 0)$ の微分できない点全体 V は、トロピカル直線と呼ばれる。図1参照。ここで、 φ が微分できない点というのは、ちょうど $\xi, \eta, 0$ のうち最小のものが2つ以上あるような点である。すなわち、連立不等式

$$\begin{cases} \xi \leq \eta, 0 \\ \eta \leq \xi, 0 \\ 0 \leq \xi, \eta \end{cases}$$

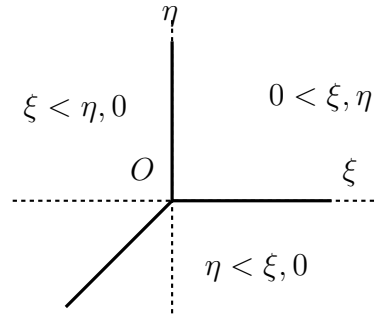


図 1: トロピカル直線

のうち，2 つ以上の不等式をみたす点である．このような点は，それぞれの不等式が表す領域の境界に現れる．したがって，図において，トロピカル直線で区切られた 3 つの領域がそれぞれの不等式に対応している．

次はトロピカル 2 次曲線の例である．

1.2 例 $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$\varphi: (\xi, \eta) \mapsto \min(2\xi + 1, \xi + \eta, 2\eta + 1, \xi, \eta, 1)$$

の微分できない点全体 V は，トロピカル 2 次曲線の例である．図 2 参照．各領域に書いたアフィン線形関数が，最小値を与える関数である．

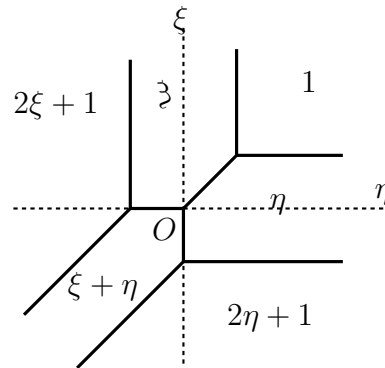


図 2: トロピカル 2 次曲線

1.4 多項式のトロピカル化

さきに述べたトロピカル多項式は，ローラン多項式から定義される区分的線形関数のことであった．しかし，異なるローラン多項式であっても同じ区分的線形関数(トロピカル多項式)を定義することがあるので，ここでは，この区分的線形関数をトロピカル多項式とは呼ばずに，ローラン多項式のトロピカル化と呼ぶことにする．

1.3 定義 0 でないローラン多項式 $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ のトロピカル化 $f^{\text{trop}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \xi \mapsto f^{\text{trop}}(\xi)$ を, $\mathbb{R}^n$ 上の区分的線形関数

$$f^{\text{trop}}(\xi) = f^{\text{trop}}(\xi_1, \dots, \xi_n) := \min\{\alpha \cdot \xi := \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i; a_{\alpha} \neq 0\}$$

と定義する.

例えば, $(x + y + 1)^{\text{trop}} = \min(\xi, \eta, 0)$ である. 0 でないローラン多項式が同じトロピカル化を定義するための条件を, そのニュートン多面体で述べることができる.

1.4 命題 2 つのローラン多項式 f, g のトロピカル化が等しくなるための必要十分条件は, f, g のニュートン多面体が一致することである. ここで $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ のニュートン多面体とは, $\mathbb{R}^n$ における $\{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n; a_{\alpha} \neq 0\}$ の凸包である.

例えば, $x^2 + y^2 + 1$ と $x^2 + xy + y^2 + 2$ のトロピカル化はともに $(\xi, \eta) \mapsto \min(2\xi, 2\eta, 0)$ である. 実際,

$$\min(2\xi, 2\eta, 0) = \min(2\xi, \xi + \eta, 2\eta, 0)$$

である (それらのニュートン多面体は 3 点 $(2, 0), (0, 2), (0, 0)$ の凸包である). 図 3 参照.

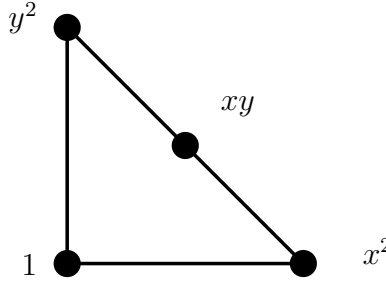


図 3: ニュートン多面体

1.5 アフィン多様体に伴うトロピカル多様体

多項式のトロピカル化やトロピカル半体において, 加法の演算がべき等的なので, 差が定義できない. この点で, 従来の代数系より扱いにくい. 特に, トロピカル多様体をローラン多項式環のイデアルを用いて定義する場合, 注意が必要である. トロピカル代数で定義するには, さらに工夫がいる (Mikhalkin [12]).

1.5 定義 アフィン多様体 $V^{\text{trop}}(I) \subset \mathbb{R}^r$ (定義イデアルを $I \subset \mathbb{C}[x_1^{\pm}, \dots, x_r^{\pm}]$ とする) に伴うトロピカル多様体 $V^{\text{trop}}(I)$ を

$$V^{\text{trop}}(I) := \bigcap_{f \in I \setminus \{0\}} V^{\text{trop}}(f)$$

と定義する. ここで $V^{\text{trop}}(f)$ は f のトロピカル化 f^{trop} が微分可能でない点の集合を表す.

1.6 注 (1) イデアル $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ が $f_1, \dots, f_s$ で生成されていても、そのアフィン多様体に伴うトロピカル多様体 $V^{\text{trop}}(I)$ は、生成元の定義するトロピカル多様体の共通部分 $V^{\text{trop}}(f_1) \cap \dots \cap V^{\text{trop}}(f_s)$ とは限らない。(次項を参照)

(2) アフィン多様体 V を定義する定義イデアルによらずに、 V に共なうトロピカル多様体は定まる。

1.6 トロピカル基底

アフィン多様体に伴うトロピカル多様体は、定義イデアルの生成元の定義するトロピカル超曲面の共通部分とは限らないことを述べた。そこで、イデアル I の (有限個の) 生成元 $f_1, \dots, f_s$ が、

$$V^{\text{trop}}(\langle f_1, \dots, f_s \rangle) = V^{\text{trop}}(f_1) \cap \dots \cap V^{\text{trop}}(f_s)$$

をみたすとき、 $f_1, \dots, f_s$ を I のトロピカル基底と呼ぶ。

一般に、トロピカル基底の存在が知られている [1, Theorem 2.9]。単項イデアルのトロピカル基底は生成元であるが、一般の場合を求めるには、普遍グレブナー基底を用いるなど工夫が必要である。トロピカル多様体を計算機で計算するアルゴリズムが知られている。

1.7 例 (かなり自明な例であるが、参考までに書く。) イデアル $I = \langle x + y, x - y \rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{C}[x^{\pm}, y^{\pm}]$ に対して、 $V^{\text{trop}}(I) = \emptyset$ である。 $x + y$ と $x - y$ のトロピカル化は一致するので、

$$V^{\text{trop}}(x + y) \cap V^{\text{trop}}(x - y) = V^{\text{trop}}(x + y) = V^{\text{trop}}(x - y)$$

となる。よって $\{x + y, x - y\}$ は I のトロピカル基底ではない。

自明でない例は、例えば [1, Example 2.8] を見よ。

2 代数幾何からトロピカル幾何へ

前節では、トロピカル多様体をローラン多項式が定める区分的線形関数を使って説明した。一方、多項式環のイデアルから、その零点集合としてアフィン代数多様体を得られる。そこで、この節ではアフィン多様体から (イデアルを経由せずに) 直接トロピカル多様体を定義する方法について述べる。

この節では K を、自明でない非アルキメデス付値をもつ代数的閉体とする。例えば、多くの文献にあるように、形式的 Puiseux 級数のなす体

$$\mathbb{C}((t)) \text{ の代数的閉包 } \cong \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{C}((t^{1/n}))$$

(付値は $v: K^\times \rightarrow \mathbb{R}; \sum_i a_i t^i \mapsto \min\{i; a_i \neq 0\}$) がある．アフィン多様体のトロピカル化を，写像

$$v^r: (K^\times)^r \rightarrow \mathbb{R}^r; (x_1, \dots, x_r) \mapsto (v(x_1), \dots, v(x_r))$$

を用いて次のように定義する．

2.1 定義 $(K^\times)^r$ の閉部分多様体 $V \subset (K^\times)^r$ に対して， V の伴うトロピカル多様体 V^{trop} とは， V の K 有理点の集合 $V(K)$ の v^r による像 $v^r(V(K))$ の閉包と定義する．ここで，“閉包”は $\mathbb{R}^r$ のユークリッド位相に関する閉包である．

2.2 例 $V = \{(x, y) \in K^\times; x + y + 1 = 0\}$ に伴うトロピカル直線は例 1.1 と同じである．実際， $x, y \in K^\times$ が $x + y + 1 = 0$ をみたすとき， $x, y, 1$ の付値 $v(x), v(y), v(1) = 0$ の少なくとも 2 つは，この 3 つの値の最小値をとる必要がある．よって， $V^{\text{trop}} \subset V^{\text{trop}}(x + y + 1)$ である．この場合は $V^{\text{trop}} \supset V^{\text{trop}}(x + y + 1)$ も容易にわかり， $V^{\text{trop}} = V^{\text{trop}}(x + y + 1)$ である．一般に， $V^{\text{trop}} = V^{\text{trop}}(I)$ も知られている (例えば [9, Proposition 1.4])．

3 トロピカルトーリック多様体

本節では，トロピカルトーリック多様体を定義する．前節までの r 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^r$ は代数的トーラス $K^\times$ の“付値をとった”像であるから，トロピカル代数的トーラスと呼ぶこともできる． $K^\times$ の付値による像を考えるかわりに K の付値による像を考え，トロピカルアフィン空間や，さらにトロピカルトーリック多様体に一般化する．

まず，付値の定義域を K に，値域を $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に拡張する．すなわち

$$v: K \rightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

とする．ここで記号 ∞ は， $a < \infty$ かつ， $a + \infty = \infty$ ($\forall a \in \mathbb{R}$) をみたすと定義する．

形式的に指数写像 $\exp: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を， $\exp(a) := e^{-a}$ (ただし $e^{-\infty} = 0$) と定義する．

トロピカル代数的トーラスからトロピカルトーリック多様体へ一般化するために，トーラスの点とそのトロピカル化を説明する．トーリック多様体の教科書でよく使う記号に合わせて，階数 r の自由アーベル群を $M := \mathbb{Z}^r$ とし，その双対加群を $N := \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$ と書く．このとき， r 次元代数的トーラスの K 有理点のトロピカル化を $v^r: K^\times \rightarrow \mathbb{R}^r$ と定義し，これは次の可換図式をみたす：

$$\begin{array}{ccc} (K^\times)^r & \xrightarrow{v^r} & \mathbb{R}^r \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Hom}(M, K^\times) & \xrightarrow[\text{Hom}(\text{id}, v)]{} & \text{Hom}(M, \mathbb{R}) =: N_{\mathbb{R}}. \end{array}$$

上の図式の 2 行目の表示を使って，トロピカルトーリック多様体に一般化する．

3.1 定義 (1) $N_{\mathbb{R}}$ の強凸錐 σ に対するトロピカルアフィントーリック多様体 U_{σ}^{trop} を

$$U_{\sigma}^{\text{trop}} := \text{Hom}(\sigma^{\vee} \cap M, \overline{\mathbb{R}})$$

と定義する．ここで $\sigma^{\vee}$ は σ の双対錐である．

(2) 扇 Σ に対するトロピカルトーリック多様体 X_{Σ}^{trop} を $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_{\sigma}^{\text{trop}}$ と定義する．ここで和集合は錐の包含写像 $\sigma \subset \tau$ が誘導する自然な写像 $U_{\sigma} \rightarrow U_{\tau}$ によって定義する．

(3) 自然な写像 $U_{\sigma} \rightarrow U_{\sigma}^{\text{trop}}$ をはりあわせることにより，トーリック多様体のトロピカル化 v_{Σ} を $v_{\Sigma}: X_{\Sigma} \rightarrow X_{\Sigma}^{\text{trop}}$ と定義する．

3.2 注 上の定義は，アルキメデスの付値体の場合にも有効である．例えば， $\mathbb{C}$ と絶対値の組の場合，トロピカルトーリック多様体 X_{Σ}^{trop} は，[14, Proposition 1.8] で角付き多様体 $\text{Mc}(N, \Sigma)$ と呼ばれている．

3.3 例 トロピカルアフィン直線 $\mathbb{A}^{1, \text{trop}}$ は $\overline{\mathbb{R}} \approx \mathbb{R}_{\geq 0}$ であり，トロピカルアフィン曲面 $\mathbb{A}^{2, \text{trop}}$ は $\overline{\mathbb{R}}^2 \approx \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ である (図 4)．トロピカル射影直線は線分，トロピカル射影平面は 3 角形と

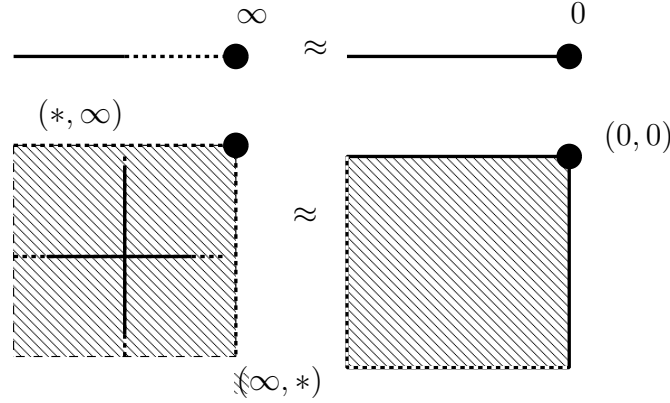


図 4: トロピカルアフィン直線，平面

同相である (図 5)．

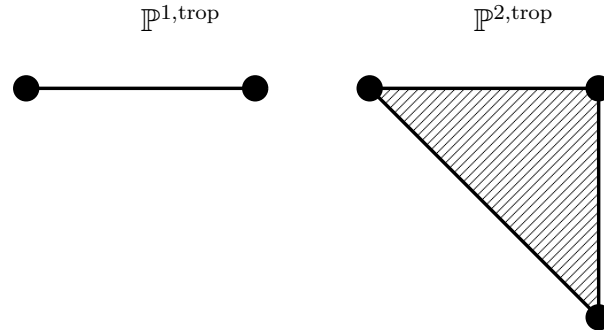


図 5: トロピカル射影直線，平面

射影トーリック多様体のトロピカル化は、実は代数的モーメント写像と考えることもできる。この意味で、トロピカル化写像はモーメント写像の一般化とも考えることができる。まず、代数的モーメント写像を説明する。

付値体 K の乗法付値 $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}; x \mapsto \exp(-v(x))$ を使って、代数的モーメント写像とトロピカルモーメント写像を定義する。

3.4 定義 整多面体 P により、非常に豊富な偏極が与えられている射影トーリック多様体 X_P に対して、 X_P の代数的モーメント写像 $\mu_P: X_P \rightarrow M_{\mathbb{R}}$ を

$$\mu_P: X_P(K) \rightarrow M_{\mathbb{R}}; p \mapsto \frac{1}{\sum_{m \in P \cap M} |x^m(p)|} \sum_{m \in P \cap M} |x^m(p)| m$$

と定義する。また X_P^{trop} のトロピカルモーメント写像 $\mu_P^{\text{trop}}: X_P^{\text{trop}} \rightarrow M_{\mathbb{R}}$ を

$$\mu_P^{\text{trop}}: X_P^{\text{trop}} \rightarrow M_{\mathbb{R}}; \bar{p} \mapsto \frac{1}{\sum_{m \in P \cap M} e^{-\langle \bar{p}, m \rangle}} \sum_{m \in P \cap M} e^{-\langle \bar{p}, m \rangle} m$$

と定義する。

3.5 定理 定義の $\mu_P, \mu_P^{\text{trop}}$ に対して、図式

$$\begin{array}{ccc} X_{\Sigma} & \xrightarrow{\mu_P} & M_{\mathbb{R}} \\ v_{\Sigma} \downarrow & & \parallel \\ X_{\Sigma}^{\text{trop}} & \xrightarrow{\mu_P^{\text{trop}}} & M_{\mathbb{R}}, \end{array}$$

可換である。すなわち $\mu_P = \mu_P^{\text{trop}} \circ v_{\Sigma}$ である。さらに、 μ_P^{trop} は X_{Σ}^{trop} から $\mu_P(X_{\Sigma})$ への同相写像を誘導する。

証明. 定義より $|x^m(p)| = e^{-\langle v_{\Sigma}(p), m \rangle}$ が容易にわかる。これより、定理の図式が可換であることが従う。注 3.2, トロピカルトーリック多様体 X_P^{trop} は自然に角つき多様体 $\text{Mc}(N, \Sigma)$ と同相である。よって、定理は $K = \mathbb{C}$ の場合の結果より従う (cf. [14, p. 94, Remark]). $\square$

4 トーリック曲面上の交点理論

非特異射影トーリック曲面上の交点理論をトロピカルトーリック曲面に写して考えることができる [9]。この節では、トロピカルトーリック曲面内のトロピカル曲線の交点重複度は、凸体に関する算術的な公式で与えられ、代数曲線の場合の交点重複度を使って表すことができること (定理 4.3) を説明する。

まず、トロピカル曲線の交点重複度を説明して、定理を述べる。

$\mathbb{P}^{2, \text{trop}}$ 内のトロピカル曲線は線分と半直線の和集合 (複体) になっている。そこで、これらの線分や半直線を辺とよぶことにする。トロピカル曲線の辺の交点 (0 次元単体) を節とよぶ。

簡単のため, $N_{\mathbb{R}}$ 内のトロピカル平面曲線の場合に, 辺の重みを定義する. 一般のトーリック曲面の場合は, Cox の斉次座標環を用いて定義される.

4.1 定義 $f = \sum a_u x^u$ を多項式 $\in K[x_1, x_2]$ とし, $C^{\text{trop}} := \tilde{V}^{\text{trop}}(f)$ を $N_{\mathbb{R}}$ 内のトロピカル曲線とする. C^{trop} の辺 e の重み $\omega(e)$ を次のように定義する. e の内点 w をとり,

$$L_e := \{u \in M; v(a_u) + \langle w, u \rangle \leq v(a_{u'}) + \langle w, u' \rangle, \forall u' \in M\} \text{ の凸包 } \subset M_{\mathbb{R}}$$

と M との共通部分の元の個数から 1 を引いたものを $\omega(e)$ と定義する: $\omega(e) := |L_e \cap M| - 1$. これは w のとり方によらない.

辺の重みを用いて, 交点重複度を定義する. 以下の定義において, (1) は Sturmfels [20] によるものである. また, “非退化” な交わりの場合の一般的な定義は [12] をみよ.

4.2 定義 C^{trop} と D^{trop} をトロピカル射影平面曲線とする. 簡単のため, C, D の辺はすべて $N_{\mathbb{R}}$ と交わるものとする. C^{trop} と D^{trop} が辺 $e \subset C^{\text{trop}}, e' \subset D^{\text{trop}}$ で交わる (交点を w) とする.

(1) $w \in N_{\mathbb{R}}$ のとき.

$$i^{\text{trop}}(C^{\text{trop}}, D^{\text{trop}}; w) := \omega_e \omega_{e'} |\det(\varepsilon \varepsilon')|.$$

ここで ε と ε' はそれぞれ e_1 と e_2 の原始ベクトルとし, $|\det(\varepsilon \varepsilon')| = |N_{\mathbb{R}}/(\mathbb{Z}\varepsilon + \mathbb{Z}\varepsilon')|$ を表す.

(2) $w \in \mathbb{P}^{2, \text{trop}} \setminus N_{\mathbb{R}}$ のとき. 例えば $w = (\infty : \infty : 0)$ のとき, $N_{\mathbb{R}}$ の基底 $(1, 0), (0, 1)$ をとり, w を通る C^{trop} の辺を $e_1, \dots, e_s$ とし, w を通る D^{trop} の辺を $e'_1, \dots, e'_t$ とする. これらの辺の w に向う方向の原始ベクトルを $(a_i, b_i), (a'_j, b'_j)$ ($i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, t$) とする. このとき, $i^{\text{trop}}(C^{\text{trop}}, D^{\text{trop}}; w)$ を

$$i^{\text{trop}}(C^{\text{trop}}, D^{\text{trop}}; w) := \sum_{i,j} \omega_{e_i} \omega_{e'_j} \min(a_i b'_j, a'_j b_i)$$

と定義する.

本稿の最後で, 具体例を紹介する. 上の定義 (2) において, 原始ベクトルの成分表示は非特異錐の極小生成系 (N の $\mathbb{Z}$ 基底) によるものであることに注意せよ. ([8] 参照)

代数幾何的な交点重複度の定義を復習する. 平面曲線 C, D が p で交わる時, p での定義方程式 f, g を用いて, p の交点重複度 $i^{\text{alg}}(C, D; p)$ を

$$i^{\text{alg}}(C, D; p) := \dim_K \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, p} / \langle f, g \rangle$$

と定義する.

簡単のため, トロピカル射影平面の場合の交点重複度について述べる. 一般にトロピカル非特異射影トーリック曲面について成り立つ [9, Theorem 4.3].

4.3 定理 (cf. [9, Theorem 4.3]) 射影平面曲線 C と D に伴うトロピカル曲線 C^{trop} , D^{trop} が節でない有限個の点で交わるとする. このとき, すべての点 $p \in C^{\text{trop}} \cap D^{\text{trop}}$ に対して,

$$i^{\text{trop}}(C^{\text{trop}}, D^{\text{trop}}; p) = \sum_{P \in v_{\mathbb{P}^2}^{-1}(p)} i^{\text{alg}}(C, D; P)$$

が成り立つ. ここで $v_{\mathbb{P}^2}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^{2, \text{trop}}$ は $\mathbb{P}^2$ のトロピカル化写像を表す. とくに,

$$C^{\text{trop}} \cdot D^{\text{trop}} := \sum_{p \in C^{\text{trop}} \cap D^{\text{trop}}} i^{\text{trop}}(C^{\text{trop}}, D^{\text{trop}}; p) = C \cdot D$$

が成り立つ.

証明の概略を述べる. ∞ を斉次座標に高々1しか含まない場合は, 代数曲線の交点を係数体の付値環上の平坦族の交わりに拡張し, 閉ファイバーでの交点がトロピカル曲線の交点重複度で計算できることを示す.

$(\infty : \infty : 0)$ のような点で交わる場合, このような点でのブローアップを繰り返して, 射影公式を用いて上の場合に帰着する.

詳細は [9] を参照してください.

4.4 例 $x^2 + xy + z^2 = 0$ で定義される平面曲線 C と $tx + z = 0$ で定義される平面曲線 D について考える (図 6). 定義に従って計算すると, $i^{\text{trop}}(C^{\text{trop}}, D^{\text{trop}}; p) = i^{\text{trop}}(C^{\text{trop}}, D^{\text{trop}}; q) = 1$

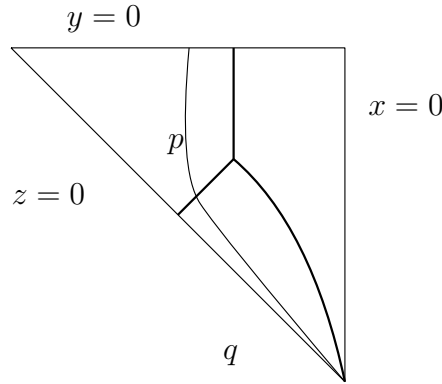


図 6: トロピカル直線とトロピカル 2 次曲線

である. よって $\tilde{V}_{\mathbb{P}^2}^{\text{trop}}(f) \cdot \tilde{V}_{\mathbb{P}^2}^{\text{trop}}(g) = 2$ である.

4.5 例 平面曲線 $C: x^8 + x^4z^4 + x^2yz^5 + xy^2z^5 + y^5z^3 + y^8 = 0$, と $D: g = tx^2 + yz = 0$ の交点を考える (図 7). 定義にしたがって計算すると, $i^{\text{trop}}(C^{\text{trop}}, D^{\text{trop}}; p) = 8$ と $i^{\text{trop}}(C^{\text{trop}}, D^{\text{trop}}; q) = 4$, $i^{\text{trop}}(C^{\text{trop}}, D^{\text{trop}}; s) = 2 + 1 + 1 = 4$ がわかる. 最後の式で 2 と 1 と 1 は, それぞれ s に向かってのびる $\tilde{V}_{\Sigma}^{\text{trop}}(f)$ の半直線たちと $\tilde{V}_{\Sigma}^{\text{trop}}(g)$ の交点重複度を表す. したがって $\tilde{V}_{\Sigma}^{\text{trop}}(f) \cdot \tilde{V}_{\Sigma}^{\text{trop}}(g) = 16 = 4 \times 2$ である.

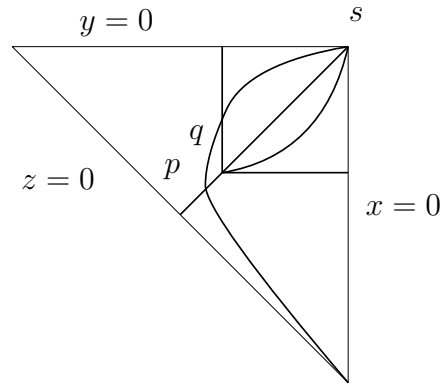


図 7: 2 次, 8 次トロピカル平面曲線

参考文献

- [1] T. Bogart, A. Jensen, D. Speyer, B. Sturmfels and R. Thomas, Computing Tropical Varieties, math.AG/0507563.
- [2] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Algèbre commutative, Chapitres 1–4, et 5–7, Masson, 1985.
- [3] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Algèbre commutative, Chapitres 8 et 9, Masson, 1983.
- [4] D. Cox, The homogeneous coordinate ring of a toric variety, J. Algebraic Geom. 4 (1995), 17–50.
- [5] W. Fulton, Introduction to toric varieties, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [6] 石川 剛郎, トロピカル幾何学入門, 東北大学「春の学校」, 2007 年 1 月 (<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/ishikawa-tropical07.pdf>).
- [7] I. Itenberg, G. Mikhalkin, E. I. Shustin, Tropical Algebraic Geometry (Overwolfach Seminars), Birkhauser (Architectural) (2007).
- [8] 梶原 健 (木村杏子 記) トロピカル幾何入門, 名古屋大学多元数理講義録, vol 6 (2007) 5–20 .
- [9] T. Kajiwarara, Tropical toric varieties, preprint (2007).
- [10] G. Mikhalkin, Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$, math.AG/0312530.
- [11] G. Mikhalkin, Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry, math.AG/0403015.

- [12] G. Mikhalkin, Tropical geometry and its applications, math.AG/0601041.
- [13] G. Mikhalkin and I. Zharkov, Tropical curves, their Jacobians and Theta functions. math.AG/0612267.
- [14] T. Oda, Convex bodies and algebraic geometry, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3.Folge ·Band 15*, Springer-Verlag, Berlin. and Heidelberg, 1988.
- [15] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, and T. Theobald, First steps in tropical geometry, Idempotent mathematics and mathematical physics, 289–317, *Contemp. Math.*, 377, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [16] K. Shigeno, Tropical varieties and the Bezout theorem, Master’s thesis, Tohoku University (2005).
- [17] D. Speyer and B. Sturmfels, Tropical Mathematics, math.CO/0408099.
- [18] D. Speyer and B. Sturmfels, The tropical Grassmannian, *Adv. Geom.* 4 (2004), no. 3, 389–411.
- [19] B. Sturmfels, Gröbner bases and convex polytopes, *University Lecture Series vol. 8*, Amer. Math. Soc. (1996).
- [20] B. Sturmfels, Solving systems of polynomial equations, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics 97*, AMS (2002).
- [21] M. D. Vigeland, The group law on a tropical elliptic curve, math.AG/0411485.

kajiwara@ynu.ac.jp
 Department of Applied Mathematics
 Faculty of Engineering
 Yokohama National University
 Yokohama, 240–8501
 JAPAN